UNA GENERALIZACIÓN DEL
PROBLEMA DE COLOREO DE GRAFOS

EXTENSIONES Y VARIACIONES
DEL PROBLEMA DE LOS GRAFOS PERFECTOS

Tesis de Licenciatura

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

por Paula L. Zabala

Director: Dr. Oscar Porto
Codirector: Lic. Guillermo Durán

ÍNDICE

Resumen

En este trabajo se presenta una generalización del problema de coloreo de grafos. Se estudian sus propiedades y se generalizan algunas cotas y resultados de la teoría de coloreo. Esta nueva generalización surge a partir de la necesidad de modelar algunos problemas reales.

Se demuestra que un caso particular de este nuevo problema es NP-Completo, y se conjetura que todos los casos también lo son. A pesar de esto, se modelizó el problema como un problema de programación entera 0-1, que se utilizó para resolver en forma exacta instancias de dimensión limitada. También se presentan heurísticas para resolverlo.

En la segunda parte del trabajo, a partir de este nuevo concepto, proponemos una generalización del problema de los grafos perfectos.

Abstract

In this work we present a generalization of the graph coloring problem. We study its properties and we generalize some well-known bounds and results. This new generalization is motivated by the need of model some real problems.

We show that one particular case of this problem is NP-Complete, and we conjecture that in all cases the problems are NP-Complete too. In spite of this we present a IP formulation which allows us to solve small dimension cases. We propose too some heuristics.

In the second part of this work, beginning from this new concept, we propose a generalization of the perfect graph problem.

Capítulo I : <u>Introducción</u>

Los grafos que consideraremos en este trabajo son grafos finitos, no dirigidos, sin rulos y sin aristas múltiples. Para definiciones sobre grafos puede consultarse [5]. Definimos un grafo G como G = (V,X), donde V es el conjunto de los vértices de G y X el conjunto de sus aristas, n representa el cardinal de V y m el de X. El grado de un vértice v en G, d(v), es el número de aristas incidentes a v; $\delta(G)$ es el grado mínimo de los vértices de G y $\Delta(G)$ el grado máximo. Un subgrafo H de un grafo G consiste de un subconjunto del conjunto de los vértices de G y un subconjunto del conjunto de aristas de G, las cuales forman un grafo. Un subgrafo inducido por un conjunto U de vértices de G, tiene como conjunto de vértices a U y contiene todas las aristas de G incidentes a dos vértices de U. Un clique de G es un subgrafo inducido completo de G, $\omega(G)$ es la cardinalidad de un clique máximo de G. Un matching de un grafo G, es un conjunto de aristas que no inciden sobre vértices en común. Un agujero, es un ciclo sin cuerdas de por lo menos 4 vértices, el agujero es par si la cantidad de vértices del ciclo es par, e impar en caso contrario, C_k denota un agujero de k vértices. Un diamante es el completo de 4 vértices menos una arista. Un vértice es llamado simplicial si sus vértice adyacentes forman una clique en G. Por G contiene a G', entendemos que G' es subgrafo inducido de G. El complemento de un grafo G, denotado por $\overline{G}$, es el grafo que tiene como conjunto de vértices el conjunto de vértices de G y como conjunto de aristas las aristas que no pertenecen al conjunto de aristas de G.

Un ***coloreo*** de los vértices de un grafo G = (V,X) es un mapeo $c:V \rightarrow S = \{1,..,j\}$, tal que $c(v) \neq c(w)$ si v y w son adyacentes en G. Los elementos de S representan los colores. Si es posible definir este mapeo decimos que G tiene un ***j-coloreo de sus vértices***.

El problema de coloreo de un grafo G, es encontrar el mínimo entero j, para el cual G tiene un j-coloreo de sus vértices. Este valor es llamado ***número cromático*** del grafo G, y se denota $\chi(G)$.

Karp, en 1972, demostró que este problema es NP-Completo. Por su numerosa cantidad de aplicaciones, como por ejemplo asignación de horarios en establecimientos educativos, problemas de secuenciamiento y scheduling, asignación eficiente de recursos, se han implementado una gran variedad de heurísticas para resolverlo. Se han definido algunas generalizaciones de este problema, como por ejemplo el número i-cromático de un grafo G: el menor número k para el cual G tiene una partición de sus vértices $V_1,..,V_k$, tal que el número clique de los subgrafos inducidos por cada V_j , $1 \leq j \leq k$, es a lo sumo i.

Analicemos los siguientes problemas:

Problema 1: Se quieren formar ***n*** comisiones de ***k*** integrantes cada una para dar su opinión sobre un conjunto de temas. Cada tema fue asignado a una o más comisiones, de acuerdo a su importancia. A una comisión se le puede haber asignado más de un tema. Para garantizar obtener distintas opiniones de las comisiones, se requiere que entre pares de comisiones que traten algún tema en común no compartan más de ***i*** integrantes. ¿Cuál es la mínima cantidad de personas necesarias para formar estas ***n*** comisiones?

Problema 2 : ¿Cuántos días son necesarios para que se reúnan las comisiones de un parlamento si todos las comisiones necesitan reunirse k días y hay algunos miembros del parlamento que pertenecen a más de una comisión?

Para modelar el problema 1, construimos un grafo G de la siguiente manera: por cada una de las comisiones colocamos un vértice en G, y dos vértices serán adyacentes si las comisiones a las que representan tratan algún tema en común. Entonces, para resolver este problema es necesario encontrar el menor número de personas (colores) necesarios para asignarle a cada vértice k personas (colores) de forma tal que dos vértices adyacentes no compartan más de i personas (colores).

De esta forma, surge una nueva generalización del problema de coloreo de grafos: dados dos enteros k, i, con $k \geq i \geq 0$, un ***k,i-coloreo*** de los vértices de G= (V,X) es un mapeo **c:V→{subconj. de S de *k* elementos}**, tal que $|c(v) \cap c(w)| \leq i$ si v y w son vértices adyacentes en G. Si $|S| = j$, decimos que G tiene un ***j-k,i-coloreo de sus vértices***.

El ***problema de k,i-coloreo*** de un grafo consiste en encontrar el menor entero j para el cual G tiene un j-k,i-coloreo de sus vértices. A este valor lo llamaremos ***número k,i-cromático*** de G, y lo denotamos $\chi_k^i(G)$. Para k = i, el problema es trivial, ya que el número k,k-cromático de cualquier grafo es siempre k. Cuando k = 1 e i = 0, este problema se transforma en el problema tradicional de coloreo. El problema para i = 0, fue definido en [13], donde se estudia esta función para grafos planares.

A partir de la nueva definición, buscaremos propiedades del problema de k,i-coloreo, y extenderemos algunos resultados de la teoría de coloreo para esta generalización. También analizaremos heurísticas para resolver este problema.

Por otro lado, con una idea similar proponemos una generalización de la noción de grafos perfectos.

Berge definió en 1960 los grafos ***perfectos*** [1]. G es perfecto si para todo H subgrafo inducido de G, $\chi(H) = \omega(H)$, donde $\omega(H)$ es la cardinalidad de un clique máximo (subgrafo completo máximo).

Berge también enunció dos conjeturas. La Conjetura Débil de Grafos Perfectos: "G es perfecto si y sólo si su complemento es perfecto", fue probada por Lóvasz en 1972. La Conjetura Fuerte de Grafos Perfectos: "G es perfecto si y sólo si G no contiene como subgrafo inducidos agujeros impares o sus complementos" es aún un problema abierto, convirtiéndose en la conjetura más importante de este área.

La teoría de los grafos perfectos es uno de los temas más estudiados e interesantes en teoría de grafos, por su belleza y complejidad teórica, y porque algunos problemas NP-Completos para grafos en general son polinomiales para esta clase, como por ejemplo el problema de conjunto independiente máximo, el problema de clique máxima, el problema de número cromático y el problema de recubrimiento por cliques.

La búsqueda de una buena caracterización de los grafos perfectos, ha hecho surgir nuevos conceptos de perfección, para los cuales existen problemas abiertos cuya resolución puede ayudar en la demostración de la Conjetura Fuerte de los Grafos Perfectos, o tienen importancia teórica propia. Estas distintas perfecciones definen nuevas extensiones y variaciones del problema de los grafos perfectos. Todos los conceptos de perfección surgen a partir de dos requerimientos principales inmersos en la definición de grafos perfectos: una relación mínimo-máximo entre dos parámetros, donde la igualdad puede ser obtenida y el valor de un parámetro es siempre mayor o igual que el valor del otro, y una cuantificación sobre todos los conjuntos de cierto tipo, los subgrafos inducidos.

Algunas variaciones y generalizaciones son :

Variaciones:

1. Problema de los grafos β-perfectos

2. Problema de los grafos línea perfectos

Generalizaciones:

3. Problema de los grafos q-perfectos

4. Problema de los grafos i-perfectos

5. Problema de los grafos perfectamente i-transversables

Con la definición de número k,i-cromático, surge una nueva generalización del problema de los grafos perfectos. G es ***k,i-perfecto*** si para todo H subgrafo inducido de G, $\chi_k^i(H)=\omega_k^i(H)$, donde $\omega_k^i(H)$ es el número k,i-cromático de una clique máxima de H.

Aquí analizaremos esta y algunas otras variaciones y generalizaciones del problema de los grafos perfectos.

En el capítulo II trataremos el problema de k,i-coloreo. En este capítulo mostraremos algunos ejemplos del problema, lo analizaremos para casos particulares de valores de i, definiremos los grafos k,i-críticos y estudiaremos algunas de sus propiedades, mostraremos algunas cotas del número k,i-cromático, definiremos y estudiaremos el número k,i-colorante, presentaremos una formulación del problema de k,i-coloreo como un problema de programación lineal entero 0-1, desarrollaremos heurísticas para resolver este problema y definiremos el índice k,i-cromático.

En el capítulo III, estudiaremos distintas variaciones y generalizaciones del problema de los grafos perfectos: definiremos los grafos k,i-perfectos y estudiaremos algunas propiedades de estos grafos y de los grafos β-perfectos, que fueron definidos en [19].

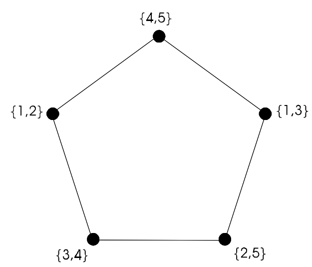
En el capítulo IV, presentaremos las conclusiones del trabajo realizado y comentaremos algunas posibles extensiones.

Capítulo II : Una generalización del problema de coloreo de grafos

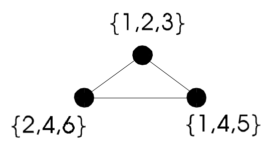
2.1 - Ejemplos del problema de k,i-coloreo

Para comprender mejor la definición, vamos a analizar algunos ejemplos del problema de k,i-coloreo para grafos particulares:

$\chi_2^0(C_5) = 5$, porque con 4 colores no nos alcanza para 2,0-colorear a C_5 y con 5, podemos obtener el 2,0-coloreo:



$\chi_3^1(K_3) = 6$:



Llamamos ***L(j,k,i)*** a la cantidad máxima de conjuntos de k elementos que se pueden formar con los elementos de un conjunto de cardinalidad j, tal que todo par de conjuntos no se intersequen en más de i elementos.

Por ejemplo, L(6,4,2) = 3, porque de los posibles 15 conjuntos de 4 elementos que podemos formar del conjunto {1,2,3,4,5,6}, la máxima cantidad que podemos elegir de forma tal que todo par de conjuntos no compartan más de 2 elementos es 3:

{1,2,3,4} {1,2,3,5} {1,2,4,5} {1,3,4,5} {2,3,4,5}

{1,2,3,6} {1,2,4,6} {1,3,4,6} {2,3,4,6} {1,2,5,6}
{1,3,5,6} {2,3,5,6} {1,4,5,6} {2,4,5,6} {3,4,5,6}

Si elegimos por ejemplo el conjunto {1,2,3,4}, sólo no quedan eliminados:
{1,2,5,6} {1,3,5,6} {2,3,5,6}
{1,4,5,6} {2,4,5,6} {3,4,5,6}

De estos conjuntos, sólo podemos elegir dos más, por ejemplo {1,2,5,6} y {3,4,5,6}.

Usando esta definición, podemos calcular el número k,i-cromático de los grafos completos:

$$\boldsymbol{\chi_k^i(K_n) = \min \{ j \in N / L(j,k,i) \geq n \}}$$

Entonces, por ejemplo $\chi_4^2(K_3) = 6$ y $\chi_4^2(K_2) = 6$, porque $L(6,4,2) = 3$ y $L(5,4,2)= 1$.

Si encontrásemos una forma de calcular L(j,k,i) en tiempo polinomial, nos serviría para poder calcular polinomialmente el número k,i-cromático de los grafos completos, utilizando simplemente el siguiente algoritmo:

Cálculo de j

```
j = k
Mientras L(j,k,i) < n
        j = j + 1
Fin Mientras
```

Para los grafos bipartitos y K_3 podemos calcular exactamente el número k,i-cromático.

<u>Proposición 2.1.1</u> : Si G es un grafo bipartito (con alguna arista) entonces $\chi_k^i(G) = 2*k - i$

<u>Proposición 2.1.1</u> : Si $k \leq 2 * i$, entonces $\chi_k^i(K_3) = 2 * k - i$. Si $k > 2 * i$, $\chi_k^i(K_3) = 3 * k - 3 * i$

Dem.: Cuando $k \leq 2 * i$, asignamos a un vértice los primeros k colores, para el segundo vértice, repetimos los primeros i colores y utilizamos k-i nuevos, y para el tercer vértice podemos usar k-i colores asignados al primer vértice y no al segundo, y k-i asignados al segundo y no el primero, porque $k - i \leq i$ y $2*(k - i) \geq k$.

Si k > 2*i, asignamos a un vértice los primeros k colores, para el segundo vértice, repetimos los primeros i colores y utilizamos k-i nuevos, y para el tercer vértice podemos usar i colores asignados al primer vértice y no al segundo, e i colores asignados al segundo y no al primero, pero aún necesitamos k-2*i colores nuevos.

2.2 - Análisis para casos particulares de valores de i

Analizaremos el problema de k,i-coloreo para i = 0 e i = k - 1. Para estos casos particulares es posible encontrar resultados interesantes.

I) i = 0 :

Para el cálculo de $\chi_k^0(G)$, construimos el grafo C(G) a partir de G de la siguiente forma: por cada vértice v de G colocamos los vértices $v_1,..., v_k$ en C(G) y colocamos todos las aristas posibles entre estos vértices v_i. Después, por cada arista (v,w) de G colocamos todos las aristas (v_i ,w_j) en C(G). Esto es similar a multiplicar el grafo G por cada vértice k-1 veces y colocar aristas entre todas las copias de un mismo vértice. Cuando i = 0, $\chi_k^0(G) = \chi(C(G))$, un coloreo óptimo de C(G) da un k,0-coloreo óptimo del grafo original, asignando a cada vértice v de G el conjunto formado por los colores asignados a los vértices $v_1,...,v_k$ en C(G), con lo que estamos diciendo que el problema de k,0-coloreo se puede reducir al problema de coloreo, porque podemos construir C(G) a partir de G en tiempo polinomial.

Podemos acotar $\chi_k^0(G)$ en función de $\chi(G)$.

Proposición 2.2.1 : $\chi_k^0(G) \leq k * \chi(G)$

Dem.: Simplemente por cada color utilizado en el coloreo óptimo de G, ahora vamos a disponer de k subcolores, y asignando a cada vértice v los subcolores obtenidos del color asignado originalmente, se obtiene un k,0-coloreo válido.−

Con igual procedimiento generalizamos esta cota.

Proposición 2.2.2 : $\chi_{k*j}^0(G) \leq k * \chi_j^0(G)$

Por ejemplo C_5, cuando k = 2 cumple esta cota por menor, porque $\chi_2^0(C_5) = 5$, $\chi(C_5) = 3$ y $\omega(C_5) = 2$.

Para tratar de identificar qué grafos cumplen la igualdad, encontramos la siguiente condición suficiente:

Proposición 2.2.3 : Si $\chi(G) = \omega(G)$, entonces $\chi_k^0(G) = k*\chi(G)$

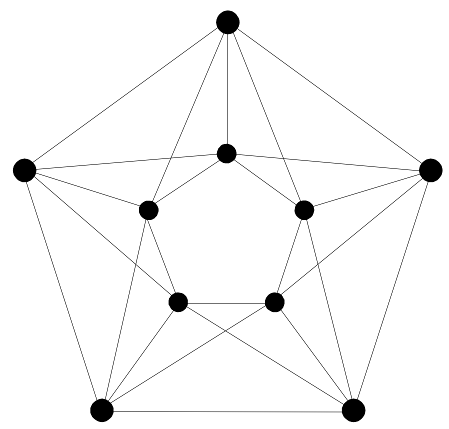
Dem.: La desigualdad $k * \omega(G) \leq \chi_k^0(G)$ se debe cumplir porque para k,0-colorear un clique máximo de G es necesario $k * \omega(G)$ colores, y entonces $k * \chi(G) \leq \chi_k^0(G) \leq k * \chi(G)$. −

Este resultado se puede generalizar de igual manera:

<u>Proposición 2.2.4</u> : Si $\chi(G) = \omega(G)$, entonces $\chi_{k*j}^0(G) = k * \chi_j^0(G)$

Dem.: Para k*j,0-colorear una clique máxima de G serán necesarios $k*j*\omega(G)$ colores, entonces $k*j*\chi(G) \leq \chi_{j*k}^0(G)$. Como $\chi_j^0(G) = j * \chi(G)$ por la proposición anterior, $k * \chi_j^0(G) \leq \chi_{k*j}^0(G) \leq k * \chi_j^0(G)$. −

La condición anterior no es una condición necesaria, como se ve en el grafo G:



$\omega(G) = 4$ $\chi(G) = 5$ $\omega_2^0(G) = 8$ $\chi_2^0(G) = 10$

Algunos grafos para los cuales es fácil calcular el número k,0-cromático son:

- $\chi_k^0(K_n) = k * n$ (Grafo completo de n vértices)

- $\chi_k^0(C_{2*j}) = 2 * k$ (Circuitos pares de 2*j vértices)

- $\chi_k^0(\overline{C_{2*j}}) = k * j$ (Complementos de circuitos pares de 2 * j vértices). Si llamamos a los vértices del circuito $v_1, v_2,..., v_{2*j}$, los vértices impares forman una clique de tamaño j en el complemento, entonces por lo menos necesitaremos k * j colores para un k,0-coloreo, y estos bastan, ya que podemos asignar al vértice v_2 el mismo grupo de colores que al vértice v_1, al v_4 el mismo grupo que al v_3, y así sucesivamente.

- $\chi_k^0(P_n) = 2 * k$ (Caminos de n vértices)

II) <u>i = k - 1</u> :

Para i = k-1, obtenemos que $\boldsymbol{\chi_k^{k-1}(G) = \min \{j \in N \,/\, \binom{j}{k} \geq \chi(G)\}}$. Esto es porque todos los subconjuntos de k elementos del conjunto de j elementos difieren en por lo menos 1, es decir $L(j,k,k-1) = \binom{j}{k}$. Para este caso particular, tenemos un algoritmo lineal para calcular el valor del entero j (algoritmo para el cálculo de j), utilizando el hecho de que el valor mínimo que puede tomar j es k, dado que necesitamos por lo menos k colores para colorear un vértice, y que $\binom{j}{k} = \binom{j-1}{k} * j / (j-k)$, con $\binom{k}{k} = 1$.

Algoritmo para el cálculo de j

L = 1
j = k
Mientras L < χ(G) hacer
    j = j + 1
    *L = L * j / (j - k)*
Fin Mientras

El valor de j es menor que n * (k - i) + i, porque asignando a todos los vértices de G i colores comunes y k-i colores propios de cada uno, obtenemos un k,i-coloreo válido, entonces el ciclo del algoritmo se realiza O(n) veces.

Con esto vemos que el problema de k,k-1-coloreo se puede reducir al problema de coloreo.

2.3 - <u>Grafos j-k,i-críticos</u>

Los grafos críticos fueron definidos por Dirac en 1951 [14]. La importancia de la noción de "criticidad" es que problemas para grafos j -cromáticos pueden ser reducidos a problemas en grafos j-críticos, y estos son más restrictivos que grafos generales. Generalizaremos esta definición llamando a un grafo G, ***j-k,i-crítico*** si $\chi_k^i(G) = j$ y para todo vértice v de G, $\chi_k^i(G-\{v\}) < j$.

Para estos grafos, probamos las siguientes propiedades.

<u>Proposición 2.3.1</u> : Si G es j-k,i-crítico entonces G es conexo

Dem.: Supongamos que G no es conexo. Llamamos H a una componente conexa tal que $\chi_k^i(H) = \chi_k^i(G)$. Entonces si $v \notin H$, $\chi_k^i(G-\{v\}) = \chi_k^i(H)$, lo que implica una contradicción. −

<u>Proposición 2.3.2</u> : Un grafo G que es j-k,i-crítico no contiene puntos de corte

Dem.: Supongamos que un vértice v de G es punto de corte. Llamamos G_1 a una componente conexa de G-{v} y G_2 al resto del grafo G-{v}. Como G es j-k,i-crítico, podemos k,i-colorear $G_1 \cup \{v\}$ y $G_2 \cup \{v\}$ con j-1 colores. Si v tiene el mismo conjunto de colores en coloreos con j-1 colores de $G_1 \cup \{V\}$ y $G_2 \cup \{V\}$, entonces podemos superponer estos coloreos para realizar un k,i-coloreo de G con j-1 colores, pero esto es absurdo porque $\chi_k^i(G) = j$. Si v no tiene el mismo grupo de colores en los coloreos de $G_1 \cup \{V\}$ y $G_2 \cup \{V\}$, renombramos los colores en uno de los dos coloreos, de forma que v tenga el mismo grupo de colores en ambos, y, al igual que antes, generamos un absurdo. −

<u>Proposición 2.3.3</u> : Si un grafo G es j-k,i-crítico, para i = 0, entonces G no puede contener subgrafos completos que sean conjunto de corte

Dem.: Supongamos que G tiene un subgrafo completo K_h que es conjunto de corte. Igual que en la demostración anterior, llamamos G_1 a una componente conexa de $G-K_h$ y G_2 al resto del grafo $G-K_h$. Como G es j-k,i-crítico, podemos k,i-colorear $G_1 \cup K_h$ y $G_2 \cup K_n$ con j-1 colores. Como todo coloreo óptimo de K_h es equivalente (sólo difieren en el nombre de los colores), podemos renombrar los colores de $G_2 \cup K_n$, por ejemplo, de forma tal que K_h tenga el mismo coloreo en $G_1 \cup K_h$ y $G_2 \cup K_n$, y sobreponiendo estos dos k,0-coloreos, obtener un k,0-coloreo de G con j-1 colores. Esto es absurdo porque $\chi_k^0(G) = j$. −

<u>Proposición 2.3.4</u> : Si un grafo G es j-k,i-crítico entonces k * δ(G) ≥ j - k + i

Dem.: Supongamos que existe un vértice v de G tal que d(v) ≤ [j-k+i-1 / k]. Podemos colorear G-v con j-1 colores, porque G es crítico. En este coloreo, los vértices adyacentes a v en G usan a lo sumo d(v)*k colores, o sea menos de [j-k+i-1/k] * k colores que es menor o igual a j-k+i-1. Entonces en el coloreo de G-v hay k-i colores no usados en los vértices adyacentes de v en G. Para colorear v en G, podemos usar i colores utilizados por sus vértices adyacentes y k-i colores no usados por sus vértices adyacentes. Entonces coloreo G con j -1 colores, lo que genera un absurdo. −

Sería interesante poder determinar si todo grafo G j-k,i-crítico puede contener un subgrafo completo que sea conjunto de corte, para cualquier valor de k e i. Hasta el momento no se ha podido demostrar ni encontrar un ejemplo en donde no se cumpla.

Para k = 1 e i = 0, estas son propiedades conocidas de los grafos color críticos tradicionales.

2.4 - Cotas del número k,i-cromático

En forma similar al problema clásico de coloreo de grafos vemos que un procedimiento fácil para encontrar un k,i-coloreo de un grafo G es utilizar un algoritmo goloso: primero enumeramos los vértices de G, $v_1,..,v_n$. Vamos tomando los vértices en este orden y coloreamos cada v_i con los primeros k colores disponibles, es decir con los enteros positivos más pequeños tal que no compartan más de i enteros (colores) con los vértices adyacentes de v_i ya coloreados. Utilizando este algoritmo, obtenemos la siguiente cota, donde $\Delta(G)$ es el grado máximo de los vértices de G:

Proposición 2.4.1 : $\chi_k^i(G) \leq k * (\Delta(G) + 1) - i$

Dem.: Los adyacentes de v_i a lo sumo utilizan $d(v_i)$ * k colores, donde $d(v_i)$ es el grado de v_i, y para v_i vamos a necesitar a lo sumo k-i colores nuevos, porque puede compartir i con sus adyacentes. Entonces, el mayor color (entero) asignado a v_i va a ser menor o igual a $k*(d(v_i) + 1) - i$. De esta forma, no es necesario más de $k*(\Delta(G)+1) - i$ colores para k,i-colorear G. −

Esta cota puede ser mejorada para algunos grafos particulares, la demostración de la siguiente proposición la postergamos hasta tratar el número k,i-colorante.

Proposición 2.4.2 : Si G no tiene una componente conexa $\Delta(G)$-regular, entonces $\chi_k^i(G) \leq k * \Delta(G) - i$

Hay grafos que tienen una componente conexa $\Delta(G)$-regular para los cuales esta cota también es válida, como por ejemplo C_4. El teorema de Brooks caracteriza los grafos para los cuales es válida la cota $\chi(G) \leq \Delta(G)$: Si G es conexo y no es un completo ni un agujero impar, entonces $\chi_k^i(G) \leq \Delta(G)$. Conjeturamos una generalización de este teorema, restringiendo las hipótesis de la proposición anterior :

Conjetura 2.4.3 : Si G es conexo y no es un completo ni un agujero impar, entonces $\chi_k^i(G) \leq k * \Delta(G) - i$

En general, esta cota superior de **$k*(\Delta(G) + 1) - i$** colores es muy holgada y puede ser tan mala como se quiera. Cuando coloreamos un vértice v_i usando el algoritmo goloso anterior, en lugar de $k*(d(v_i) + 1) - i$, sólo necesitaremos a lo sumo $k*d_{G[v1,v2,..,vi]}(v_i) + (k-i)$ colores, donde $G[v_1,v_2,..,v_i]$ es el subgrafo inducido de G generado por el conjunto de vértices $\{v_1,v_2,..,v_i\}$. Es decir, para el cálculo de la cota anterior no utilizamos el hecho de que el algoritmo ignora los vecinos v_j de v_i con $j>i$, porque aún no han sido coloreados. Esto sugiere utilizar el algoritmo eligiendo los vértices de mayor grado al comienzo (cuando la mayoría de sus vecinos son ignorados) y los vértices de grado menor al final. El número de colores necesarios para colorear v_i, será más chico si v_i tiene grado mínimo en $G_{[v1,..,vi]}$, el subgrafo de G inducido por los vértices ya coloreados más v_i. Esto genera la siguiente modificación, que no necesariamente implica siempre una mejora, como se podrá ver en un ejemplo en las tablas del apéndice A.

Para ordenar los vértices de G seguimos el siguiente procedimiento: elegimos v_n como uno de los vértices de grado mínimo en G, v_{n-1} como uno de los vértices de grado mínimo en G-$\{v_n\}$, y así sucesivamente, es decir v_j es el vértice de grado mínimo en G-$\{v_{j+1},...,v_n\}$ para $j = n, n-1,...,1$. Este procedimiento genera un orden de los vértices llamado "***el más chico al final***". Utilizando el algoritmo goloso con los vértices de G en este orden, si llamamos $\delta(G)$ al grado mínimo de los vértices de G, obtenemos la cota:

<u>Proposición 2.4.4</u> : $\chi_k^i(G) \leq k*(\text{ máx }\{\delta(H)/H \text{ subgrafo inducido de } G\} + 1) - i$

Dem.: Al colorear el vértice j, el máximo color utilizado será menor o igual a $k*d_{G[v1,..,vj]}(v_j) + k - i$, donde el primer término indica la cantidad máxima de colores usados por los vértices adyacentes de v_j ya colorados, y $k - i$ es la cantidad máxima de colores nuevos necesarios para colorear v_j, dado que puede compartir i colores con sus vértices adyacentes. Entonces al terminar de colorear el vértice v_j, la cantidad total de colores utilizados será menor o igual a $k * \delta(G[v_1,v_2,...,v_j]) + k - i$. Entonces para k,i-colorear G, no es necesario más de $k * (\text{ máx}_{1\leq j\leq n}\ \{\delta(G_{[v1,..,vj]})\} + 1) - i$ colores. −

Las siguientes proposiciones muestran cotas que relacionan el número k,i-cromático de un grafo y el de su complemento.

<u>Proposición 2.4.5</u> : $\chi_k^i(G) + \chi_k^i(\overline{G}) \leq k(n + 1) - 2 * i$ para $n > 2$

Dem.: Inducción en n:

Caso Base: n = 3

Los grafo de 3 vértices a analizar son K_3 y K_3 menos un arista, ya que los otros son complementos de estos.

1. $\chi_k^i(K_3) \leq 3k - 2i$ y $\chi_k^i(\overline{K_3}) = k$, sumando: $4k -2i$ que es igual a la cota.
2. $\chi_k^i(K_3-\{e\}) = 2k - i$ y $\chi_k^i(\overline{K_3 - \{e\}}) = 2k - i$, sumando: $4*k-2i$, que es igual a la cota.

Paso inductivo:

Suponemos que para todo grafo G con j vértices, $3 \leq j < n$, se cumple que $\chi_k^i(G) + \chi_k^i(\overline{G}) \leq k(j+1) - 2i$, y vamos a analizar un grafo de n vértices.

Sea G_n un grafo de n vértices.

Caso i. G_n y $\overline{G_n}$ son ambos k,i-críticos:

Por ser k,i-críticos, $k*d_{Gn}(v) \geq \chi_k^i(G_n) - k + i$ y $k*d_{\overline{Gn}}(v) \geq \chi_k^i(\overline{G_n}) - k + i$ para todo v vértice de G_n. Tomando un vértice cualquiera y sumando miembro a miembro:

$k*(n-1) \geq \chi_k^i(G) + \chi_k^i(\overline{G}) - 2k + 2i$ entonces $\chi_k^i(G) + \chi_k^i(\overline{G}) \leq k*(n+1) - 2i$.

Caso ii. G_n y $\overline{G_n}$ no son ambos críticos. Sin pérdida de generalidad supongamos que G_n no es crítico. Entonces $\exists$ v vértice de G_n, tal que $\chi_k^i(G_n\text{-}v) = \chi_k^i(G_n)$. Siempre sucede $\chi_k^i(\overline{G_n}) - k + i \leq \chi_k^i(\overline{G_n - \{v\}}) \leq \chi_k^i(\overline{G_n})$.

Como las operaciones complementar y borrar un vértice de un grafo son conmutativas, obtenemos:

$\chi_k^i(G_n) + \chi_k^i(\overline{G_n}) \leq \chi_k^i(G_n\text{-}v) + \chi_k^i(\overline{G_n - \{v\}}) + k - i$ y por hipótesis inductiva $\chi_k^i(G_n\text{-}v) + \chi_k^i(\overline{G_n - \{v\}}) + k - i \leq k * n - 2 * i + k - i \leq k * (n+1) - 2 * i$, obteniéndose $\chi_k^i(G_n) + \chi_k^i(\overline{G_n}) \leq k * (n + 1) - 2 * i$ que es lo que se quería probar. −

<u>Proposición 2.4.6</u> : $\chi_k^i(G) * \chi_k^i(\overline{G}) \leq [(k*(n+1)-2*i) /2]^2$ para n>2

Dem.: Para todo par de números positivos, siempre se cumple que $(a*b)^{1/2} \leq (a+b)/2$ reemplazando $a = \chi_k^i(G)$ y $b = \chi_k^i(\overline{G})$, y $\chi_k^i(G) + \chi_k^i(\overline{G}) \leq k(n + 1) - 2 * i$, obtenemos esta cota. −

<u>Proposición 2.4.7</u> : Si $\chi_k^i(G) = j$ y $\chi_k^i(\overline{G}) = \bar{j}$, entonces $n \leq \binom{j}{k} * \binom{\bar{j}}{k}$

Dem.: Llamamos $\wp_{[k]}(j)$ al conjunto de los subconjuntos de k elementos que se pueden formar del conjunto de los enteros {1,2,...,j}.

Definimos dos funciones f y g como las funciones que asignan a cada vértice de V el conjunto de colores asignado en un coloreo óptimo de G y $\overline{G}$ respectivamente:

$$f : V \rightarrow \wp_{[k]}(\chi_k^i(G)) \quad \text{y} \quad g : V \rightarrow \wp_{[k]}(\chi_k^i(\overline{G}))$$

Llamamos $\boldsymbol{h : V \rightarrow \wp_{[k]}(\chi_k^i(G)) \times \wp_{[k]}(\chi_k^i(\overline{G}))}$ a la función definida como $h(v) = (f(v), g(v))$. La función h está bien definida ya que para todo v existe y es única. La función h es inyectiva, porque $h(v) = h(w)$, entonces $f(v) = f(w)$ y $g(v) = g(w)$, por lo tanto v y w no pueden ser adyacentes en G y tampoco en $\overline{G}$, entonces $v = w$. Luego $|V|$

$\leq |\wp_{[k]}(\chi_k^{\,i}(G)) \times \wp_{[k]}(\chi_k^{\,i}(\overline{G}))|$, es decir si $\chi_k^{\,i}(G) = j$ y $\chi_k^{\,i}(\overline{G}) = \overline{j}$, $n \leq \binom{j}{k} * \binom{\overline{j}}{k}$.–

Estos resultados son generalizaciones de las cotas de coloreo, porque cuando k = 1 e i = 0, tenemos el problema de coloreo tradicional, y las cotas se transforman en cotas conocidas para ese problema.

2.5 - Número colorante

Erdös y Hajnal en 1966 definieron el ***número colorante*** [14], col(G), como:

$$col(G) = \text{mín}_{p\in\Pi n}\ \text{máx}_{1\leq j\leq n}\ \{d(v_{p(j)}, G_{p(j)})\} + 1,$$

donde Π_n representa todas las permutaciones de {1,2,...,n}, $G_{p(j)}$ es el subgrafo de G inducido por los vértices $v_{p(1)},...,v_{p(j)}$, es decir $G[v_{p(1)},...,v_{p(j)}]$, y d(v,H) denota el grado del vértice v en el grafo H. Extenderemos esta definición a ***número k,i-colorante*** de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{col_k^i(G) = k * (\text{mín}_{p\in\Pi n}\ \text{máx}_{1\leq j\leq n}\ \{\ d(v_{p(j)}, G_{p(j)})\ \} + 1) - i}$$

y demostraremos algunas propiedades.

El número k,i-colorante satisface claramente $\mathbf{col_k^i(G) \leq k * (\Delta(G) + 1) - i}$, y la desigualdad $\boldsymbol{\chi_k^i(G) \leq col_k^i(G)}$ es obtenida utilizando el algoritmo goloso de k,i-coloreo con los vértices de G ordenados según la permutación que define $col_k^i(G)$.

Por lo visto anteriormente, como cualquier "orden el más chico al final" de los vértices de G, $v_{p(1)},..,v_{p(n)}$, es una permutación de Π_n obtenemos:

$$\boldsymbol{col_k^i(G) \leq k * (\text{máx}_j\ \{\ \delta(\ G-[v_{p(1)},..,v_{p(j)}]\ \}\ ) + 1) - i\ \leq\ k * (\ \text{máx}\ \{\ \delta(H)\ /\ H\subseteq G\} + 1) - i}$$

También podemos generalizar el teorema de Halin [1967], Matula [1968], Finck y Sachs [1969], Lick y White [1970]: col(G) = $\text{máx}_j\ \{\ \delta(G-[v_{p(1)},..,v_{p(j)}]\ \} + 1 =$ máx{δ(H) / H$\subseteq$G} + 1) si $v_{p(1)},...,v_{p(n)}$ es un "orden el más pequeño al final".

Teorema 2.5.1 :

$$\boldsymbol{col_k^i(G) = k * (\ \text{máx}_j\ \{\ \delta(G-[v_{p(1)},..,v_{p(j)}]\ \}\ ) + 1) - i = k * (\ \text{máx}\ \{\ \delta(H)\ /\ H\subseteq G\} + 1) - i}$$

si $\mathbf{v_{p(1)},...,v_{p(n)}}$ es un "orden el más pequeño al final"

Este teorema implica que si j es el menor número tal que G es ***j-degenerado***, esto es, que todo subgrafo H de G no vacío tiene un vértice de grado a lo sumo j en H, $col_k^i(G)$ es igual a (k * (j + 1) - i). También el término medio del teorema muestra que es "fácil" calcular col $_k^i(G)$: entre los n! posibles órdenes de los vértices de G, el mínimo en la definición de $col_k^i(G)$ es obtenido por un "orden el más chico al final" y entre los 2^n

subgrafos inducidos de G, es posible encontrar un G' que da el máximo valor de $\delta(G')$ entre sólo los n subgrafos inducidos $G[v_{p(1)}],...,G[v_{p(1)},v_{p(2)},...,v_{p(n)}]$ fácilmente obtenidos.

Utilizando esta definición de número k,i-colorante, podemos mejorar una cota hallada para el número k,i-cromático. Para eso son necesarios los siguientes lemas:

<u>Lema 2.5.2</u> : $col_k^i(G) = k\ (\Delta(G) + 1) - i$ si y sólo si G tiene una componente conexa $\Delta(G)$-regular

Dem.: Si G tiene una componente conexa G', $\Delta(G)$-regular, entonces $\delta(G') = \Delta(G)$, por lo tanto máx $\{\delta(H) / H \subseteq G\} = \Delta(G)$, y entonces, por el teorema anterior, $col_k^i(G) = k * (\Delta(G) + 1) - i$.

Si $col_k^i(G) = k * (\Delta(G) + 1) - i$, se debe cumplir, por el teorema anterior, que máx $\{\delta(H) / H \subseteq G\} = \Delta(G)$. Debe existir G' subgrafo inducido de G, tal que $\delta(G') = \Delta(G)$ y entonces G' debe ser una componente conexa $\Delta(G)$-regular. −

<u>Lema 2.5.3</u> : Si G no tiene una componente conexa $\Delta(G)$-regular, entonces $col_k^i(G) \leq k * \Delta(G) - i$

Dem.: $\delta(H) \leq \Delta(G) - 1$ para todo H subgrafo inducido de G, caso contrario G debería tener una componente conexa $\Delta(G)$-regular; entonces, por el teorema anterior, $col_k^i(G) \leq k * \Delta(G) - i$. −

<u>Proposición 2.5.4</u> : Si G no tiene una componente conexa $\Delta(G)$-regular, entonces $\chi_k^i(G) \leq k * \Delta(G) - i$

Dem.: Como G no tiene una componente conexa $\Delta(G)$-regular, entonces $col_k^i(G) \leq k * \Delta(G) - i$, y como $\chi_k^i(G) \leq col_k^i(G)$ obtenemos la cota buscada. −

2.6 - Una formulación del problema de k,i-coloreo como un problema de programación entera

Para resolver el problema de k,i-coloreo en forma exacta, planteamos una formulación como un problema de programación lineal entera.

Definimos:

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{si el color j es usado en algún vértice} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$x_{p,j} = \begin{cases} 1 \text{ si vértice p es pintado con color j} \\ 0 \text{ si vértice p no tiene asignado color j} \end{cases}$$

Para p y q vértices adyacentes:

$$y_{p,q,j} = \begin{cases} 1 \text{ si los vértices p y q tienen ambos asignado el color j} \\ 0 \text{ caso contrario} \end{cases}$$

Problema:

$\text{Min } \Sigma\, w_j$

s.a. $\Sigma_j\, x_{p,j} = k$ Cada vértice debe tener asignado k colores

$y_{p,q,j} \leq (x_{p,j} + x_{q,j}) / 2$

$y_{p,q,j} \geq (x_{p,j} + x_{q,j}) / 2 - ½$

$\Sigma_j\, y_{p,q,j} \leq i$ Dos vértices adyacentes no pueden compartir más de i colores

$x_{p,j} \leq w_j$ w_j debe ser 1 si lo usa algún vértice.

$x_{p,j}\ ,\ w_j\ ,\ y_{p,q,j} \in \{0,1\} \quad \forall j,p,q$

En la práctica sólo pudimos resolver problemas de pequeña dimensión (grafos de hasta 12 vértices poco densos con valores de k chicos), debido a que los problemas de programación lineal entera en general son NP-Completos. Hemos implementado un programa que genera la entrada con formato LP que es procesada por el paquete CPLEX [25], en una WorkStation Sun Sparc 4, bajo UNIX(r) System V Release 4.0.

2.7 - Complejidad del problema de k,i-coloreo

El problema general es NP-Completo, ya que el problema de coloreo es un caso particular, pero no sabemos como clasificarlo para otros pares k, i fijos. Nosotros planteamos la conjetura:

Conjetura 2.7.1 : El problema de k,i-coloreo es NP-Hard para cualquier par de enteros k, i fijos con $k > i$

Para el caso particular $i = k-1$, podemos demostrar esta conjetura.

Teorema 2.7.2 : El problema de k,k-1-coloreo es NP-Hard

Dem.: Si A(G) denota el número de colores utilizados por el algoritmo A cuando es aplicado a G, en [8] Garey y Johnson muestran que si para alguna constante $r < 2$ y constante d existe un algoritmo de tiempo polinomial A que garantice $A(G) \leq r * \chi(G) + d$, entonces existe un algoritmo de tiempo polinomial A^*, tal que $A^*(G) = \chi(G)$.

Como $\chi_k^{k-1}(G) \leq \chi(G) + k - 1$, entonces si existe algoritmo polinomial para calcular $\chi_k^{k-1}(G)$, también debe existir algoritmo polinomial para calcular $\chi(G)$. Con esto vemos que el problema de k,k-1-coloreo es NP-Hard. −

2.8 - Heurísticas para resolver el problema de k,i-coloreo

En base a la conjetura anterior, implementamos tres heurísticas para resolver este problema, que difieren en el orden de selección del próximo vértice a colorear. En la primera no hay restricción impuesta sobre este orden, en la segunda utilizamos los vértices ordenados de mayor a menor grado en G, y en la tercera los vértices están ordenados según un "orden el más chico al final".

Estas heurísticas intentan mejorar una solución obtenida a través de un algoritmo goloso particular.

La heurística recibe como datos de entrada el grafo a colorear y los enteros k e i, y tres parámetros:

• α : indica la probabilidad de no utilización del primer color encontrado, permitiendo que un nuevo color sea utilizado aunque no sea necesario.

• β : indica que en el caso de usar otro color distinto del primero encontrado en la lista, se comienza a buscar el segundo color válido por el comienzo o fin de la lista de colores (lo que significa el menos o más recientemente utilizado)

• iter: indica la cantidad de iteraciones a realizar para tratar de encontrar un coloreo válido con una determinada cantidad de colores antes de informar que no es posible encontrarlo.

El algoritmo goloso inicial es el siguiente: en una lista se guardan los colores ya utilizados, en orden de menos a más recientemente utilizado. Esto se hace para no volver a analizar un color hasta que se hayan visto los otros. Se elige un vértice para colorear, y se buscan los colores para asignarle a este vértice de la siguiente forma: se van recorriendo los colores de esta lista y el primero válido que se encuentra se utiliza y se lo pasa al final de la lista. Un color es válido cuando al asignarlo al vértice que está siendo coloreado no sea violada la intersección máxima de tamaño y con ningún vértice adyacente. De esta forma se le asignan k colores distintos a cada vértice.

Para mejorar esta solución, repetimos el siguiente procedimiento: formamos una lista de colores con los colores permitidos (uno menos que los de la última solución encontrada). Al colorear un vértice, le asignamos, con probabilidad α, el primer color válido encontrado en la lista de colores. Si el primer color no fue empleado, el segundo color lo buscamos, con probabilidad β, al comienzo de la lista (menos recientemente utilizado), y con probabilidad 1-β al final (más recientemente utilizado). Esto permite utilizar un color no usado en el coloreo parcial actual sin necesidad. Si el coloreo que se está formando falla (no se encuentra ningún color válido y aún no se han coloreado todos los vértices), se borran todos los colores asignados a los vértices coloreados y se vuelve a comenzar. Esto se hace la cantidad de veces indicada por el parámetro iter. Si no se encuentra un coloreo válido después de estas iteraciones, la heurística termina e informa que el mejor coloreo obtenido es el último coloreo válido encontrado.

Cálculo de la complejidad de la heurística : La función *PintarVertice* tiene complejidad k^3*n, porque realizamos k veces el ciclo y *Actualizarcolusa* tiene complejidad k^2*n y *BuscoColor*, k*n. Entonces la función *ContruirSolucionInicial*, como realiza el ciclo n veces, tiene complejidad k^3*n^2. De igual forma vemos que *ConstruirOtraSolucion* también tiene complejidad k^3*n^2.

La única forma que tenemos para acotar el número de veces que se disminuirá la cantidad de colores necesaria es basarnos en el hecho de que el algoritmo goloso usará, a lo sumo, k * (máx {δ(H) H subgrafo inducido de G}+1) - i colores y el número k,i-cromático siempre es mayor que k. Por lo tanto, el ciclo principal lo realizamos O(n*k) veces. Utilizando la cota anterior, que no es buena, la complejidad de la heurística es O(iter*k^4*n^3). Para un problema dado, podemos considerar el valor de k constante, entonces la complejidad será O(iter*n^3).

Pseudocódigo de la heurística:

k,i-Coloreo (grafo, k, i, alfa, beta, iterac)

LeerGrafo

menorCol = ConstruirSolucionInicial(*k*,*i*)

Mientras encontre Coloreo hacer

  it = 0

  Mientras *it*<*iterac* y no Encontre Coloreo hacer

    cantCol = ConstruirOtraSolucion(*k*,*i*,*menorCol*-1,*alfa*,*beta*)

    it = *it* + 1

  Fin Mientras

  Si (encontre Coloreo) *menorCol* = *cantCol*

Fin Mientras

retornar *menorCol* y el último coloreo válido encontrado

PrimerVertice (lvertices)

v = Cabeza de *lvertices*

borrar *v* de *lvertices*

retornar *v*

Funciones para la solución golosa:

ConstruirSolucionInicial: *Construye la solución golosa inicial. Lvertives es una lista con los vértices del grafo aun no coloreados, lcolores es una lista con los colores utilizados hasta ese momento, ordenados de menos a más recientemente usados. Ultcol tiene el mayor color utilizado en el coloreo parcial actual hasta ese momento.*

La modificación realizada en las distintas versiones de la heurística, es el orden en que los vértices aparecen en lvertices.

ConstruirSolucionInicial (k, i)

lvertices = Lista de Vertices del Grafo

lcolores = ∅

ultcol = 0

Mientras *lvertices* no esta vacia hacer

  verticesel = PrimerVertice(*lvertices*)

ultcol = PintarVertice(*verticesel*,*k*,*i*,*ultcol*,*lcolores*)

Fin Mientras

retornar *ultcol*

PintarVertice: *Pinta el vértice n, colusa es el conjunto de los colores prohibidos (incluyendo los ya utilizados por el vértice n), ultcol es el mayor color utilizado hasta ese momento en el coloreo parcial actual, lcolores es una lista con los colores utilizados hasta ese momento, ordenados de menos a más recientemente usados, usaestevetice contiene los colores que se le van asignando al vértice n.*

PintarVertice (n, k, i, ultcol, lcolores)

usaestevertice = ∅

ady = lista de adyacentes del vértice *n*

Actualizar *colusa* (*i,usaestevertice,ady*)

Para j = 1 hasta *k*

col = BuscoColor(*ultcol*, *colusa*, *lcolores*)

Agregar el color *col* en *usaestevertice*

Actualizar *colusa* (*i, usaestevertice, ady*)

Colorcar último en *lcolores* el color *col*

Si *col* > *ultcol* entonces *ultcol* := *col*

j := j+1

Fin Para

retornar *ultcol*

BuscoColor: *Retorna el color permitido que hace más tiempo que no se usa. Colusa tiene los colores prohibidos (incluyendo los ya utilizados por el vértice n), lcolores es una lista con los colores utilizados hasta ese momento, ordenados de menos a más recientemente usados, ultcol indica el último color utilizado hasta ese momento en el coloro parcial actual.*

BuscoColor (ultcol, colusa, lcolores)

col = DarPrimerColor(*lcolores*)

Mientras *col* esta en *colusa* y No Fin (*lcolores*) hacer

col = ProximoColor(*lcolores*)

Fin Mientras

Si (Fin(*lcolores*)) *col* = *ultcol* + 1 retornar *col*

Funciones para las soluciones no golosas:

ConstruirOtraSolucion: *Construye una solución no golosa utilizando menorCol colores. Lvertices es una lista de los vértices del grafo aun no coloreados, lcolores es una lista con los menorCol colores disponibles, que se utiliza para manteniendo el orden en que los colores son utilizados (de menos a más recientemente usados).*

En las distintas versiones de la heurística, se modifica el orden de los vértices en lvertices.

ConstruirOtraSolucion(k, i, menorCol, alfa, beta)

lvertices = Lista con los vertices del Grafo
lcolores = Lista de *menorCol* colores ordenados
Mientra no Vacia *lvertices* hacer
versel = PrimerVertice(*lvertices*)
ultcol = PintarVerticeOtro(*versel,k,i,menorCol,lcolores,alfa,beta*)
Si no se puede seguir el coloreo con *menorCol* colores entonces
retornar NO SE PUEDE CONTINUAR EL COLOREO y terminar
Fin Si
Fin Mientras
retornar *ultcol*

PintarVerticeOtro: *Pinta el vértices n. Lcolores es una lista con los colores disponobles (menorCol colores), ordenados de menos a más recientemente usados, colusa es un conjunto con los colores prohibidos para el vértice n, usaestevertice guarda los colores ya asignados a este vértice.*

PintarVerticeOtro(n, k, i, menorCol, lcolores, alfa, beta)

ady = Lista de vertices adyacentes a n
usaestevertice = ∅
Actualizar *colusa* (*i,ady,usaestevertice*)
Para j = 1 hasta *k*
col = BuscoColorOtro(*colusa,j,usaestevertice,lcolores,alfa,beta*)
Si no se encontro color valido entonces

retornar NO SE PUEDE CONTINUAR EL COLOREO y terminar
Fin Si
Agregar *col* en *usaestevertice*
Actualizar*colusa* (*i,ady,usaestevertice*)
Colorcar último en *lcolores* el color *col*
j := j+1
Fin Para
retornar *col*

BuscoColorOtro: *Busca color válido. Colusa es un conjunto con los colores prohibidos, j indica que estamos buscando el j-ésimo color para ese vértice, usaestevertice contine los colores asignados a este vértice, lcolores es una lista con los colores permitidos, ordenados de a más recientemente usados, alfa es la probabilidad con la que decidimos si buscamos otro color válido o nos quedamos con el primero encontrado, beta indica la probabilidad que este segundo color sea buscado del principio de la lista (menos recientemente usado), o del final de la lista (más recientemente usado), col es el color elegido.*

BuscoColorOtro (colusa, j, usaestevertice, lcolores,alfa, beta)
col = DarPrimerColor(*lcolores*)
Mientras (*col* ∈ *colusa* O col ∈ usaestevertice) Y No Fin(*lcolores*) hacer
col = DarProximoColor(*lcolores*)
Fin Mientras
Si Fin(*lcolores*) entonces
retornar NO SE PUEDE CONTINUAR EL COLOREO y terminar
Fin Si
Si random(100) < *alfa* entonces
Si random(100) < *beta* entonces
Si No Fin(*lcolores*) entonces
otrocol = DarProximoColor(*lcolores*)
Mientras (*otrocol*∈*colusa* O *otrocol* ∈ *usaestevertice*) Y
No Fin(*lcolores*) hacer
otrocol = DarProximoColor(*lcolores*)
Fin Mientras
Fin Si
Si Fin(*lcolores*) *otrocol* := 0

Sino

otrocol = DarUltimoColor(*lcolores*)

Mientras (*otrocol* $\in$ colusa O otrocol $\in$ *usaestevertice*) Y No Prim(*lcolores*) hacer

otrocol = DarAnteriorColor(*lcolores*)

Fin Mientras

Si Prim(*lcolores*) entonces *otrocol* := 0

Fin Si

Si *otrocol* $\neq$ 0 entonces *col* := *otrocol*

retornar *col*

Resultados computacionales :

Las heurísticas fueron codificadas en Borland C++ Versión 3.1 y corridas en una PC Pentium de 166 MHz.

Para analizar la eficiencia de las heurísticas desarrolladas y optimizar los valores de los parámetros α y β sobre grafos de distintos tamaños y densidades, se corrieron estas heurísticas sobre grafos generados al azar, con densidades de cantidad de aristas de 100%, 80%, 60%, 40% y 20%, en grafos de 7, 9, 12, 15, 30, 50, 80 ,100 y 150 vértices, efectuando 500 iteraciones en cada corrida. También se analizaron las heurísticas sobre grafos bipartitos, aprovechando que para estos grafos es posible calcular el valor del número k,i-cromático. Los resultados se muestran en las tablas del apéndice A.

En la tablas se puede observar que con la heurística utilizando el "orden el más chico al final", en un gran número de casos obtuvimos mejores resultado que para las otras versiones, aunque se pueden encontrar ejemplos donde esto no es así, como en el grafo g50-2.dat de 50 vértices y con densidad de aristas del 80%. Para la mayoría de los grafos, los mejores resultado se obtuvieron con valores de α de 80% y de β de 40%.

En las tablas también se muestran los resultados obtenidos con estos valores de α y β, (80% y 40% respectivamente), utilizando el "orden el más chico al final" y efectuando 2000 iteraciones en cada corrida de la heurística, a este valor lo llamamos H(G). Los valores óptimos del número k,i-cromático sólo pudieron ser obtenidos para los grafos más pequeños, con valores de k e i chicos. Para la mayoría de los casos, sólo podemos comparar los resultados de las distintas versiones de la heurística.

Los valores de las cotas demostradas anteriormente son mucho mayores que los resultados obtenidos por las heurísticas. En los grafos menos densos este valor es por lo menos 3 veces mayor que el encontrado, y en los más densos llegan a ser 50 veces mayor.

2.9 - Índice k,i-cromático

De forma análoga al número k,i-cromático, podemos definir el ***índice k,i-cromático*** de un grafo G, $\chi'^{i}_{k}(G)$, como la menor cantidad de colores necesaria para asignar k colores a cada arista de G de forma tal que dos aristas que inciden sobre un mismo vértice no compartan más de i colores.

Similarmente a lo que sucede en coloreo, $\chi'^{i}_{k}(G)$ de un grafo G es igual a $\chi^{i}_{k}(L(G))$, donde L(G) es el grafo de líneas de G, definido como: el conjunto de los vértices de L(G) es el conjunto de aristas de G, y dos vértices son adyacentes en L(G) si las aristas que representan en G inciden sobre un mismo vértice. Entonces el k,i-coloreo de aristas es equivalente al k,i-coloreo de vértices de un grafo de líneas.

La cota obvia para el problema tradicional (k=1 e i=0), $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, no se puede generalizar para el nuevo problema. Esta cota equivaldría a saber k,i-colorear los vértices de un grafo completo. Sólo para i = 0, podemos obtener que $\boldsymbol{\chi'^{0}_{k}(G) \geq \Delta(G) * k}$. El problema para i = 0, puede ser visto como el problema tradicional de coloreo de aristas de multigrafos de multiplicidad k, porque si cada arista la duplicamos k-1 veces, k,0-colorear las aristas del grafo original es similar a colorear las aristas del nuevo grafo. Para los grafos bipartitos podemos calcular exactamente el valor de $\chi'^{0}_{k}(G)$.

<u>Teorema 2.9.1</u> : Si G es un grafo bipartito, entonces $\boldsymbol{\chi'^{0}_{k}(G) = k * \Delta(G)}$

Dem.: Las aristas de un gafo bipartito pueden ser particionadas en $\Delta(G)$ matchings. Como las aristas de un mismo matching pueden estar pintadas con el mismo conjunto de colores, si asignamos a cada matching k colores distintos para colorear sus aristas, obtenemos un k,i-coloreo válido de las aristas de G, y entonces $\chi'^{0}_{k}(G) \leq k * \Delta(G)$. −

Capítulo III : Variaciones y generalizaciones del problema de los grafos perfectos

3.1 - Grafos perfectos

Un grafo G se dice **χ-perfecto** si todo subgrafo inducido H de G tiene la propiedad que $\chi(H) = \omega(H)$. Este concepto fue introducido por C. Berge al comienzo de la decáda del 60 [1], y se convirtió en uno de los temas más estudiados de teoría de grafos.

Berge también introdujo otra noción de perfección, usando los parámetros de recubrimiento en cliques y número independiente, y cuantificando sobre todos los subgrafos inducidos. Un grafo G es α-perfecto si para todo subgrafo inducido H de G, $\alpha(H) = \theta(H)$. Más tarde Lovász muestra que esta definición es equivalente a la primera, llamándolos grafos perfectos, resultado conocido como el teorema de Grafos Perfectos: "G es perfecto si y sólo si su complemento es perfecto", conjeturado por Berge.

Los grafos perfectos forman una amplia familia para los cuales existen algoritmos polinomiales para calcular el número cromático y el conjunto independiente máximo. Para los grafos en general estos problemas son NP-Completos.

En el estudio de los grafos perfectos, la estructura y reconocimiento de estos grafos son dos metas fundamentales. En un intento por capturar la estructura de estos grafos y encontrar una buena caracterización ha surgido la siguiente conjetura, propuesta por Berge y que aún no ha sido probada: "G es perfecto si y sólo si ni G ni su complemento contienen como subgrafos inducidos agujeros impares" [1]. La ida de esta conjetura es fácil de chequear, pero la vuelta es un problema abierto y es conocido como la **Conjetura Fuerte de Grafos Perfectos** (CFGP). La demostración de esta conjetura permitiría una simple caracterización de los grafos perfectos. Para su estudio se han producido básicamente dos direcciones, no completamente separadas. Una estudia la estructura de los grafos críticamente imperfectos, que son grafos no perfectos pero que todo subgrafo inducido propio es perfecto, y la otra prueba la conjetura con alguna hipótesis adicional. A pesar del esfuerzo realizado hasta este momento, sólo ha sido probada para algunas clases especiales de grafos, como por ejemplo grafos arcocirculares, sin K_4, sin K_4-{e}, planares, sin $K_{1,3}$, 3-cromáticos, con grado máximo a lo sumo 6.

Por otro lado, el reconocimiento de grafos perfectos se ha mostrado que está en co-NP, aunque no se sabe si el problema es tratable o intratable [14].

Algunas clases de grafos que son perfectos: grafos bipartitos, grafos líneas de bipartitos, de comparabilidad, triangulados, de intervalo, de permutación, split, de Meyniel.

3.2 - Grafos k,i-perfectos

Utilizando la nueva definición de número k,i-cromático, generalizaremos el problema de grafos perfectos.

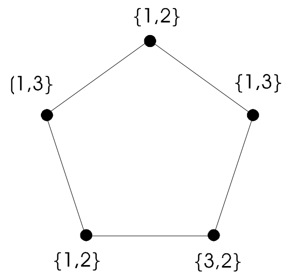
Dados dos enteros $k \geq i \geq 0$, definimos el número k,i-clique de un grafo G, $\omega_k^i(G)$, como el número k,i-cromático de una clique máxima de G, $\omega_k^i(G) = \chi_k^i(C)$, donde C es una clique máxima de G.

A un grafo G lo llamamos k,i-perfecto si y sólo si para todo subgrafo inducido H de G, $\chi_k^i(H) = \omega_k^i(H)$. El caso $i = k$ no tiene interés, porque todos los grafos son k,k-perfectos. Claramente, los grafos completos son k,i-perfectos para todo par k, i.Como el número 1,0-cromático coincide con el número cromático y el número 1,0-clique con el número clique, los grafos perfectos coinciden con los 1,0-perfectos, y el siguiente teorema nos da un resultado más general.

Teorema 3.2.1 : Si G es perfecto, entonces G es k,i-perfecto para todo par de enteros positivos k, i

Dem.: Para k,i-colorear una clique máxima de H, necesitamos $\omega_k^i(H)$. Como $\chi(H) = \omega(H)$, todos los colores de un coloreo óptimo C, aparecen en un vértice de toda clique máxima. Entonces al k,i-colorear una clique máxima, estamos asignando k colores a cada color c de C. Estos k colores pueden ser asignados a todos los vértices que tenían el color original c en C. De esta forma vemos que si $\chi(H) = \omega(H)$, entonces $\chi_k^i(H) = \omega_k^i(H)$. Como G es perfecto, para todo H subgrafo inducido de G, $\chi(H) = \omega(H)$, y entonces $\chi_k^i(H) = \omega_k^i(H)$ para todo H subgrafo inducido de G. −

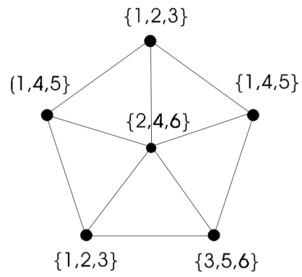
Para pares de enteros k, i, existen grafos k,i-perfectos que no son perfectos, por ejemplo C_5 es 2,1-perfecto pero no es perfecto y el grafo G es 3,1-perfecto y no perfecto.



C_5

$\chi(C_5) = 3$ - $\omega(C_5) = 2$

$\chi_2^1(C_5) = 3$ - $\omega_2^1(C_5) = 3$



G

$\chi(G) = 4$ - $\omega(G) = 3$

$\chi_3^1(G) = 6$ - $\chi_3^1(G) = 6$

Plantearemos una conjetura que intenta caracterizar los grafos k,0-perfectos a partir de subgrafos prohibidos, para eso es necesario el siguiente lema.

<u>Lema 3.2.2</u> : Para todo entero k≥0, los agujeros impares y sus complementos no son k,0-perfecto

Dem.: Para los agujeros impares, $\omega_k^0(C_{2*j+1}) = 2 * k$ y $\chi_k^0(C_{2*j+1}) > 2 * k$, porque si fuera 2 * k, si llamamos $v_1,...,v_{2*j+1}$ al agujero, y 1 a k a los colores de v_1, necesariamente deberíamos pintar los vértices pares con los colores 1 a k y los impares con los colores k+1 a 2*k, pero los vértices v_1 y v_{2*j+1} no pueden estar pintados con los mismos colores.

Para los complementos de los agujeros impares, $\omega_k^0(\overline{C_{2*j+1}}) = k * j$ y $\chi_k^0(\overline{C_{2*j+1}}) > k * j$, porque los vértices impares del circuito, $v_1,v_3,..,v_{2*j-1}$, forman una clique máxima en $\overline{C_{2*j+1}}$, y si el número k,0-cromático fuese k * j, tendríamos que colorear al vértice v_1 por ejemplo con los colores 1 a k, al v_3 con los colores k+1 a 2*k, y así todos los vértices de esta clique máxima, v_{2*j-1} tendría asignado los colores (j-1)*k hasta el j*k. El vértice v_{2*j+1}, como es adyacente a todos los vértices menos al v_1, debería tener los colores 1 a k, entonces el v_2 deberá tener los colores k+1 hasta 2*k, y así sucesivamente hasta el v_{2*j-2}, que deberá tener los colores (j-1)*k hasta el j*k. Sólo falta colorear el vértice v_{2*j}, pero todos los colores ya están asignados a algún vértice adyacente a v_{2*j}, entonces no podemos colorear este vértice. −

<u>Conjetura 3.2.3</u> : Un grafo G es k,0-perfecto para algún k≥2 si y sólo si G es perfecto

La ida de esta conjetura es fácil de ver. Si $\chi(G) = \omega(G)$, entonces $\chi_k^0(H) = \omega_k^0(G)$ y entonces los grafos perfectos son k,0-perfectos para todo k. Podríamos demostrar la vuelta si fuera verdad la Conjetura Fuerte de Grafos Perfectos. Si G es k,0-perfecto pero no es perfecto y valiese la CFGP, G debe tener como subgrafo inducido a un agujero impar o su complemento, pero por el lema anterior, estos grafos no son k,0-perfectos para todo k, generando un absurdo.

Podemos re-escribir esta conjetura como:

Conjetura 3.2.4 : Un grafo G es j,0-perfecto para algún entero positivo j si y sólo si es k,0-perfecto para todo entero k ≥ 0

Utilizando esto, generalizamos la CFGP, intentando caracterizar los grafos k,0-perfectos a partir de subgrafos prohibidos.

Conjetura 3.2.5 : G es k,0-perfecto para algún k≥0 (o para todo k≥0) si y sólo si G no contiene como subgrafos inducidos agujeros impares ni sus complementos

3.3 - Grafos β-perfectos

Gasparian, Markosian y Reed [19] definieron **$\beta(G)$ = máx {$\delta(H)$ / H es subgrafo inducido de G} + 1**, y llamaron a un grafo G **β-perfecto** si y sólo si para todo H, subgrafo inducido de G, $\beta(H) = \chi(H)$. Los mismos autores demostraron cierto paralelismo entre estos grafos y los grafos perfectos.

El reconocimiento de grafos β-perfectos está en CO-NP [19], y es un problema abierto. Es de interés determinar exactamente cuáles grafos son β-perfectos, diseñar algoritmos polinomiales para su reconocimiento o demostrar la NP-completitud del problema, y caracterizar estos grafos en términos de subgrafos inducidos prohibidos.

Algunas propiedades de los grafos β-perfectos son [19] [12]:

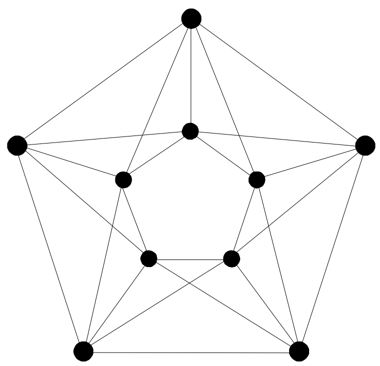
Propiedad 3.3.1 : $\beta(G) \geq \chi(G)$ para todo grafo G; utilizando el algoritmo goloso para coloreo de vértices con los vértices de G ordenados según un orden el más pequeño al final, obtenemos esta cota para la cantidad de colores utilizados.

Propiedad 3.3.2 : Un grafo G es perfecto y β-perfecto si y sólo si es triangulado.

Propiedad 3.3.3 : Todo grafo β-perfecto no contiene como subgrafo inducidos agujeros pares, porque $\beta(C_{2*j}) = 3$ y $\chi(C_{2*j}) = 2$.

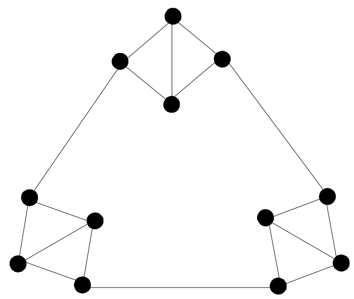
Propiedad 3.3.4 : Algunos grafos sin agujeros pares no son β-perfectos, como por ejemplo:

H



$\beta(H) = 6$ - $\chi(H) = 5$

G



$\beta(G) = 4$ - $\chi(G) = 3$

Propiedad 3.3.5 : Un grafo G puede ser perfecto y su complemento no serlo, como por ejemplo C_4.

Propiedad 3.3.6 : un grafo G y su complemento son ambos β-perfectos si y sólo si ni G ni $\overline{G}$ contienen como subgrafos inducidos agujeros pares. Esto es una analogía con la conjetura de Berge.

Propiedad 3.3.7 : Si G es un grafo en el cual todo ciclo impar de más de 3 vértices contiene al menos 2 cuerdas, entonces g es β-perfecto.

Propiedad 3.3.8 : Si G no contiene como subgrafos inducidos agujeros pares, diamantes (K_4-e) ni copas (agujero de 6 vértices con exactamente una cuerda corta) entonces G es β-perfecto.

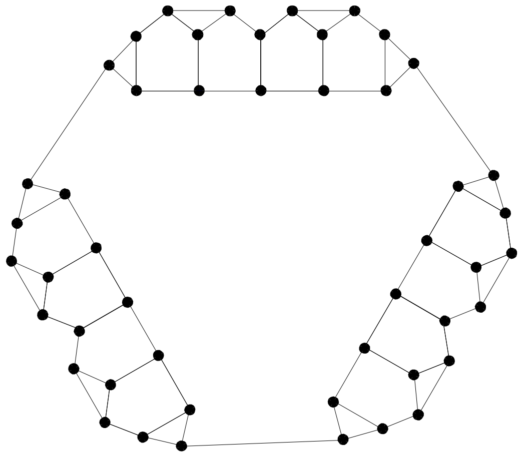
G se dice mínimamente β-imperfecto si G no es β-perfecto y todo subgrafo inducido propio de G es β-perfecto.

Propiedad 3.3.9 : Si G es minimamente β-imperfecto contiene un vértice simplicial.

Propiedad 3.3.10 : Si G es minimamente β-imperfecto sin agujeros pares, no contiene vértices de grado menor o igual a 2.

En [12] se presenta una conjetura que intenta definir una nueva clase de grafos β-perfectos. Aquí veremos que esta conjetura es falsa y enunciaremos algunas propiedades que surgieron de su estudio.

Herrera de Figueiredo y Vuškovic conjeturan [12]: Si G no contiene como subgrafos inducidos agujeros pares ni diamantes entonces G es β-perfecto. Con el siguiente grafo vemos que esta conjetura es falsa. G no contiene agujeros pares ni diamantes, pero $\beta(G) = 4$ y $\chi(G) = 3$.



G

<u>Proposición 3.3.11</u> : $\beta(G) -1 \leq \beta(G-\{v\}) \leq \beta(G)$ para todo vértice v de G

Dem.: Si H es subgrafo de G, entonces $\beta(H) \leq \beta(G)$.

Sea $\beta(G) = k$, y suponemos que $\beta(G-\{v\}) = k-2$.

Si existe H subgrafo inducido de G tal que $\delta(H) = k-1$ y $v \notin H$, entonces como H también es subgrafo inducido de $G-\{v\}$, $\beta(G-\{v\}) = \beta(G)$.

Si $v \in H$, para todo subgrafo inducido H de G tal que $\delta(H) = k-1$, si existe $u \neq v$ de grado mínimo, entonces el grado de u en $H-\{v\}$ es a lo sumo uno menos que el grado en H, entonces $\beta(G-\{v\}) \geq k - 1$.

Si v es el único vértice de grado mínimo en H, $\delta(H) \leq \delta(H-\{v\})$, pero como H define $\beta(G)$, no puede otro subgrafo de G tener menor grado mínimo, entonces $\delta(H) = \delta(H-\{v\})$. Pero esto es absurdo, porque supusimos que para todo T que definía $\beta(G)$, $v \in T$. −

<u>Proposición 3.3.12</u> : Si G es mínimamente β-imperfecto, entonces:

- **$\beta(G) = \delta(G) + 1$**
- **$\chi(G) = \delta(G)$**
- **$\chi(G-\{v\}) = \chi(G)$ para todo v vértice de G**
- **$\beta(G) = \beta(G-\{v\}) + 1$ para todo v vértice de G**

Dem.: G mínimamente β-imperfecto. Entonces:

$\chi(G-\{v\}) \leq \chi(G) < \beta(G) \leq \beta(G-\{v\}) + 1$, pero $\beta(G-\{v\}) = \chi(G-\{v\})$, porque $G-\{v\}$ es β-perfecto. Entonces, para cumplirse el <, los ≤ deben ser igualdades: $\chi(G-\{v\}) = \chi(G) < \beta(G) = \beta(G-\{v\}) + 1$

Como $\beta(G) < \beta(H)$ para todo H subgrafo inducido de G (porque $\beta(G) = \beta(G\text{-}v\})$ + 1), entonces a $\beta(G)$ lo debe definir el grado mínimo de G, $\beta(G) = \delta(G) + 1$. −

<u>Proposición 3.3.13</u> : Si para todo H subgrafo inducido de G, existe vértice v tal que $\chi(H) > \chi(H\text{-}\{v\})$, entonces G es β-perfecto

Dem.: G es β-perfecto si no existe H subgrafo inducido de G, tal que H es minimamente β-imperfecto. Si existe v perteneciente a H tal que $\chi(H) > \chi(H\text{-}\{v\})$, entonces H no puede ser β-imperfecto. −

Capítulo IV : Conclusiones y posibles extensiones

En este trabajo se definió una nueva generalización del problema de coloreo de grafos, problema de k,i-coloreo, que surgió a partir de la necesidad de modelar problemas reales. Se estudiaron sus propiedades, se demostró la NP-Completitud del problema para un caso particular de valores de i, y también se propusieron heurísticas para resolver este problema.

La heurística que mostró mejor compartamiento es la que ordena los vértices para ser coloreados con orden el más chico al final. Los valores de los parámetros que optimizaron los resultados son $\alpha = 80\%$ y $\beta = 40\%$. Los resultados obtenidos por las heurísticas son cercanos a las cotas calculadas, teniendo en cuenta que en los grafos de mayor tamaño estas cotas empeoran notablemente, en muchos de los casos se encontró el valor óptimo. No se manifestó diferencia en el comportamiento de las heurísticas para las distintas densidades de aristas de los grafos. Al aumentar la cantidad de iteraciones de 500 a 2000 no se notaron mejorías significativas.

En base a esta nueva definición, se presentó también una generalización del problema de los grafos perfectos.

El trabajo comenzado en esta tesis puede ser continuado analizando la NP-Completitud para el problema de k,i-coloreo en general y la generalización del teorema de Brooks. También es interesante determinar cuales grafos son k,i-perfectos para valores dados de k e i, diseñar un algoritmo polinomial para su reconocimiento o demostrar su NP-Completitud y caracterizar estos grafos en terminos de subgrafos prohibidos.

Otro trabajo posible es analizar la implementación de un algoritmo tipo *branch and cut* para resolver el problema de k,i-coloreo en forma exacta o conseguir buenas cotas para instancias de mayor dimensión,

Apéndice A:

H(G) es el valor obtenido para $\alpha = 80\%$ y $\beta = 40\%$, utilizando el "orden el más chico al final" y efectuando 2000 iteraciones en cada corrida de la heurística. Las cotas del número k,i-cromático se obtuvieron para los grafos de 7 y 9 vértices y par g12-5.dat utilizando el modelo de programación entera. Para el resto de los grafos se acotó utilizando el hecho de que incluyen un K_2 y K_3 en el caso de los completos.

Grafos de 7 vértices:

G = g7-1.dat - densidad = 100% - k = 8 - i = 3 - $\chi_8^3(G) \geq 15$ - H(G) = 18

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 19

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	19	19	18	18	19
20	19	19	19	19	18	18
40	19	19	19	19	18	19
60	19	19	19	19	19	18
80	19	19	19	19	19	19
100	19	19	19	19	19	19

De mayor a menor grado:
Sol Greedy: 19

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	19	19	19	18	19
20	19	19	19	18	18	18
40	19	19	19	19	19	18
60	19	19	19	19	18	18
80	19	19	19	19	19	19
100	19	19	19	19	19	19

El más chico al final:
Sol Greedy: 19

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	19	19	19	18	19
20	19	19	18	19	18	18
40	19	19	19	19	18	19
60	19	19	19	19	19	19
80	19	19	19	19	19	19
100	19	19	19	19	19	19

G = g7-2.dat - densidad = 80% - k = 5 - i = 3 - $\chi_5^3(G) = 8$ - H(G) = 8

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 9

β\α	0	20	40	60	80	100
0	9	8	8	8	8	9
20	9	8	8	8	8	8
40	9	8	8	8	8	8
60	9	8	8	8	8	8
80	9	8	8	8	8	8
100	9	8	8	8	8	9

De mayor a menor grado:
Sol Greedy: 8

β\α	0	20	40	60	80	100
0	8	8	8	8	8	8
20	8	8	8	8	8	8
40	8	8	8	8	8	8
60	8	8	8	8	8	8
80	8	8	8	8	8	8
100	8	8	8	8	8	8

El más chico al final:
Sol. Greedy: 9

β\α	0	20	40	60	80	100
0	9	8	8	8	8	9
20	9	8	8	8	8	8
40	9	8	8	8	8	8
60	9	8	8	8	8	8
80	9	8	8	8	8	8
100	9	8	8	8	8	9

G = g7-3.dat - densidad = 60% - k = 10 - i = 3 - $\chi_{10}^3(G) \geq 19$ - H(G) = 22

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 25

β\α	0	20	40	60	80	100
0	25	25	24	23	23	25
20	25	25	24	22	23	23
40	25	25	24	24	23	22
60	25	25	25	24	24	23
80	25	25	25	25	25	24
100	25	25	25	25	25	25

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 24

β\α	0	20	40	60	80	100
0	24	24	22	22	22	24
20	24	24	22	22	22	22
40	24	24	22	22	22	22
60	24	24	24	22	22	22
80	24	24	24	24	23	22
100	24	24	24	24	24	24

El más chico al final:
Sol. Greedy: 22

β\α	0	20	40	60	80	100
0	22	22	22	22	22	22
20	22	22	22	22	22	22
40	22	22	22	22	22	22
60	22	22	22	22	22	22
80	22	22	22	22	22	22
100	22	22	22	22	22	22

G = g7-4.dat - densidad = 40% - k = 11 - i = 7 - $\chi_{11}^7(G) = 15$ - H(G) = 15

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 18

β\α	0	20	40	60	80	100
0	18	16	15	15	15	15
20	18	15	15	15	15	15
40	18	16	15	15	15	15
60	18	16	15	15	15	15
80	18	16	16	16	16	15
100	18	16	16	16	16	17

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	15	15	15	15	15
20	15	15	15	15	15	15
40	15	15	15	15	15	15
60	15	15	15	15	15	15
80	15	15	15	15	15	15
100	15	15	15	15	15	15

El más chico al final:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	15	15	15	15	15
20	15	15	15	15	15	15
40	15	15	15	15	15	15
60	15	15	15	15	15	15
80	15	15	15	15	15	15
100	15	15	15	15	15	15

G = g7-5.dat - densidad = 20% - k = 15 - i = 5 - $\chi_{15}^{5}(G) = 25$ - H(G) = 25

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 25

β\α	0	20	40	60	80	100
0	25	25	25	25	25	25
20	25	25	25	25	25	25
40	25	25	25	25	25	25
60	25	25	25	25	25	25
80	25	25	25	25	25	25
100	25	25	25	25	25	25

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 25

β\α	0	20	40	60	80	100
0	25	25	25	25	25	25
20	25	25	25	25	25	25
40	25	25	25	25	25	25
60	25	25	25	25	25	25
80	25	25	25	25	25	25
100	25	25	25	25	25	25

El más chico al final:
Sol. Greedy: 25

β\α	0	20	40	60	80	100
0	25	25	25	25	25	25
20	25	25	25	25	25	25
40	25	25	25	25	25	25
60	25	25	25	25	25	25
80	25	25	25	25	25	25
100	25	25	25	25	25	25

Grafos de 9 vértices:

G = g9-1.dat - densidad = 100% - k = 7 - i = 2 - $\chi(G) \geq 15$ - H(G) = 20

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy:21

β\α	0	20	40	60	80	100
0	21	21	21	21	21	21
20	21	21	21	21	21	21
40	21	21	21	21	21	21
60	21	21	21	21	21	21
80	21	21	21	21	21	21
100	21	21	21	21	21	21

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 21

β\α	0	20	40	60	80	100
0	21	21	21	21	20	21
20	21	21	21	21	20	21
40	21	21	21	21	21	21
60	21	21	21	21	21	21
80	21	21	21	21	21	21
100	21	21	21	21	21	21

El más chico al final:
Sol. Greedy: 21

β\α	0	20	40	60	80	100
0	21	21	21	21	21	21
20	21	21	21	20	20	20
40	21	21	21	21	21	20
60	21	21	21	21	21	20
80	21	21	21	21	21	21
100	21	21	21	21	21	21

G = g9-2.dat - densidad = 80% - k = 8 - i = 6 - $\chi(G) = 10$ - H(G) = 11

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	11	11	11	11	12
20	12	11	11	11	11	11
40	12	11	11	11	11	11
60	12	11	11	11	11	11
80	12	11	11	11	11	11
100	12	11	11	11	11	12

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	11	11	11	11	12
20	12	11	11	11	11	11
40	12	11	11	11	11	11
60	12	11	11	11	11	11
80	12	11	11	11	11	11
100	12	11	11	11	11	12

El más chico al final:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	11	11	11	11	12
20	12	11	11	11	11	11
40	12	11	11	11	11	11
60	12	11	11	11	11	11
80	12	11	11	11	11	11
100	12	11	11	11	11	12

G = g9-3.dat - densidad = 60% - k = 10 - i = 2 - $\chi(G) \geq 18$ - H(G) = 28

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 30

β\α	0	20	40	60	80	100
0	30	30	29	28	29	30
20	30	30	30	29	29	29
40	30	30	30	30	29	29
60	30	30	30	30	29	29
80	30	30	30	30	30	30
100	30	30	30	30	30	30

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 30

β\α	0	20	40	60	80	100
0	30	30	29	29	30	30
20	30	30	29	29	29	29
40	30	30	30	29	29	29
60	30	30	30	30	29	29
80	30	30	30	30	30	29
100	30	30	30	30	30	30

El más chico al final:
Sol. Greedy: 30

β\α	0	20	40	60	80	100
0	30	29	28	28	28	28
20	30	29	28	28	28	28
40	30	30	28	28	28	28
60	30	30	29	28	28	28
80	30	30	30	30	29	29
100	30	30	30	30	30	30

G = g9-4.dat - densidad = 40% - k = 6 - i = 1 - $\chi(G) \geq 11$- H(G) = 18

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy:18

β\α	0	20	40	60	80	100
0	18	18	18	18	18	18
20	18	18	18	18	18	18
40	18	18	18	18	18	18
60	18	18	18	18	18	18
80	18	18	18	18	18	18
100	18	18	18	18	18	18

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 18

β\α	0	20	40	60	80	100
0	18	18	18	18	18	18
20	18	18	18	18	18	18
40	18	18	18	18	18	18
60	18	18	18	18	18	18
80	18	18	18	18	18	18
100	18	18	18	18	18	18

El más chico al final:
Sol. Greedy: 18

β\α	0	20	40	60	80	100
0	18	18	18	18	18	18
20	18	18	18	18	18	18
40	18	18	18	18	18	18
60	18	18	18	18	18	18
80	18	18	18	18	18	18
100	18	18	18	18	18	18

G = g9-5.dat - densidad = 20% - k = 9 - i = 6 - $\chi(G)$ = 12 - H(G) = 12

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	12	12	12	12	12
20	12	12	12	12	12	12
40	12	12	12	12	12	12
60	12	12	12	12	12	12
80	12	12	12	12	12	12
100	12	12	12	12	12	12

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy:12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	12	12	12	12	12
20	12	12	12	12	12	12
40	12	12	12	12	12	12
60	12	12	12	12	12	12
80	12	12	12	12	12	12
100	12	12	12	12	12	12

El más chico al final:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	12	12	12	12	12
20	12	12	12	12	12	12
40	12	12	12	12	12	12
60	12	12	12	12	12	12
80	12	12	12	12	12	12
100	12	12	12	12	12	12

Grafos de 12 vértices:

G = g12-1.dat - densidad = 100% - k = 10 - i = 8 - $\chi(G) \geq 12$ - H(G) = 13

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 16

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	13	13	13	13	16
20	15	13	13	13	13	13
40	15	13	13	13	13	13
60	15	13	13	13	13	13
80	15	13	13	13	13	13
100	15	13	13	13	13	16

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 16

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	13	13	13	13	16
20	15	13	13	13	13	13
40	15	13	13	13	13	13
60	15	13	13	13	13	13
80	15	13	13	13	13	13
100	15	13	13	13	13	16

El más chico al final:
Sol. Greedy:16

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	13	13	13	13	16
20	15	13	13	13	13	13
40	15	13	13	13	13	13
60	15	13	13	13	13	13
80	15	13	13	13	13	13
100	15	13	13	13	13	16

G = g12-2.dat - densidad = 80% - k = 9 - i = 6 - $\chi(G) \geq 12$ - H(G) = 14

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 21

β\α	0	20	40	60	80	100
0	16	14	14	14	14	18
20	16	14	14	14	14	14
40	16	14	14	14	14	14
60	16	14	14	14	14	14
80	16	14	14	14	14	14
100	16	15	14	14	14	17

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 18

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	14	14	14	14	18
20	15	14	14	14	14	14
40	15	14	14	14	14	14
60	15	14	14	14	14	14
80	15	14	14	14	14	14
100	15	15	14	14	14	16

El más chico al final:
Sol. Greedy: 19

β\α	0	20	40	60	80	100
0	16	14	14	14	14	18
20	16	14	14	14	14	14
40	16	14	14	14	14	14
60	16	14	14	14	14	14
80	16	14	14	14	14	14
100	16	14	14	14	14	17

G = g12-3.dat - densidad = 60% - k = 11 - i = 7 - $\chi(G) \geq 15$ - H(G) = 17

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 19

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	17	18	17	17	19
20	19	18	18	18	17	17
40	19	17	17	17	17	17
60	19	17	18	18	18	17
80	19	18	18	18	18	17
100	19	19	18	18	18	19

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 19

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	18	18	17	17	19
20	19	18	18	17	17	17
40	19	18	18	17	17	17
60	19	18	17	18	17	18
80	19	18	18	18	17	17
100	19	19	19	18	18	19

El más chico al final:
Sol. Greedy: 19

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	17	17	17	18	19
20	19	18	17	17	17	17
40	19	17	17	17	17	17
60	19	18	18	17	17	17
80	19	18	18	17	17	17
100	19	19	18	17	17	19

G = g12-4.dat - densidad = 40% - k = 9 - i = 3 - $\chi(G) \geq 15$ - H(G) = 19

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 24

β\α	0	20	40	60	80	100
0	24	22	20	20	20	21
20	24	22	21	20	21	20
40	24	22	22	21	20	20
60	24	22	22	21	21	20
80	24	23	22	21	21	21
100	24	23	23	23	22	24

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 24

β\α	0	20	40	60	80	100
0	24	20	19	20	20	21
20	24	19	20	19	20	20
40	24	20	19	20	20	19
60	24	20	20	20	20	19
80	24	21	21	20	20	20
100	24	23	23	22	22	24

El más chico al final:
Sol. Greedy: 21

β\α	0	20	40	60	80	100
0	21	19	19	19	20	21
20	21	19	19	19	19	20
40	21	19	19	19	19	19
60	21	19	19	19	19	19
80	21	19	19	19	19	19
100	21	21	21	21	21	21

G = g12-5.dat - densidad = 20% - k = 10 - i = 4 - $\chi(G) \geq 17$ - H(G) = 18

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 20

β\α	0	20	40	60	80	100
0	20	19	18	18	18	20
20	20	19	18	18	18	18
40	20	20	19	18	18	18
60	20	20	19	19	19	18
80	20	20	20	19	19	19
100	20	20	20	20	20	20

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 20

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	18	18	19	18	18
20	19	18	18	18	19	18
40	19	18	18	18	18	18
60	19	18	18	18	18	18
80	19	18	18	18	18	18
100	19	18	18	18	18	20

El más chico al final:
Sol. Greedy: 18

β\α	0	20	40	60	80	100
0	18	18	18	18	18	18
20	18	18	18	18	18	18
40	18	18	18	18	18	18
60	18	18	18	18	18	18
80	18	18	18	18	18	18
100	18	18	18	18	18	18

Grafos de 15 vértices:

G = g15-1.dat - densidad = 100% - k = 7 - i = 4 - $\chi(G) \geq 10$ - H(G) = 14

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	14	14	14	14	15
20	15	14	14	14	14	14
40	15	14	14	14	14	14
60	15	14	14	14	14	14
80	15	14	14	14	14	14
100	15	14	13	14	14	15

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	14	14	14	14	15
20	15	14	14	14	14	14
40	15	14	14	14	14	14
60	15	14	13	14	14	14
80	15	14	14	13	14	14
100	15	13	13	14	14	15

El más chico al final:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	14	14	14	14	15
20	15	14	14	14	14	14
40	15	14	14	14	14	14
60	15	14	14	14	14	14
80	15	14	14	14	14	14
100	15	13	13	13	14	15

G = g15-2.dat - densidad = 80% - k = 12 - i = 9 - $\chi(G) \geq 15$ - H(G) = 17

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 21

β\α	0	20	40	60	80	100
0	18	17	17	17	17	21
20	18	17	17	17	17	17
40	18	17	17	17	17	17
60	18	17	17	17	17	17
80	18	17	17	17	17	17
100	18	18	17	17	17	19

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 21

β\α	0	20	40	60	80	100
0	18	17	17	17	17	21
20	18	17	17	17	17	17
40	18	17	17	17	17	17
60	18	17	17	17	17	17
80	18	17	17	17	17	17
100	18	18	17	17	17	19

El más chico al final:
Sol. Greedy: 18

β\α	0	20	40	60	80	100
0	18	17	17	17	17	18
20	18	17	17	17	17	17
40	18	17	17	17	17	17
60	18	17	17	17	17	17
80	18	17	17	17	17	17
100	18	18	17	17	17	18

G = g15-3.dat - densidad = 60% - k = 10 - i = 8 - $\chi_{10}^{8}(G) \geq 12$ - H(G) = 13

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 14

β\α	0	20	40	60	80	100
0	14	13	13	13	13	14
20	14	13	13	13	13	13
40	14	13	13	13	13	13
60	14	13	13	13	13	13
80	14	13	13	13	13	13
100	14	13	13	13	13	14

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 16

β\α	0	20	40	60	80	100
0	14	13	13	13	13	16
20	14	13	13	13	13	13
40	14	13	13	13	13	13
60	14	13	13	13	13	13
80	14	13	13	13	13	13
100	14	13	13	13	13	15

El más chico al final:
Sol. Greedy: 14

β\α	0	20	40	60	80	100
0	14	13	13	13	13	14
20	14	13	13	13	13	13
40	14	13	13	13	13	13
60	14	13	13	13	13	13
80	14	13	13	13	13	13
100	14	13	13	13	13	14

G = g15-4.dat - densidad = 40% - k = 6 - i = 3 - $\chi(G) \geq 9$ - H(G) = 11

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	11	11	11	12	15
20	12	11	11	11	12	11
40	12	12	12	11	12	11
60	12	11	12	11	11	11
80	12	11	12	12	11	11
100	12	12	12	12	12	13

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	12	11	11	11	12
20	12	11	11	11	11	11
40	12	11	11	11	11	11
60	12	12	11	11	11	11
80	12	12	12	11	11	11
100	12	12	12	11	11	12

El más chico al final:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	13	11	11	11	12	15
20	13	11	11	11	11	12
40	13	11	11	11	11	11
60	13	11	11	11	11	11
80	13	11	11	11	11	11
100	13	11	11	11	11	14

G = g15-5.dat - densidad = 20% - k = 9 - i = 7 - $\chi_9^7(G) = 11$ - H(G) = 11

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	11	11	11	11	11	12
20	11	11	11	11	11	11
40	11	11	11	11	11	11
60	11	11	11	11	11	11
80	11	11	11	11	11	11
100	11	11	11	11	11	12

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 11

β\α	0	20	40	60	80	100
0	11	11	11	11	11	11
20	11	11	11	11	11	11
40	11	11	11	11	11	11
60	11	11	11	11	11	11
80	11	11	11	11	11	11
100	11	11	11	11	11	11

El más chico al final:
Sol. Greedy: 11

β\α	0	20	40	60	80	100
0	11	11	11	11	11	11
20	11	11	11	11	11	11
40	11	11	11	11	11	11
60	11	11	11	11	11	11
80	11	11	11	11	11	11
100	11	11	11	11	11	11

Grafos de 30 vértices:

G = g30-1.dat - densidad = 100% - k = 10 - i = 3 - $\chi_{10}^3(G) \geq 21$ - H(G) = 40

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 44

β\α	0	20	40	60	80	100
0	44	42	41	40	41	44
20	44	42	41	42	42	41
40	44	42	42	41	42	41
60	44	42	41	42	42	41
80	44	42	42	42	42	41
100	44	41	42	42	41	44

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 44

β\α	0	20	40	60	80	100
0	44	42	42	41	42	44
20	44	42	41	42	42	41
40	44	42	41	41	41	41
60	44	41	41	41	42	41
80	44	42	41	42	42	41
100	44	41	41	41	41	44

El más chico al final:
Sol. Greedy: 44

β\α	0	20	40	60	80	100
0	44	42	41	41	42	44
20	44	42	42	41	41	41
40	44	42	42	41	42	40
60	44	41	42	42	41	41
80	44	41	42	41	42	41
100	44	41	41	41	41	44

G = g30-2.dat - densidad = 80% - k = 8 - i = 4 - $\chi_8^4(G) \geq 12$ - H(G) = 19

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 32

β\α	0	20	40	60	80	100
0	25	20	20	20	20	32
20	25	20	20	20	20	20
40	25	20	20	20	20	20
60	25	20	20	19	20	20
80	25	19	19	20	20	20
100	25	19	19	20	20	26

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 32

β\α	0	20	40	60	80	100
0	29	19	19	20	20	28
20	29	19	19	19	20	20
40	29	19	19	19	19	19
60	29	19	19	19	19	20
80	29	19	19	19	20	20
100	29	19	19	19	19	30

El más chico al final:
Sol. Greedy: 28

β\α	0	20	40	60	80	100
0	25	19	19	20	20	28
20	25	19	20	20	19	20
40	25	19	19	20	20	19
60	25	19	20	20	19	20
80	25	19	19	19	19	20
100	25	19	19	19	19	26

G = g30-3.dat - densidad = 60% - k = 15 - i = 10 - $\chi(G) \geq 20$ - H(G) = 25

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 35

β\α	0	20	40	60	80	100
0	31	26	25	25	25	35
20	31	25	25	25	25	25
40	31	25	26	25	25	25
60	31	25	25	25	25	25
80	31	25	25	25	25	25
100	31	25	25	25	25	32

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 35

β\α	0	20	40	60	80	100
0	31	25	25	25	25	35
20	31	25	25	25	25	25
40	31	25	25	25	25	25
60	31	25	25	25	25	25
80	31	25	25	25	25	25
100	31	25	25	25	25	32

El más chico al final:
Sol. Greedy: 35

β\α	0	20	40	60	80	100
0	31	25	25	25	25	35
20	31	25	25	25	25	25
40	31	25	25	25	25	25
60	31	25	25	25	25	25
80	31	25	25	25	25	25
100	31	25	25	25	25	32

G = g30-4.dat - densidad = 40% - k = 6 - i = 5 - $\chi(G) \geq 7$ - H(G) = 8

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 8

β\α	0	20	40	60	80	100
0	8	8	8	8	8	8
20	8	8	8	8	8	8
40	8	8	8	8	8	8
60	8	8	8	8	8	8
80	8	8	8	8	8	8
100	8	8	8	8	8	8

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 8

β\α	0	20	40	60	80	100
0	8	8	8	8	8	8
20	8	8	8	8	8	8
40	8	8	8	8	8	8
60	8	8	8	8	8	8
80	8	8	8	8	8	8
100	8	8	8	8	8	8

El más chico al final:
Sol. Greedy: 8

β\α	0	20	40	60	80	100
0	8	8	8	8	8	8
20	8	8	8	8	8	8
40	8	8	8	8	8	8
60	8	8	8	8	8	8
80	8	8	8	8	8	8
100	8	8	8	8	8	8

G = g30-5.dat - densidad = 20% - k = 8 - i = 6 - $\chi(G) \geq 10$ - H(G) = 11

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	11	11	11	11	12
20	12	11	11	11	11	11
40	12	11	11	11	11	11
60	12	11	11	11	11	11
80	12	11	11	11	11	11
100	12	11	11	11	11	12

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	11	11	11	11	12
20	12	11	11	11	11	11
40	12	11	11	11	11	11
60	12	11	11	11	11	11
80	12	11	11	11	11	11
100	12	11	11	11	11	12

El más chico al final:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	11	11	11	11	12
20	12	11	11	11	11	11
40	12	11	11	11	11	11
60	12	11	11	11	11	11
80	12	11	11	11	11	11
100	12	11	11	11	11	12

Grafos de 50 vértices:

G = g50-1.dat - densidad = 100% - k = 8 - i = 3 - $\chi_8^3(G) \geq 15$ - H(G) = 31

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 34

β\α	0	20	40	60	80	100
0	34	32	32	32	32	34
20	34	31	32	32	32	32
40	34	31	32	32	32	32
60	34	32	32	32	32	31
80	34	32	32	32	32	32
100	34	32	31	32	32	34

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 34

β\α	0	20	40	60	80	100
0	34	32	32	32	32	34
20	34	32	32	32	32	32
40	34	32	32	32	32	31
60	34	32	32	32	32	32
80	34	32	32	32	32	32
100	34	32	32	31	32	34

El más chico al final:
Sol. Greedy: 34

β\α	0	20	40	60	80	100
0	34	32	32	32	32	34
20	34	32	32	32	32	31
40	31	32	32	32	32	32
60	34	32	32	32	31	32
80	34	32	32	32	32	32
100	34	32	32	32	32	34

G = g50-2.dat - densidad = 80% - k = 10 - i = 1 - $\chi_{10}^1(G) \geq 19$ - H(G) = 90

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 89

β\α	0	20	40	60	80	100
0	89	89	89	89	89	89
20	89	89	89	89	89	89
40	89	89	89	89	89	89
60	89	89	89	89	89	89
80	89	89	89	89	89	89
100	89	89	89	89	89	89

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 87

β\α	0	20	40	60	80	100
0	87	87	87	87	87	87
20	87	87	87	87	87	87
40	87	87	87	87	87	87
60	87	87	87	87	87	87
80	87	87	87	87	87	87
100	87	87	87	87	87	87

El más chico al final:
Sol. Greedy: 90

β\α	0	20	40	60	80	100
0	90	90	90	90	90	90
20	90	90	90	90	90	89
40	90	90	90	90	90	90
60	90	90	90	90	90	90
80	90	90	90	90	90	90
100	90	90	90	90	90	90

G = g50-3.dat - densidad = 60% - k = 5 - i = 3 - $\chi(G)_5^3 \geq 7$ - H(G) = 11

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 13

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	11	12	11	11	13
20	12	12	11	11	11	11
40	12	11	12	11	12	11
60	12	11	11	11	11	11
80	12	11	11	11	11	11
100	12	12	11	11	11	12

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	11	11	11	11	12
20	12	11	11	11	11	11
40	12	11	11	11	11	11
60	12	11	11	11	11	11
80	12	11	11	11	11	11
100	12	11	11	11	11	12

El más chico al final:
Sol. Greedy: 11

β\α	0	20	40	60	80	100
0	11	11	11	11	11	11
20	11	11	11	11	11	11
40	11	11	11	11	11	11
60	11	11	11	11	11	11
80	11	11	11	11	11	11
100	11	11	11	11	11	11

G = g50-4.dat - densidad = 40% - k = 9 - i = 2 - $\chi_9^2(G) \geq 16$ - H(G) = 38

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 42

β\α	0	20	40	60	80	100
0	42	42	41	41	41	42
20	42	42	42	41	41	41
40	42	42	41	42	42	41
60	42	42	42	42	42	40
80	42	42	42	42	42	42
100	42	42	41	42	42	42

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 41

β\α	0	20	40	60	80	100
0	41	40	40	40	40	40
20	41	41	40	39	39	38
40	41	41	39	39	40	39
60	41	41	40	40	39	40
80	41	40	41	41	40	40
100	41	41	40	41	40	41

El más chico al final:
Sol. Greedy: 39

β\α	0	20	40	60	80	100
0	39	38	39	39	38	39
20	39	38	38	39	38	38
40	39	38	38	38	39	38
60	39	38	38	38	38	38
80	39	38	39	38	39	38
100	39	39	38	39	39	39

G = g50-5.dat - densidad = 20% - k = 13 - i = 5 - $\chi_{13}^{5}(G) \geq 21$ - H(G) = 32

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 38

β\α	0	20	40	60	80	100
0	37	35	35	35	34	37
20	37	35	35	35	34	34
40	37	34	35	35	34	34
60	37	35	35	35	35	34
80	37	35	35	35	35	35
100	37	35	35	35	35	38

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 34

β\α	0	20	40	60	80	100
0	34	34	34	33	33	34
20	34	34	33	33	33	33
40	34	34	33	33	33	32
60	34	34	34	33	33	33
80	34	33	34	34	34	34
100	34	34	34	33	34	34

El más chico al final:
Sol. Greedy: 35

β\α	0	20	40	60	80	100
0	35	32	32	33	33	35
20	35	33	32	32	33	33
40	35	33	33	32	32	33
60	35	32	32	32	32	32
80	35	33	33	32	32	32
100	35	32	32	33	32	35

Grafos de 80 vértices:

G = g80-1.dat - densidad = 100% - k = 4 - i = 2 - $\chi_{4}^{2}(G) \geq 6$ - H(G) = 16

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 28

β\α	0	20	40	60	80	100
0	27	16	16	16	16	28
20	27	16	16	16	16	16
40	27	16	16	16	16	16
60	27	16	16	16	16	16
80	27	16	16	16	16	16
100	27	16	16	16	16	28

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 28

β\α	0	20	40	60	80	100
0	27	16	16	16	16	28
20	27	16	16	16	16	16
40	27	16	16	16	16	16
60	27	16	16	16	16	16
80	27	16	16	16	16	16
100	27	16	16	16	16	28

El más chico al final:
Sol. Greedy: 28

β\α	0	20	40	60	80	100
0	27	16	16	16	16	28
20	27	16	16	16	16	16
40	27	16	16	16	16	16
60	27	16	16	16	16	16
80	27	16	16	16	16	16
100	27	16	16	16	16	28

G = g80-2.dat - densidad = 80% - k = 10 - i = 8 - $\chi_{10}^{8}(G) \geq 12$ - H(G) = 15

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 22

β\α	0	20	40	60	80	100
0	21	15	15	15	15	22
20	21	15	16	15	15	15
40	21	15	15	15	15	15
60	21	15	15	15	15	15
80	21	15	15	15	15	16
100	21	15	15	15	15	22

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 20

β\α	0	20	40	60	80	100
0	17	15	15	15	15	20
20	17	15	15	15	15	15
40	17	15	15	15	15	15
60	17	15	15	15	15	15
80	17	15	15	15	15	15
100	17	15	15	15	15	18

El más chico al final:
Sol. Greedy: 22

β\α	0	20	40	60	80	100
0	21	15	16	15	15	22
20	21	15	15	15	15	15
40	21	15	15	15	15	15
60	21	15	15	15	15	15
80	21	15	15	15	15	15
100	21	15	16	15	15	22

G = g80-3.dat - densidad = 60% - k = 12 - i = 10 - $\chi(G)_{12}^{10} \geq 14$ - H(G) = 16

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 20

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	17	17	16	17	20
20	19	17	16	17	17	17
40	19	17	17	16	17	17
60	19	17	17	16	17	17
80	19	17	17	17	17	17
100	19	17	17	17	17	20

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 22

β\α	0	20	40	60	80	100
0	18	17	17	17	17	22
20	18	17	17	17	17	17
40	18	16	17	17	17	17
60	18	17	16	17	16	17
80	18	17	16	17	16	17
100	18	16	16	17	16	18

El más chico al final:
Sol. Greedy: 22

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	17	17	17	17	22
20	19	17	17	17	17	17
40	19	17	17	17	17	17
60	19	17	16	16	17	17
80	19	17	16	17	17	17
100	19	17	17	17	16	20

G = g80-4.dat - densidad = 40% - k = 9 - i = 2 - $\chi_9^2(G) \geq 16$ - H(G) = 46

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 50

β\α	0	20	40	60	80	100
0	50	50	50	49	48	47
20	50	50	49	50	48	48
40	50	50	50	49	49	49
60	50	49	49	49	49	48
80	50	49	49	49	50	49
100	50	50	50	50	50	50

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 46

β\α	0	20	40	60	80	100
0	46	46	46	46	46	46
20	46	46	46	46	46	45
40	46	46	46	46	46	46
60	46	46	46	46	46	46
80	46	46	46	46	46	46
100	46	46	46	46	46	46

El más chico al final:
Sol. Greedy: 46

β\α	0	20	40	60	80	100
0	46	45	46	46	46	46
20	46	46	46	46	46	46
40	46	45	45	46	46	46
60	46	46	46	46	46	46
80	46	45	46	46	46	45
100	46	45	45	45	45	46

G = g80-5.dat - densidad = 20% - k = 11 - i = 9 - $\chi_{11}^9(G) \geq 13$ - H(G) = 15

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 16

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	15	15	15	15	16
20	15	15	15	15	15	15
40	15	15	15	15	15	15
60	15	15	15	15	15	15
80	15	15	15	15	15	15
100	15	15	15	15	15	16

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 16

β\α	0	20	40	60	80	100
0	16	15	15	15	15	16
20	16	15	15	15	15	15
40	16	15	15	15	15	15
60	16	15	15	15	15	15
80	16	15	15	15	15	15
100	16	15	15	15	15	16

El más chico al final:
Sol. Greedy: 16

β\α	0	20	40	60	80	100
0	16	15	15	15	15	16
20	16	15	15	15	15	15
40	16	15	15	15	15	15
60	16	15	15	15	15	15
80	16	15	15	15	15	15
100	16	15	15	15	15	16

Grafos de 100 vértices:

G = g100-1.dat - densidad = 100% - k = 12 - i = 8 - $\chi_{12}^{8}(G) \geq 16$ - H(G) = 24

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 44

β\α	0	20	40	60	80	100
0	41	41	41	41	41	41
20	25	25	25	25	25	25
40	24	24	25	25	25	25
60	24	24	24	24	25	24
80	25	24	24	24	24	24
100	44	25	24	24	25	42

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 44

β\α	0	20	40	60	80	100
0	41	24	24	24	24	44
20	41	25	24	24	24	25
40	41	25	25	24	24	24
60	41	25	25	24	24	25
80	41	25	24	25	25	25
100	41	25	25	25	24	42

El más chico al final:
Sol. Greedy: 44

β\α	0	20	40	60	80	100
0	41	25	24	25	24	44
20	41	25	24	24	24	25
40	41	24	25	25	24	25
60	41	24	24	24	24	24
80	41	25	24	24	25	25
100	41	25	25	25	24	42

G = g100-2.dat - densidad = 80% - k = 7 - i = 5 - $\chi_{7}^{5}(G) \geq 9$ - H(G) = 14

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	14	14	14	14	15
20	15	14	14	14	14	14
40	15	14	14	14	14	14
60	15	14	14	14	14	14
80	15	14	14	14	14	14
100	15	14	14	14	14	15

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	14	14	14	14	14
20	15	14	14	14	14	14
40	15	14	14	14	14	14
60	15	14	14	14	14	14
80	15	14	14	14	14	14
100	15	14	14	14	14	14

El más chico al final:
Sol. Greedy: 16

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	14	14	14	14	16
20	15	14	14	14	14	14
40	15	14	14	14	14	14
60	15	14	14	14	14	14
80	15	14	14	14	14	14
100	15	14	14	14	14	16

G = g100-3.dat - densidad = 60% - k = 6 - i = 1 - $\chi(G)_6^{1} \geq 11$ - H(G) = 49

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 51

β\α	0	20	40	60	80	100
0	51	51	51	51	51	51
20	51	51	51	51	51	51
40	51	51	51	51	51	51
60	51	51	51	51	51	51
80	51	51	51	51	51	51
100	51	51	51	51	51	51

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 50

β\α	0	20	40	60	80	100
0	50	50	50	50	50	50
20	50	50	50	50	50	50
40	50	50	50	50	50	50
60	50	50	50	50	50	50
80	50	50	50	50	50	50
100	50	50	50	50	50	50

El más chico al final:
Sol. Greedy: 49

β\α	0	20	40	60	80	100
0	49	49	49	49	49	49
20	49	49	49	49	49	49
40	49	49	49	49	49	49
60	49	49	49	49	49	49
80	49	49	49	49	49	49
100	49	49	49	49	49	49

G = g100-4.dat - densidad = 40% - k = 10 - i = 7 - $\chi_{10}^{7}(G) \geq 13$ - H(G) = 18

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 19

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	18	18	18	18	19
20	19	18	18	18	18	18
40	19	18	18	18	18	18
60	19	18	18	18	18	18
80	19	18	18	18	18	18
100	19	18	18	18	18	19

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 19

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	18	18	18	18	19
20	19	18	18	18	18	18
40	19	18	18	18	18	18
60	19	18	18	18	18	18
80	19	18	18	18	18	18
100	19	18	18	18	18	19

El más chico al final:
Sol. Greedy: 21

β\α	0	20	40	60	80	100
0	19	18	18	18	18	21
20	19	18	18	18	18	18
40	19	18	18	18	18	18
60	19	18	18	18	18	18
80	19	18	18	18	18	18
100	19	18	18	18	18	19

G = g100-5.dat - densidad = 20% - k = 14 - i = 3 - $\chi_{14}^{3}(G) \geq 25$ - H(G) = 60

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 66

β\α	0	20	40	60	80	100
0	66	66	64	66	65	66
20	66	66	66	66	66	64
40	66	66	66	66	66	65
60	66	66	66	66	65	65
80	66	66	66	66	66	65
100	66	66	66	66	66	66

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 62

β\α	0	20	40	60	80	100
0	62	62	62	61	61	61
20	62	62	62	61	62	60
40	62	62	62	62	62	62
60	62	62	62	62	62	61
80	62	62	62	62	62	62
100	62	62	62	62	62	62

El más chico al final:
Sol. Greedy: 61

β\α	0	20	40	60	80	100
0	61	61	61	60	61	61
20	61	60	61	61	60	60
40	61	60	61	60	61	61
60	61	60	61	60	60	60
80	61	60	60	61	61	60
100	61	61	61	61	61	61

Grafos de 150 vértices:

G = g150-1.dat - densidad = 100% - k = 7 - i = 4 - $\chi_{7}^{4}(G) \geq 10$ - H(G) = 22

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 23

β\α	0	20	40	60	80	100
0	23	22	22	22	22	23
20	23	22	22	22	22	22
40	23	22	22	22	22	22
60	23	22	22	22	22	22
80	23	22	22	22	22	22
100	23	22	22	22	22	23

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 23

β\α	0	20	40	60	80	100
0	23	22	22	22	22	23
20	23	22	22	22	22	22
40	23	22	22	22	22	22
60	23	22	22	22	22	22
80	23	22	22	22	22	22
100	23	22	22	22	22	23

El más chico al final:
Sol. Greedy: 23

β\α	0	20	40	60	80	100
0	23	22	22	22	22	23
20	23	22	22	22	22	22
40	23	22	22	22	22	22
60	23	22	22	22	22	22
80	23	22	22	22	22	22
100	23	22	22	22	22	23

G = g150-2.dat - densidad = 80% - k = 10 - i = 5 - $\chi_{10}^{5}(G) \geq 15$ - H(G) = 32

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 75

β\α	0	20	40	60	80	100
0	71	32	33	33	32	75
20	71	33	32	32	33	32
40	71	33	32	32	32	32
60	71	32	32	33	32	33
80	71	33	33	32	32	33
100	71	33	32	32	32	72

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 80

β\α	0	20	40	60	80	100
0	76	32	32	32	32	75
20	76	32	32	32	32	32
40	76	32	32	32	32	32
60	76	32	32	32	32	32
80	76	32	32	33	32	32
100	76	32	32	32	32	77

El más chico al final:
Sol. Greedy: 75

β\α	0	20	40	60	80	100
0	71	32	32	32	33	75
20	71	32	33	32	32	33
40	71	32	33	32	32	33
60	71	32	32	32	32	32
80	71	32	33	32	32	32
100	71	32	32	32	32	72

G = g150-3.dat - densidad = 60% - k = 9 - i = 4 - $\chi_{9}^{4}(G) \geq 14$ - H(G) = 32

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 34

β\α	0	20	40	60	80	100
0	34	33	33	33	33	34
20	34	33	33	33	33	33
40	34	33	33	33	33	33
60	34	33	33	33	33	33
80	34	33	34	33	33	33
100	34	32	33	33	33	34

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 35

β\α	0	20	40	60	80	100
0	34	33	33	33	33	35
20	34	32	33	33	33	32
40	34	33	33	33	33	33
60	34	33	33	33	33	33
80	34	33	33	33	33	33
100	34	32	33	32	32	33

El más chico al final:
Sol. Greedy: 35

β\α	0	20	40	60	80	100
0	35	33	33	33	33	35
20	35	33	33	33	34	33
40	35	33	32	32	33	33
60	35	33	33	33	32	33
80	35	33	32	33	33	33
100	35	33	33	33	33	35

G = g150-4.dat - densidad = 40% - k = 12 - i = 5 - $\chi_{12}^{5}(G) \geq 19$ - H(G) = 41

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 43

β\α	0	20	40	60	80	100
0	43	42	42	42	41	43
20	43	42	41	42	42	41
40	43	41	42	42	41	41
60	43	41	41	41	42	42
80	43	41	41	41	42	41
100	43	42	41	42	41	42

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 42

β\α	0	20	40	60	80	100
0	42	41	40	41	41	41
20	42	41	41	41	41	40
40	42	41	41	41	41	41
60	42	41	41	41	41	41
80	42	41	41	41	40	41
100	42	40	41	41	41	42

El más chico al final:
Sol. Greedy: 42

β\α	0	20	40	60	80	100
0	42	41	41	41	41	42
20	42	41	41	41	41	41
40	42	41	41	41	41	40
60	42	40	41	41	41	40
80	42	41	41	41	41	40
100	42	41	40	41	41	42

G = g150-5.dat - densidad = 20% - k = 3 - i = 1 - $\chi_{3}^{1}(G) \geq 5$ - H(G) = 14

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	15	15	15	15	15
20	15	15	15	15	15	15
40	15	15	15	15	15	14
60	15	15	15	15	15	15
80	15	15	15	15	15	15
100	15	15	15	15	15	15

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	14	14	14	14	15
20	15	14	14	14	14	14
40	15	14	14	14	14	14
60	15	14	14	14	14	14
80	15	14	14	14	14	14
100	15	15	14	15	14	15

El más chico al final:
Sol. Greedy: 15

β\α	0	20	40	60	80	100
0	15	14	14	14	14	15
20	15	14	14	14	14	14
40	15	14	14	14	14	14
60	15	14	14	14	14	14
80	15	14	14	14	14	14
100	15	14	14	14	14	15

Grafos bipartitos de 100 vértices, el porcentaje de la densidad de aristas es sobre la cantidad del bipartito completo:

G = g5050-1.dat - densidad = 100% - k = 8 - i = 3 - $\chi_8^3(G) = 13$ - H(G) = 21

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy:

β\α	0	20	40	60	80	100
0	29	29	29	29	29	29
20	29	29	29	29	29	29
29	29	29	29	29	29	29
60	29	29	29	29	29	29
80	29	29	29	29	29	29
100	16	29	29	29	29	29

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy:

β\α	0	20	40	60	80	100
0	29	29	29	29	29	29
20	29	29	29	29	29	29
40	29	29	29	29	29	29
60	29	29	29	29	29	29
80	28	29	29	29	29	29
100	16	29	29	29	29	29

El más chico al final:
Sol. Greedy: 21

β\α	0	20	40	60	80	100
0	16	16	16	16	16	16
20	21	21	21	21	21	20
40	21	21	21	21	21	21
60	21	21	21	21	21	21
80	21	21	21	21	21	21
100	16	21	21	21	21	17

G = g5050-2.dat - densidad = 80% - k = 10 - i = 9 - $\chi_{10}^9(G) = 11$ - H(G) = 12

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	12	12	12	12	12
20	12	12	12	12	12	12
40	12	12	12	12	12	12
60	12	12	12	12	12	12
80	12	12	12	12	12	12
100	12	12	12	12	12	11

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 13

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	12	12	12	12	12
20	12	12	12	12	12	12
40	12	12	12	12	12	12
60	12	12	12	12	12	12
80	12	12	12	12	12	12
100	12	12	12	12	12	13

El más chico al final:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	12	12	12	12	12
20	12	12	12	12	12	12
40	12	12	12	12	12	12
60	12	12	12	12	12	12
80	12	12	12	12	12	12
100	12	12	12	12	12	11

G = g5050-3.dat - densidad = 60% - k = 7 - i = 5 - $\chi_7^5(G) = 9$ - H(G) = 12

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 13

β\α	0	20	40	60	80	100
0	13	13	13	13	13	13
20	12	12	12	13	12	12
40	12	12	12	12	12	12
60	12	12	12	12	12	13
80	12	12	12	13	12	12
100	11	12	12	12	12	13

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 13

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	12	12	12	12	12
20	12	12	12	12	12	12
40	12	12	12	12	12	12
60	12	12	12	12	12	12
80	12	12	12	12	12	12
100	11	12	12	12	12	13

El más chico al final:
Sol. Greedy: 13

β\α	0	20	40	60	80	100
0	13	13	13	13	13	13
20	12	12	12	12	12	12
40	12	12	12	12	12	12
60	12	12	12	12	12	12
80	12	12	12	12	12	12
100	11	12	12	12	12	13

G = g5050-4.dat - densidad = 40% - k = 6 - i = 0 - $\chi_6^0(G) = 12$ - H(G) = 12

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 18

β\α	0	20	40	60	80	100
0	18	18	18	18	18	18
20	12	18	12	18	12	12
40	18	18	18	18	12	12
60	18	18	18	18	12	12
80	18	18	18	18	18	12
100	18	18	18	18	13	13

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 18

β\α	0	20	40	60	80	100
0	18	18	18	18	18	18
20	13	14	14	15	16	18
40	14	14	15	14	15	18
60	18	13	15	14	14	18
80	18	15	14	14	15	18
100	18	18	14	13	13	18

El más chico al final:
Sol. Greedy: 12

β\α	0	20	40	60	80	100
0	12	12	12	12	12	12
20	12	12	12	12	12	12
40	12	12	12	12	12	12
60	12	12	12	12	12	12
80	12	12	12	12	12	12
100	12	12	12	12	12	12

G = g5050-5.dat - densidad = 20% - k = 10 - i = 7 - χ_{10}^{7}(G) = 13 - H(G) = 15

Sin orden en los vértices:
Sol. Greedy: 16

β\α	0	20	40	60	80	100
0	16	16	16	16	16	16
20	16	16	16	16	16	16
40	16	16	16	16	16	16
60	16	16	16	16	16	16
80	16	16	16	16	16	16
100	16	16	16	16	16	16

De mayor a menor grado:
Sol. Greedy: 18

β\α	0	20	40	60	80	100
0	17	16	16	16	16	18
20	17	16	16	16	16	16
40	17	16	16	16	16	16
60	17	16	16	16	16	16
80	17	16	16	16	16	16
100	17	16	16	16	16	17

El más chico al final:
Sol. Greedy: 16

β\α	0	20	40	60	80	100
0	16	15	16	16	16	16
20	16	15	15	15	16	16
40	16	16	15	16	16	16
60	16	16	15	16	16	16
80	16	16	15	15	15	16
100	16	16	15	16	16	16

Bibliografía :

1. C. Berge, Some classes of perfect graphs, in Graph Theory and Theoretical Physics, Academic Press, pp. 155-165, 1976.

2. C. Berge and V. Chavátal, editors, Topics on perfect graphs (Annals of Disc. Math. 21), North-Holland, Amsterdam, 1984.

3. C. Berge, The q-perfect graphs. Part. I: The case q = 2, in: Sets, Graphs and Numbers (L. Lovász ed.), pp. 67-75, 1991.

4. C. Berge, The q-perfect graphs. Part. II, RUTCOR Research Report 23-92, Rutgers University, 1992.

5. Bondy, J. A. and Murty U. S. R., Graph Theory with Applcations, The Macmillan Press LTD, 1976.

6. L. Cai and D. Cornel, A generalization of perfect graphs - i-Perfect Graphs. Journal of Graphs Theory, Vol. 23, No. 1, pp. 87-103, 1996.

7. G. Chartrand, D. Geller and S. Hedetniemi, A generalization of the chromatic number, Proc. Camb. Phil. Soc. 64, pp. 265-270, 1968.

8. M. Diestel, Graph Theory, Springer ed., 1997.

9. M. Garey and D. Johnson, The Complexity of Near-Optimal Graph Coloring, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 23, No. 1, pp. 43-49, 1976.

10. M. Garey and D. Johnson, Computers and intractability: A guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman ed., 1979.

11. Golumbic, Algorithmic graphs theory and perfect graphs, New York, Academic Press, 1980.

12. C. Herrera de Figueiredo and K. Vušković, A class of β-Perfect Graphs, a aparecer en Journal of Combinatorial Theory.

13. A. Hilton, R. Rado and S. Scott, A (<5)-colour theorem for planar graphs, Bull. London Math. Soc., 5, pp. 302-306, 1973.

14. R. Jensen and B. Toft, Graph Coloring Problems, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1995.

15. D. Johnson, The NP-Completeness Column: An Ongoing Guide, Journal of Algorithms 13, pp. 502-524, 1992.

16. D. Lick and A. White, k-Degenerate graphs, Can. J. Math., Vol. XXII, No. 5, pp. 1082-1096, 1970.

17. L. Lovász, Perfect Graphs, in: Selected Topics in Graphs Theory 2 (L. W. Beineke and R. J. Wilson, eds.), Academic Press, London-NY, pp 55-87, 1983.

18. C. Lund and M. Yannakakis, On the Hardness of Approximating Minimization Problems, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 41, No. 5, pp. 960-981, 1994.

19. S. Markosian, G. Gasparian and B. Reed, β-Perfect Graphs, Journal of Combinatorial Theory, Serie B, No. 67, pp. 1-11, 1996.

20. W. Meyer, Five-Coloring Planar Maps, Journal of Combinatorial Theory (B) 13, pp. 72-82, 1972.

21. K. R. Parthasarathy and G. Ravindra, The validity of the strong perfect graph conjecture for (K_4-e)-free graphs, J. Combin. Theory B 26, pp. 98-100, 19??.

22. M. Swamy and K. Thulasiraman, Graphs, Networks and Algorithms, John Wiley & Sons eds., 1981.

23. E. Trotter, Line Perfect Graphs, Mathematical Programming, Vol. 12, No. 2, pp. 255-259, 1977.

24. D. de Werra, On Line Perfect Graphs, Mathematical Programming, Vol. 15, No. 2, pp. 263-238, 1978.

25. CPLEX Linear Optimization 4.0.8 with Mixed Integer Solver, CPLEX Optimization, Inc., 1989-1995.