

TESIS DE LICENCIATURA

GRAFOS DE BOUCHET:  
UNA GENERALIZACIÓN  
DE LOS GRAFOS CIRCULARES

Hernán Czemerinski  
hczemeri@dc.uba.ar

Director: Dr. Guillermo A. Durán

Departamento de Computación  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Octubre de 2001

# Resumen

Un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas en un círculo. Estos han sido introducidos por Even e Itai en los '70 y muy estudiados en la literatura. Existen diferentes caracterizaciones para esta clase de grafos. Una de ellas utiliza el concepto de complementaciones locales, y fue aportada por André Bouchet en 1994. En el presente trabajo, utilizamos la idea de esta caracterización para definir una nueva clase, que generalizan a los circulares, y a los cuales llamamos Grafos de Bouchet. Probamos que estos grafos también generalizan a los grafos de intervalos, con lo que son una generalización de la unión de ambas clases; encontramos, por medio del uso de la computadora, una caracterización por 33 subgrafos prohibidos de la nueva clase; y vemos que como consecuencia de esta caracterización se obtiene un reconocimiento polinomial. Por último, mostramos que existen 396 formulaciones diferentes para el teorema de caracterización de Bouchet para grafos circulares.

*A mis queridísimas Vera y Lucía.*

# Agradecimientos

A Willy Durán, mi director, por su extraordinaria predisposición. Su profundo conocimiento de los temas estudiados y su constante empuje estuvieron presentes a lo largo de todo el desarrollo de este trabajo.

A Agustín Gravano, por haber colaborado con los resultados de esta tesis, y por su incansable ayuda.

A los jurados Pablo Coll y Oscar Lin, quienes con su cuidadosa lectura contribuyeron a mejorar la versión final.

A Agus, Sergio y Ale Alfonso, con quienes cursé casi toda la carrera. Me resulta inimaginable haber llegado a esta instancia sin el apoyo que me dieron.

A todos los amigos y amigas que me dio la facultad, que hicieron que todos estos años queden en mi memoria junto a un montón de lindos recuerdos.

A los profesores de la facultad, quienes a pesar de las constantes circunstancias adversas, siguen luchando por una educación libre, gratuita y de excelencia.

A Adro, Manu, Martín, Nico y Jimmy, con quienes jueves tras jueves paso momentos extraordinarios.

A Ale, junto a quien atravesé casi todos estos años.

Al Doctor Joge Basile, quien me ayudó a estar mejor.

Por último, pero no por eso menos importante, quiero agradecerle a mis viejos, por haber alentado siempre y en forma incondicional el camino que fui eligiendo.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Definiciones básicas y notación . . . . .	2
1.2	Clases de Grafos . . . . .	3
1.3	Propiedades de la complementación local . . . . .	4
1.4	Grafos circulares y teorema de Bouchet . . . . .	6
1.4.1	Grafos circulares . . . . .	6
1.4.2	Teorema de Bouchet . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Grafos de Bouchet</b>	<b>9</b>
2.1	Generalización de grafos circulares . . . . .	9
2.2	Caracterización por subgrafos prohibidos . . . . .	10
2.2.1	Clausura de $W_5$ . . . . .	10
2.2.2	Clausura de $BW_3$ . . . . .	12
2.2.3	Clausura de $W_7$ . . . . .	14
2.2.4	Conjunto minimal . . . . .	18
2.2.5	Algoritmo de Clausura . . . . .	19
2.3	Generalización de grafos de intervalos . . . . .	20
2.3.1	Grafos de intervalos . . . . .	20
2.3.2	Intervalos $\subseteq$ Bouchet . . . . .	21
2.4	¿Bouchet = circulares $\cup$ intervalos? . . . . .	24
2.5	Reconocimiento polinomial . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Generalización del teorema de Bouchet</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>28</b>

# 1 Introducción

Los grafos circulares, grafos intersección de cuerdas en un círculo, fueron presentados por Even e Itai a comienzos de la década del '70. Existen aplicaciones a problemas computacionales que operan con pilas y colas. Un problema de la vida real para el que se utilizan estas ideas en su resolución es aquel formulado por Knuth en el que se busca un reordenamiento de vagones de un tren utilizando la menor cantidad de vías posibles.

Existen distintas caracterizaciones para la clase de grafos circulares. Una de ellas, propuesta por André Bouchet en 1994, utiliza el concepto de complementación local de un grafo. Tomando como base esta caracterización, en el presente trabajo se define una nueva clase de grafos, llamados grafos de Bouchet, que generalizan a los circulares.

El objetivo de esta tesis es el estudio de esta nueva clase de grafos: se demuestra que los grafos de Bouchet son una superclase de otras clases de grafos muy estudiadas, como los circulares y los de intervalos; se prueba, mediante el uso de la computadora, que poseen una caracterización mediante 33 subgrafos prohibidos, y como una consecuencia inmediata se da un reconocimiento polinomial. Por último, se muestra que existen 396 formulaciones diferentes para el teorema de caracterización de Bouchet para grafos circulares.

Se describe a continuación la forma en que está organizado el presente trabajo, dividido en cuatro secciones.

En la presente sección, además de presentar los tópicos de la tesis, se incluyen definiciones básicas y notación empleada a lo largo del trabajo, una reseña sobre clases de grafos, se enuncian y demuestran propiedades de la complementación local, y se expone el Teorema de Bouchet para caracterización de grafos circulares.

En la sección 2 se encuentra la definición y el estudio de la clase de grafos de Bouchet. Se muestra por qué son una generalización de los grafos circulares y los de intervalos. Se demuestra constructivamente la caracterización de la clase mediante un conjunto minimal de subgrafos prohibidos, y cómo a partir de este resultado se deriva un algoritmo polinomial para su reconocimiento.

En la sección 3 se muestra que el teorema de Bouchet de caracterización de grafos circulares puede ser enunciado de 396 formas equivalentes, usando los resultados probados en la sección anterior.

Por último, en la sección 4, se presentan las conclusiones de este trabajo y el posible trabajo futuro.

## 1.1 Definiciones básicas y notación

Denotaremos un grafo  $G$  por un par  $(V(G), E(G))$ , donde  $V(G)$  representa un conjunto finito de vértices de  $G$ , y  $E(G)$  un conjunto de pares no ordenados de vértices de  $G$  llamados aristas. Sean  $n = |V(G)|$  y  $m = |E(G)|$ .

Un vértice  $v$  es *adyacente* a otro vértice  $w$  en  $G$  si y sólo si  $(v, w) \in E(G)$ . Decimos que  $v$  y  $w$  son los extremos de la arista.

El *vecindario* de un vértice  $v$  es el conjunto  $N(v)$  que consiste en todos los vértices adyacentes a  $v$ . El grado de un vértice  $v$  es la cardinalidad del conjunto  $N(v)$ .

Un vértice  $v$  es *universal* cuando  $N(v) = V(G) - \{v\}$ . Un vértice  $v$  es aislado cuando  $N(v) = \emptyset$ .

El *complemento* de un grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices de  $G$  y tal que dos vértices distintos son adyacentes en  $\overline{G}$  si y sólo si no son adyacentes en  $G$ .

Dado un grafo  $G = (V(G), E(G))$ , se define  $G^* = (V(G) \cup \{v\}, E(G))$ , donde  $v$  es un vértice aislado que se agrega al grafo  $G$ .

Un grafo  $H$  es un *subgrafo* de un grafo  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ . Si  $V(H) = V(G)$ , decimos que  $H$  es un subgrafo generador de  $G$ . Dado un conjunto de vértices  $X \subseteq V(G)$ , el subgrafo de  $G$  inducido por  $X$  es el subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $V(H) = X$  y  $E(H)$  es el conjunto de aristas de  $G$  que tiene ambos extremos en  $X$ .

Dos grafos  $G$  y  $H$  son *isomorfos* si existe una biyección entre  $V(G)$  y  $V(H)$  que conserva las adyacencias. En este caso, notamos  $G = H$ .

Un *camino* en un grafo  $G$  es una secuencia de vértices distintos  $P = v_1, v_2, \dots, v_k$ , donde  $(v_i, v_{i+1}) \in E(G), i = 1, \dots, k-1$ . Una *cuerda* en  $P$  es una arista que une dos vértices no consecutivos de  $P$ . Un *camino inducido* es un camino sin cuerdas. Denotamos por  $P_k$  un camino inducido por  $k$  vértices.

Un *circuito* en un grafo  $G$  es una secuencia de vértices  $C = v_1, v_2, \dots, v_k$ , no necesariamente distintos, donde  $v_1 = v_k$  y  $(v_i, v_{i+1}) \in E(G), i = 1, \dots, k-1$ .

Un *ciclo* en un grafo  $G$  es una secuencia de vértices  $C = v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ , donde  $v_1, \dots, v_k$  es un camino,  $v_1$  es adyacente a  $v_k$ ,  $v_1 = v_{k+1}$  y  $k \geq 3$ . Una *cuerda* en  $C$  es cualquier cuerda del camino  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Un ciclo es un *ciclo inducido* si no posee cuerdas. Llamamos  $C_k$  al ciclo inducido por  $k$  vértices.  $C_k$  es conocido como el agujero de  $k$  vértices ( $C_3$  es también llamado triángulo).

Un grafo  $G$  es *conexo* si para todo par de vértices distintos  $v$  y  $w$  de  $G$  existe un camino de  $v$  a  $w$ .

Un grafo es una *rueda*  $W_j$  si es isomorfo a un ciclo inducido  $C_j$  al que se le agrega un vértice universal.

Decimos que  $G$  es un *digrafo*, o un grafo dirigido, si las aristas están dadas por un conjunto de pares ordenados de vértices. En este caso, denotamos al grafo como  $G = (V(G), D(G))$

Una operación muy utilizada a lo largo de este trabajo es la *complementación local*. Dado un grafo  $G = (V(G), E(G))$  y un vértice  $v \in V(G)$ , la

complementación local de  $G$  en  $v$ , denotada por  $LC(G, v)$ , es el grafo obtenido al reemplazar en  $G$  el subgrafo inducido por  $N(v)$  por su complemento. Dos grafos se dicen localmente equivalentes si uno puede ser obtenido del otro por una secuencia de complementaciones locales. La figura 1 muestra el resultado de aplicar complementación local sobre el grafo  $G$  en el vértice  $v_0$ .

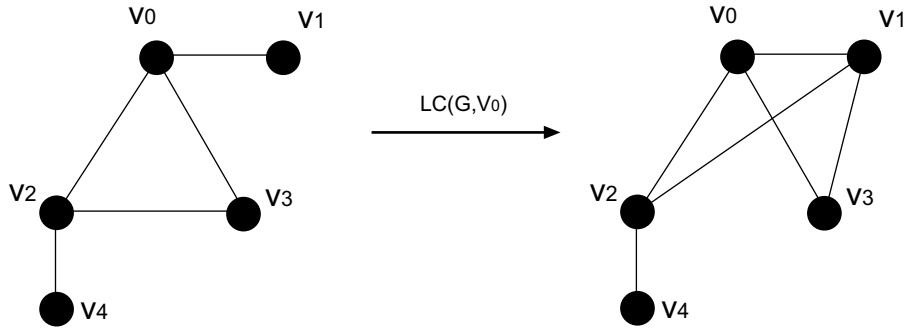


Figura 1: Ejemplo de aplicación de la complementación local.

Definiciones no dadas aquí pueden encontrarse en [3], [15] y [18].

## 1.2 Clases de Grafos

Consideremos una familia finita de conjuntos no vacíos. El *grafo intersección* de esta familia es obtenido representando cada conjunto por un vértice, conectando dos vértices por una arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan. Es sencillo probar que todo grafo es un grafo intersección de alguna familia.

Un grafo *circular* es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo.

Un grafo de *intervalos* es el grafo intersección de intervalos en la recta real.

Un grafo  $G$  es *triangulado* si  $G$  no contiene al ciclo inducido  $C_k$  como subgrafo inducido, para  $k \geq 4$ .

Un grafo  $G = (V(G), E(G))$  es de *comparabilidad* si es posible direccionar sus aristas de modo de que el grafo dirigido resultante  $G' = (V(G), D(G))$  satisfaga:  $(u, v) \in D(G), (v, w) \in D(G) \Rightarrow (u, w) \in D(G)$ .

Un grafo  $H$  es una *estructura prohibida* para una determinada clase de grafos si un grafo en dicha clase no puede contener a  $H$  como subgrafo inducido. La estructura prohibida será minimal si cualquier subgrafo inducido propio de ella pertenece a la clase.

Una recopilación completa sobre clases de grafos puede encontrarse en [8].



### 1.3 Propiedades de la complementación local

En esta sección se presentan y demuestran algunas propiedades de la complementación local utilizadas a lo largo del trabajo.

**Propiedad 1.1** Sea  $G$  un grafo con  $m$  vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ , y  $H$  un grafo de  $n$  vértices isomorfo al subgrafo inducido por  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  en  $G$  ( $m \geq n$ ). Sean  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  los vértices de  $H$  de manera que el isomorfismo vale reemplazando  $v_i$  por  $w_i$ . Entonces, el subgrafo inducido por  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  en  $LC(G, v_i)$  es isomorfo a  $LC(H, w_i)$ .

*Demostración:*

Veamos que  $(v_j, v_k) \in E(LC(G, v_i))$  si y sólo si  $(w_j, w_k) \in E(LC(H, w_i))$  ( $i, j, k \leq n$ ).

Caso 1:  $\{v_j, v_k\} \subseteq N(v_i)$

Como  $\{v_j, v_k\} \subseteq N(v_i)$  y  $H$  es isomorfo al subgrafo inducido por  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  en  $G$ , entonces  $\{w_j, w_k\} \subseteq N(w_i)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} (v_j, v_k) \in E(LC(G, v_i)) &\Leftrightarrow (v_j, v_k) \notin E(G) \\ (v_j, v_k) \notin E(G) &\Leftrightarrow (w_j, w_k) \notin E(H) \\ (w_j, w_k) \notin E(H) &\Leftrightarrow (w_j, w_k) \in E(LC(H, w_i)) \end{aligned}$$

Caso 2:  $\{v_j, v_k\} \not\subseteq N(v_i)$

Como  $\{v_j, v_k\} \not\subseteq N(v_i)$  y  $H$  es isomorfo al subgrafo inducido por  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  en  $G$ , entonces  $\{w_j, w_k\} \not\subseteq N(w_i)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} (v_j, v_k) \in E(LC(G, v_i)) &\Leftrightarrow (v_j, v_k) \in E(G) \\ (v_j, v_k) \in E(G) &\Leftrightarrow (w_j, w_k) \in E(H) \\ (w_j, w_k) \in E(H) &\Leftrightarrow (w_j, w_k) \in E(LC(H, w_i)) \end{aligned}$$

□

La siguiente propiedad de la complementación local es muy utilizada en la construcción del conjunto de subgrafos prohibidos que caracterizan a los grafos de Bouchet:

**Propiedad 1.2** Sea  $G$  un grafo y  $v \in V(G)$ . Entonces,  $LC(LC(G, v), v) = G$ .

*Demostración:*

Veamos que  $(v_j, v_k) \in E(G)$  si y sólo si  $(v_j, v_k) \in E(LC(LC(G, v), v))$ .

Caso 1:  $\{v_j, v_k\} \subseteq N(v_i)$

$$\begin{aligned} (v_j, v_k) \in E(G) &\Leftrightarrow (v_j, v_k) \notin E(LC(G, v_i)) \\ (v_j, v_k) \notin E(LC(G, v_i)) &\Leftrightarrow (v_j, v_k) \in E(LC(LC(G, v_i), v_i)) \end{aligned}$$

Caso 2:  $\{v_j, v_k\} \not\subseteq N(v_i)$

$$\begin{aligned} (v_j, v_k) \in E(G) &\Leftrightarrow (v_j, v_k) \in E(LC(G, v_i)) \\ (v_j, v_k) \in E(LC(G, v_i)) &\Leftrightarrow (v_j, v_k) \in E(LC(LC(G, v_i), v_i)) \end{aligned}$$

□

Como corolario directo se desprende que la equivalencia local es reflexiva:

**Corolario 1.1** *Todo grafo  $G$  con al menos un vértice es localmente equivalente a si mismo.*

*Demostración:*

Es una consecuencia directa de la propiedad 1.2. □

La siguiente propiedad prueba que la equivalencia local es simétrica:

**Propiedad 1.3** *Sean  $G$  y  $H$  dos grafos.  $G$  es localmente equivalente a  $H$  si y sólo si  $H$  es localmente equivalente a  $G$ .*

*Demostración:*

Supongamos que  $G$  y  $H$  son localmente equivalentes. Entonces existe una secuencia de  $k$  vértices  $v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_{i_k}$  de  $G$  tal que:

$$H = LC(LC(LC(\dots LC(LC(G, v_{i_1}), v_{i_2})\dots), v_{i_{k-1}}), v_{i_k})$$

Esto sucede si y sólo si

$$G = LC(LC(LC(\dots LC(LC(H, v_{i_k}), v_{i_{k-1}})\dots), v_{i_2}), v_{i_1})$$

□

Por último, veamos que la equivalencia local es transitiva:

**Propiedad 1.4** *Sean  $G$ ,  $H$  e  $I$  tres grafos. Si  $G$  es localmente equivalente a  $H$ , y  $H$  localmente equivalente a  $I$ , entonces  $G$  es localmente equivalente a  $I$ .*

*Demostración:*

Sean  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  los vértices de  $G$  y  $H$  respectivamente. Como  $H$  e  $I$  son localmente equivalentes, existe una secuencia de  $l$  vértices  $w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_{l-1}}, w_{j_l}$  de  $H$  tal que:

$$LC(LC(LC(\dots LC(LC(H, w_{j_1}), w_{j_2})\dots), w_{j_{l-1}}), w_{j_l}) = I$$

De igual forma, como  $G$  y  $H$  son localmente equivalentes, existe una secuencia de  $k$  vértices  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_{i_k}$  de  $G$  tal que:

$$LC(LC(LC(\dots LC(LC(G, v_{i_1}), v_{i_2})\dots), v_{i_{k-1}}), v_{i_k}) = H$$

Sea  $F : V(H) \rightarrow V(G)$  la función biyectiva que preserva las adyacencias entre  $LC(LC(LC(\dots LC(LC(G, v_{i_1}), v_{i_2})\dots), v_{i_{k-1}}), v_{i_k})$  y  $H$ . Entonces:

$$LC(\dots(LC(LC(\dots(LC(G, v_{i_1}), \dots), v_{i_k}), F(w_{j_1})), \dots), F(w_{j_l})) = I$$

Por lo tanto, los grafos  $G$  e  $I$  son localmente equivalentes.  $\square$

## 1.4 Grafos circulares y teorema de Bouchet

### 1.4.1 Grafos circulares

Un grafo  $G$  es circular si existe un conjunto de cuerdas  $\mathcal{L}$  dentro de un círculo (llamado modelo) y una correspondencia 1-1 entre vértices de  $G$  y cuerdas de  $\mathcal{L}$ , de manera que dos vértices distintos son adyacentes si y sólo si las cuerdas correspondientes se cortan. Es decir, un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo. La Figura 4 muestra un grafo circular y un modelo para él.

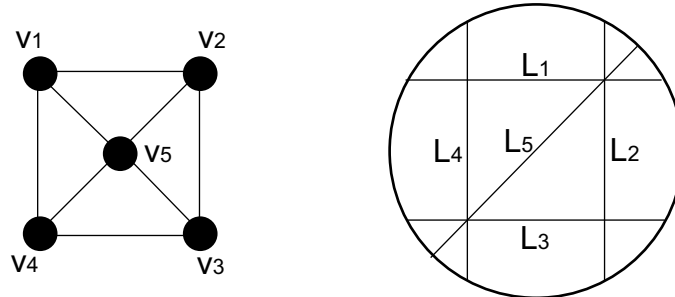


Figura 2: Ejemplo de grafo circular, y un posible modelo de cuerdas.

Esta clase de grafos fue introducida por Even e Itai en [10], donde se muestra una aplicación para resolver un problema de reordenamiento de vagones de un tren propuesto por Knuth [20], usando pilas y colas. Se pueden encontrar algoritmos de tiempo polinomial para reconocer grafos en esta clase en [6], [11], [23] y [27]. Soluciones polinomiales a los problemas de clique máximo y conjunto independiente máximo en grafos circulares pueden encontrarse en [13], [19], [22] y [26], pero el problema de coloreo se mantiene NP-Hard [12].

Los grafos circulares son equivalentes a los grafos *overlap de intervalos*, conocidos en la literatura como grafos overlap. Un grafo  $G$  es overlap de intervalos si sus vértices pueden ser puestos en correspondencia 1-1 con una familia de intervalos en la recta real de manera que dos vértices son adyacentes en  $G$  si y sólo si sus correspondientes intervalos se superponen (tienen

intersección no vacía pero ninguno está propiamente contenido en el otro). La prueba de la equivalencia entre ambas clases puede encontrarse en [15].

Otra clase equivalente a los grafos circulares es la clase de los grafos de alternancia. Consideremos una palabra  $p$  tal que cada letra que se encuentra en  $p$  está exactamente dos veces. Una alternancia de  $p$  es un par  $vw$  de letras distintas tal que encontramos alternativamente  $\dots v\dots w\dots v\dots w\dots$  cuando leemos  $p$ . El grafo de alternancia  $A(p)$  es el grafo cuyos vértices son las letras de  $p$  y cuyas aristas son las alternancias de  $p$ . Los grafos de alternancia fueron usados en [5] para encontrar una solución algorítmica para un problema de curvas del plano que se auto-intersecan formulado por Gauss. Claramente, los grafos de alternancia también son equivalentes a los circulares.

### 1.4.2 Teorema de Bouchet

No se conoce una caracterización para grafos circulares por medio de estructuras prohibidas. Bouchet formula en [7] una caracterización que puede aportar en este sentido, utilizando la definición ya dada aquí de grafos localmente equivalentes.

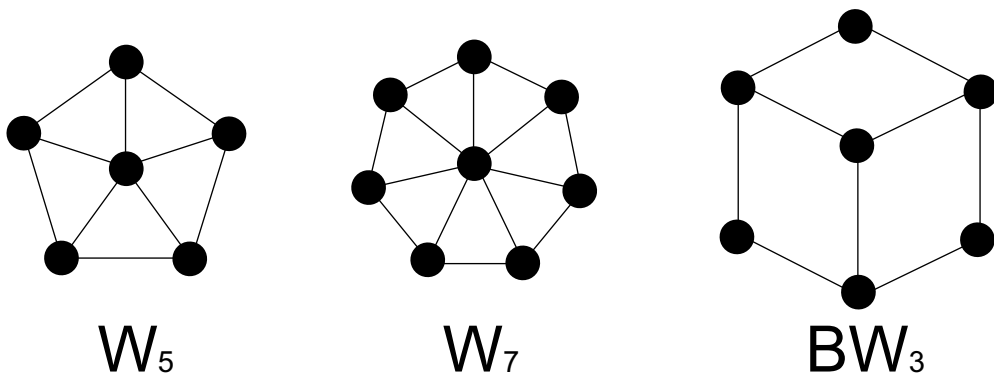


Figura 3: Grafos del teorema de Bouchet.

**Teorema 1.1** *Un grafo  $G$  es circular si y sólo si ningún grafo localmente equivalente a  $G$  tiene como subgrafo inducido a alguno de los grafos de la Figura 3.*

Una forma de determinar que un grafo no es circular es propuesta en [9] mediante el siguiente corolario del teorema 1.1:

**Corolario 1.2** *Sea  $H$  un grafo no circular. Si el grafo  $G$  es localmente equivalente a  $H$ , entonces  $G$  tampoco es circular.*

A continuación se muestra una generalización del corolario 1.2:

**Corolario 1.3** *Sean  $G$  y  $H$  dos grafos localmente equivalentes. Entonces  $G$  es circular si y sólo si  $H$  es circular.*

*Demostración:*

Supongamos que  $G$  es circular. Entonces, por el teorema 1.1, no existe ningún grafo localmente equivalente a  $G$  que tenga como subgrafo inducido a  $W_5$ ,  $BW_3$  o  $W_7$ . Como  $G$  es localmente equivalente a  $H$ , por la propiedad 1.4, todos los grafos localmente equivalentes a  $H$  también lo son de  $G$ . En consecuencia, no puede existir ningún grafo localmente equivalente a  $H$  que tenga como subgrafo inducido a  $W_5$ ,  $BW_3$  o  $W_7$ . Entonces, por el teorema 1.1,  $H$  es circular. Utilizando el mismo esquema de razonamiento se prueba que si  $H$  es circular, entonces  $G$  también debe serlo.  $\square$

En [9] se demuestra el siguiente resultado sobre estructuras prohibidas minimales para grafos circulares:

**Teorema 1.2** *Dada  $H$  una estructura prohibida minimal para grafos circulares,  $H$  contiene en forma propia a alguno de los grafos del conjunto  $C_1$ , o  $H$  es alguno de los grafos del conjunto  $C_2$ , siendo  $C_1 = \{\overline{H_1}, \overline{H_3}, H_1^*, \overline{C_3^*}, \{C_n^*\}_{n \geq 4}\}$  y  $C_2 = \{\overline{H_2}, \overline{H_4}, \overline{H_5}, \{C_{2i}\}_{i \geq 3}, \{C_{2j+1}^*\}_{j \geq 2}\}$ .*

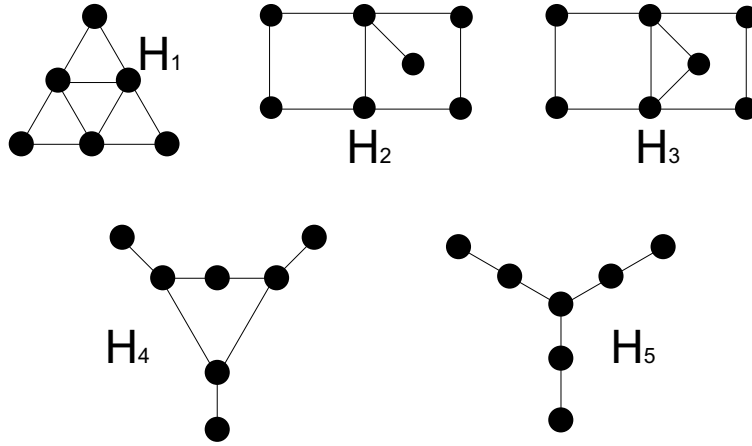


Figura 4: Grafos del Teorema 1.2

En la sección 3 de este trabajo se mostrará como el Teorema 1.1 puede ser enunciado de 396 formas equivalentes.

## 2 Grafos de Bouchet

Se define a continuación la clase de grafos de Bouchet:

**Definición 2.1** *Un grafo  $G$  es de Bouchet si y sólo si ningún subgrafo inducido de  $G$  es localmente equivalente a  $W_5$ ,  $W_7$  o  $BW_3$  (los grafos de la figura 3).*

### 2.1 Generalización de grafos circulares

A partir del resultado de la propiedad 1.1 podemos probar que la clase de los grafos circulares es una subclase de los grafos de Bouchet.

**Teorema 2.1** *Sea  $G$  un grafo circular. Entonces  $G$  es un grafo de Bouchet.*

*Demostración:*

Supongamos que  $G$  no es un grafo de Bouchet y veamos que entonces tampoco es un grafo circular. Como  $G$  no pertenece a la clase de grafos de Bouchet, tiene un subgrafo inducido que es localmente equivalente a  $W_5$ ,  $W_7$  o  $BW_3$ . Llamemos  $H$  a dicho subgrafo y, sin pérdida de generalidad, supongamos que  $H$  es localmente equivalente a  $W_5$ . Como  $H$  es localmente equivalente a  $W_5$ , existe una secuencia de  $k$  vértices  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_{i_k}$  tal que  $LC(LC(LC(\dots LC(LC(H, v_{i_1}), v_{i_2})\dots), v_{i_{k-1}}), v_{i_k}) = W_5$ . Entonces, por la propiedad 1.1, el grafo  $G' = LC(LC(LC(\dots LC(LC(G, v_{i_1}), v_{i_2})\dots), v_{i_{k-1}}), v_{i_k})$  tiene como subgrafo inducido a  $W_5$ . Como  $G'$  es localmente equivalente a  $G$ , por el teorema 1.1 resulta que  $G$  no es circular.  $\square$

En la demostración no se utiliza ninguna particularidad de  $W_5$ ; éste puede ser reemplazado por  $BW_3$  o  $W_7$  y se obtiene el mismo resultado.

La inclusión de los grafos circulares en los grafos de Bouchet es estricta. El grafo de la izquierda de la figura 5 no es circular (ya que al ser complementado localmente por  $v$  y  $w$  se obtiene un grafo localmente equivalente con  $W_5$  como subgrafo inducido), y sí de intervalos (Gravano propone una representación de intervalos en [16]). Como veremos en la sección 2.3, los grafos de Bouchet también generalizan a los grafos de intervalos; en consecuencia el grafo  $G$  es de Bouchet.

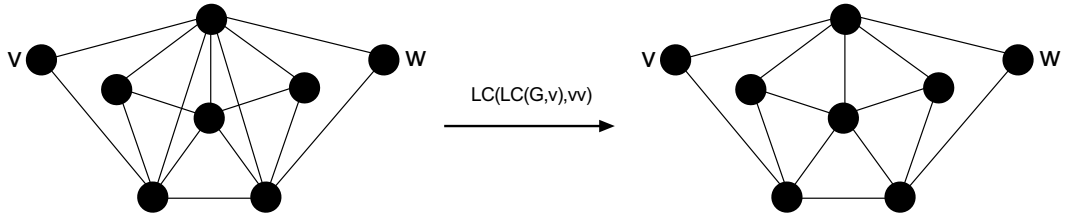


Figura 5: Grafo de Bouchet no circular.

## 2.2 Caracterización por subgrafos prohibidos

Como consecuencia directa de la definición de los grafos de Bouchet y del Corolario 1.1,  $W_5$ ,  $BW_3$  y  $W_7$  son estructuras prohibidas para dicha clase. Un procedimiento válido para obtener más estructuras prohibidas para esta clase consiste en ir complementando localmente, por cualquiera de sus vértices, aquellos grafos que se saben prohibidos.

Utilizando una computadora se han clausurado mediante complementación local a  $W_5$ ,  $BW_3$  y  $W_7$ , obteniéndose las familias  $F_{W_5}$ ,  $F_{BW_3}$  y  $F_{W_7}$ . La unión de estas tres es el conjunto de subgrafos prohibidos que caracterizan a los grafos de Bouchet.

En primer lugar se describen las clausuras  $W_5$ ,  $BW_3$  y  $W_7$ , y a continuación se exhibe el algoritmo implementado para obtenerlas.

### 2.2.1 Clausura de $W_5$

Al complementar localmente al grafo  $W_5$  hay dos casos a tomar en cuenta:  $v_0$  por un lado, y los restantes vértices por otro (siguiendo la numeración de los vértices de la figura 6). Resulta claro que complementando localmente por  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$  se obtienen grafos isomorfos.

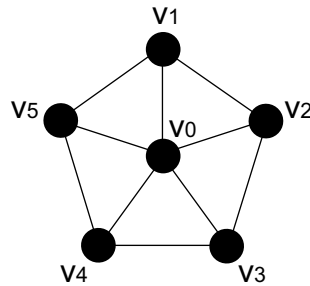


Figura 6:  $W_5$ .

Como puede observarse en la figura 7, al complementar localmente a  $W_5$  por  $v_0$ , se vuelve a obtener a  $W_5$  como grafo resultante (con una numeración diferente de sus vértices).

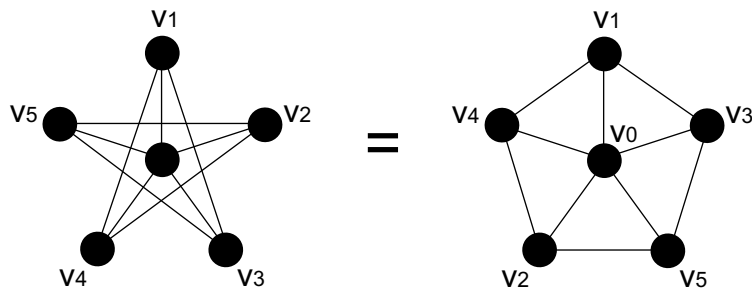


Figura 7: Complementación local de  $W_5$  por  $v_0$ .

Al complementar localmente a  $W_5$  por el vértice  $v_1$  se obtiene el grafo de la figura 8 (complementando localmente por  $v_2, v_3, v_4$  o  $v_5$  el grafo resultante es isomorfo).

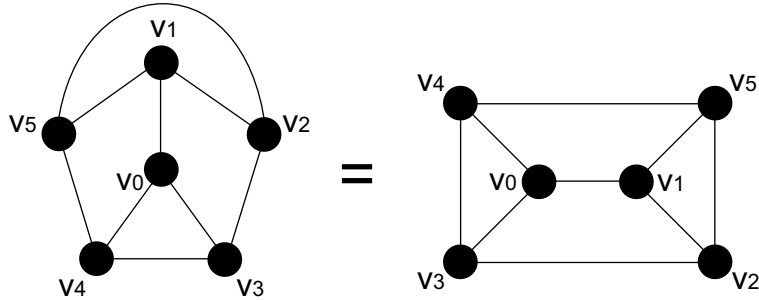


Figura 8: Complementación local de  $W_5$  por  $v_1$ .

Este grafo, al que llamaremos  $W_{5_1}$ , es también una estructura prohibida para la clase de grafos de Bouchet.

Una particularidad del grafo  $W_{5_1}$  es que al complementarlo localmente por cualquiera de sus vértices se obtiene como resultado el mismo grafo. Utilizando la propiedad 1.2 se tiene que  $LC(W_{5_1}, v_0) = W_5$ , y esto es igual para cualquiera de sus vértices.

El resultado de la clausura de  $W_5$  por complementación local es la familia  $F_{W_5}$ , compuesta por los dos grafos de la figura 9. Las transiciones entre sus miembros está dada por la tabla 1<sup>1</sup>.

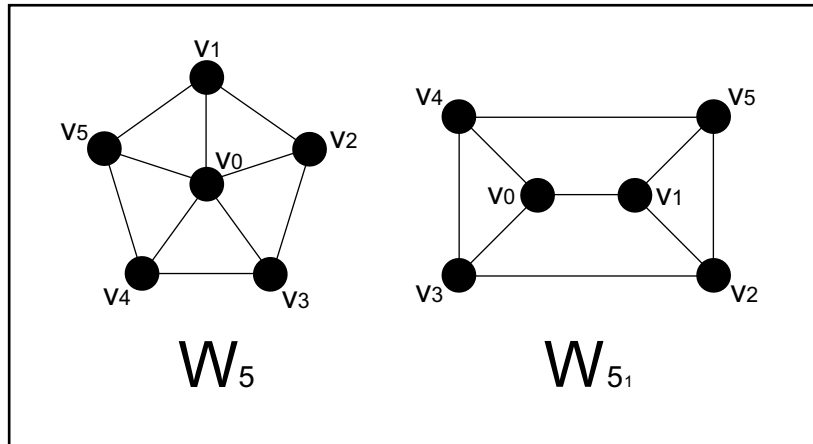


Figura 9: Familia de grafos  $F_{W_5}$ .

<sup>1</sup>Tanto en la tabla de la familia  $F_{W_5}$ , como en las de  $F_{BW_3}$  y  $F_{W_7}$ , que la entrada  $(i, j)$  sea  $G$  significa que al complementar el grafo  $i$  por el vértice  $j$  se obtiene como resultado un grafo isomorfo a  $G$ , no necesariamente con la misma numeración de vértices.



	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$W_5$	$W_5$	$W_{5_1}$	$W_{5_1}$	$W_{5_1}$	$W_{5_1}$	$W_{5_1}$
$W_{5_1}$	$W_5$	$W_5$	$W_5$	$W_5$	$W_5$	$W_5$

Tabla 1: Transiciones de la familia  $F_{W_5}$ .

### 2.2.2 Clausura de $BW_3$

Al complementar a localmente a  $BW_3$ , alcanza con considerar tres casos:  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_6$  (siguiendo la numeración de los vértices de la figura 10). El resto de los vértices produce trivialmente grafos isomorfos a alguno de estos. Complementando por  $v_0$  y  $v_1$  se obtienen grafos isomorfos a  $LC(G, v_3)$ , y al hacerlo por  $v_4$  y  $v_5$  lo mismo ocurre con  $LC(G, v_6)$ .

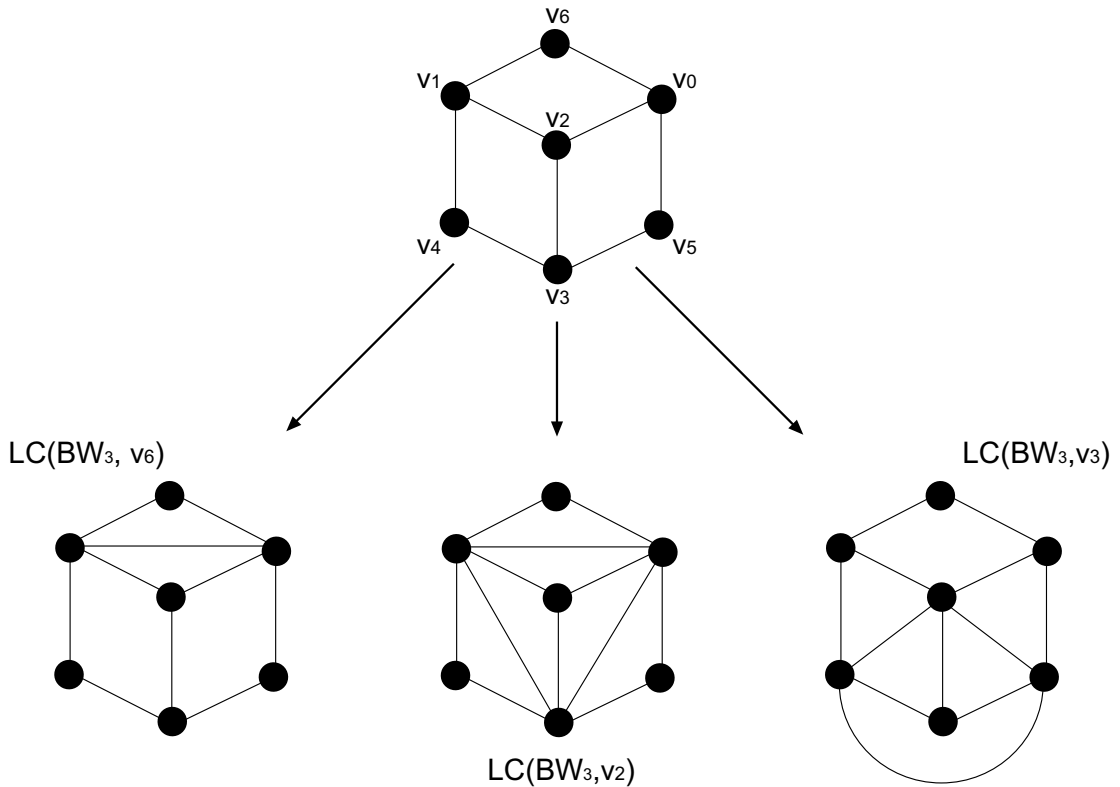


Figura 10: Complementación local de  $BW_3$ .

El resultado de la clausura completa de  $BW_3$  es la familia  $F_{BW_3}$  de 9 grafos que muestra la figura 11. La transición entre sus miembros está dada en la tabla 2.

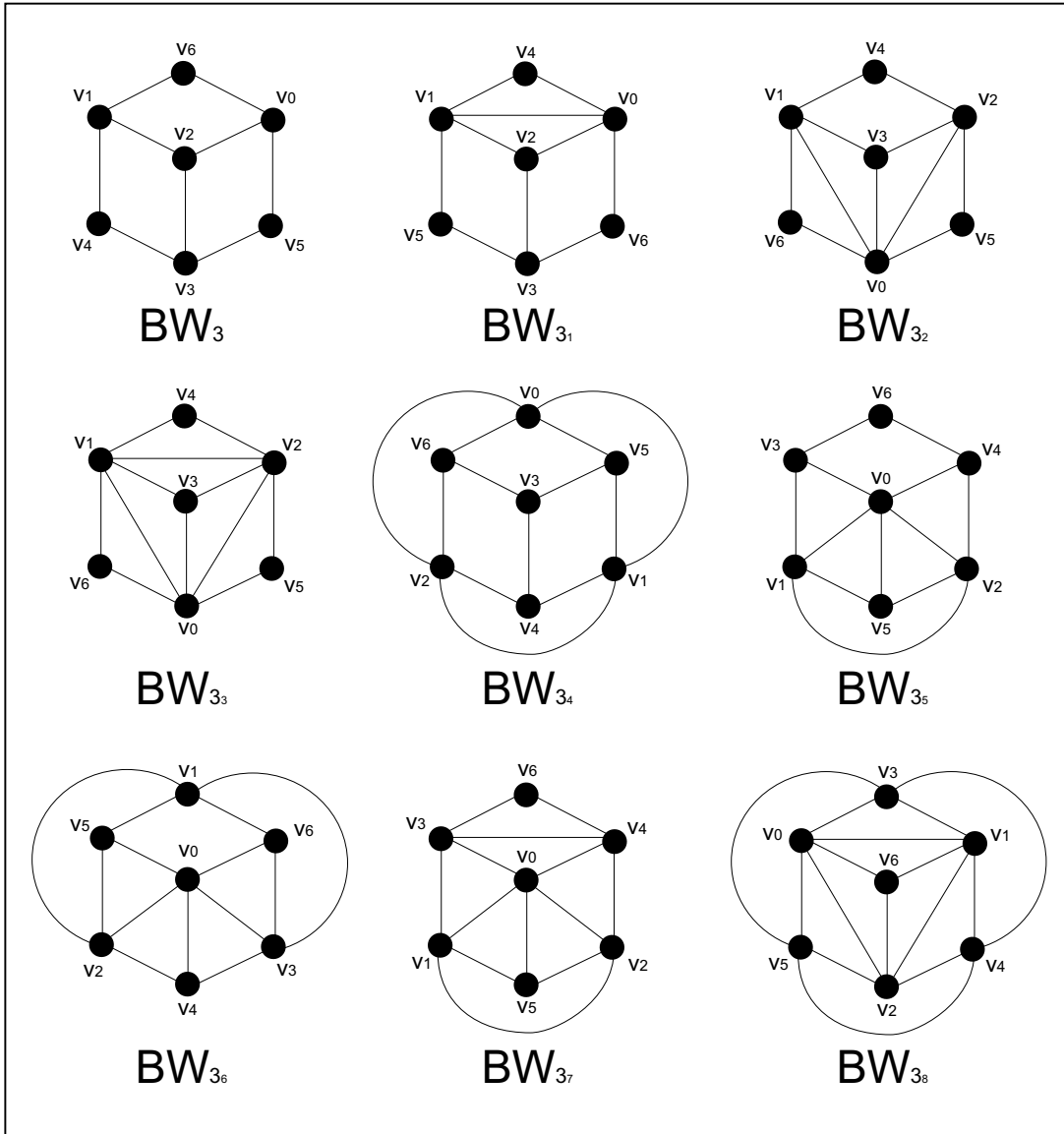


Figura 11: Familia de grafos  $F_{BW_3}$ .

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$BW_3$	$BW_{35}$	$BW_{35}$	$BW_{33}$	$BW_{35}$	$BW_{31}$	$BW_{31}$	$BW_{31}$
$BW_{31}$	$BW_{35}$	$BW_{35}$	$BW_{32}$	$BW_{37}$	$BW_3$	$BW_{32}$	$BW_{32}$
$BW_{32}$	$BW_{37}$	$BW_{37}$	$BW_{37}$	$BW_{31}$	$BW_{33}$	$BW_{31}$	$BW_{31}$
$BW_{33}$	$BW_{35}$	$BW_{35}$	$BW_{35}$	$BW_3$	$BW_{32}$	$BW_{32}$	$BW_{32}$
$BW_{34}$	$BW_{34}$	$BW_{34}$	$BW_{34}$	$BW_{38}$	$BW_{36}$	$BW_{36}$	$BW_{36}$
$BW_{35}$	$BW_{33}$	$BW_{31}$	$BW_{31}$	$BW_{36}$	$BW_{36}$	$BW_3$	$BW_{37}$
$BW_{36}$	$BW_{38}$	$BW_{38}$	$BW_{37}$	$BW_{37}$	$BW_{34}$	$BW_{35}$	$BW_{35}$
$BW_{37}$	$BW_{32}$	$BW_{32}$	$BW_{32}$	$BW_{36}$	$BW_{36}$	$BW_{31}$	$BW_{35}$
$BW_{38}$	$BW_{36}$	$BW_{36}$	$BW_{36}$	$BW_{36}$	$BW_{36}$	$BW_{36}$	$BW_{34}$

Tabla 2: Transiciones de la familia  $F_{BW_3}$ .

### 2.2.3 Clausura de $W_7$

Procediendo de la misma forma que con  $W_5$  y  $BW_3$ , los grafos de la familia  $F_{W_7}$  generada a partir de  $W_7$  son los que muestran las figuras 13, 14 y 15, y la transición entre ellos la que refleja la tabla 3.

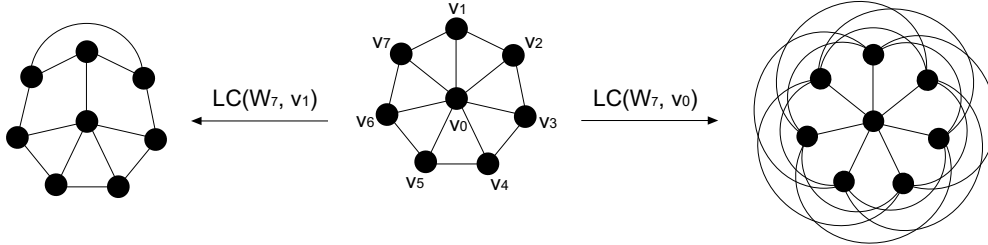


Figura 12: Complementación local de  $W_7$ .

	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
$W_7$	$W_{7_{21}}$	$W_{7_2}$	$W_{7_2}$	$W_{7_2}$	$W_{7_2}$	$W_{7_2}$	$W_{7_2}$	$W_{7_2}$
$W_{7_1}$	$W_{7_9}$	$W_{7_9}$	$W_{7_9}$	$W_{7_9}$	$W_{7_9}$	$W_{7_9}$	$W_{7_9}$	$W_{7_9}$
$W_{7_2}$	$W_{7_{15}}$	$W_7$	$W_{7_4}$	$W_{7_5}$	$W_{7_7}$	$W_{7_7}$	$W_{7_5}$	$W_{7_4}$
$W_{7_3}$	$W_{7_{17}}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_4}$	$W_{7_4}$	$W_{7_6}$	$W_{7_7}$	$W_{7_6}$	$W_{7_{12}}$
$W_{7_4}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_2}$	$W_{7_3}$	$W_{7_3}$	$W_{7_2}$	$W_{7_8}$	$W_{7_8}$
$W_{7_5}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{13}}$	$W_{7_2}$	$W_{7_2}$	$W_{7_8}$	$W_{7_{10}}$	$W_{7_{10}}$	$W_{7_8}$
$W_{7_6}$	$W_{7_{18}}$	$W_{7_{18}}$	$W_{7_8}$	$W_{7_{15}}$	$W_{7_{15}}$	$W_{7_3}$	$W_{7_3}$	$W_{7_8}$
$W_{7_7}$	$W_{7_{10}}$	$W_{7_2}$	$W_{7_3}$	$W_{7_3}$	$W_{7_2}$	$W_{7_2}$	$W_{7_{10}}$	$W_{7_2}$
$W_{7_8}$	$W_{7_{10}}$	$W_{7_{17}}$	$W_{7_{16}}$	$W_{7_{13}}$	$W_{7_5}$	$W_{7_4}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_6}$
$W_{7_9}$	$W_{7_{15}}$	$W_{7_{15}}$	$W_{7_{10}}$	$W_{7_{11}}$	$W_{7_{18}}$	$W_{7_1}$	$W_{7_{18}}$	$W_{7_{11}}$
$W_{7_{10}}$	$W_{7_9}$	$W_{7_8}$	$W_{7_8}$	$W_{7_7}$	$W_{7_5}$	$W_{7_5}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_{12}}$
$W_{7_{11}}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_{16}}$	$W_{7_{16}}$	$W_{7_9}$	$W_{7_9}$
$W_{7_{12}}$	$W_{7_{18}}$	$W_{7_4}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{11}}$	$W_{7_3}$	$W_{7_8}$	$W_{7_{15}}$	$W_{7_{10}}$
$W_{7_{13}}$	$W_{7_5}$	$W_{7_5}$	$W_{7_{14}}$	$W_{7_{14}}$	$W_{7_8}$	$W_{7_8}$	$W_{7_8}$	$W_{7_8}$
$W_{7_{14}}$	$W_{7_{13}}$	$W_{7_{13}}$	$W_{7_{13}}$	$W_{7_{13}}$	$W_{7_{17}}$	$W_{7_{17}}$	$W_{7_{17}}$	$W_{7_{17}}$
$W_{7_{15}}$	$W_{7_{18}}$	$W_{7_2}$	$W_{7_9}$	$W_{7_9}$	$W_{7_6}$	$W_{7_6}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_{12}}$
$W_{7_{16}}$	$W_{7_{21}}$	$W_{7_{17}}$	$W_{7_8}$	$W_{7_8}$	$W_{7_{17}}$	$W_{7_{11}}$	$W_{7_{11}}$	$W_{7_{18}}$
$W_{7_{17}}$	$W_{7_{16}}$	$W_{7_{16}}$	$W_{7_8}$	$W_{7_8}$	$W_{7_3}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{14}}$	$W_{7_{19}}$
$W_{7_{18}}$	$W_{7_{15}}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_6}$	$W_{7_6}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_9}$	$W_{7_9}$	$W_{7_{16}}$
$W_{7_{19}}$	$W_{7_5}$	$W_{7_{20}}$	$W_{7_{11}}$	$W_{7_{11}}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_{12}}$	$W_{7_{17}}$	$W_{7_{17}}$
$W_{7_{20}}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{19}}$	$W_{7_{19}}$
$W_{7_{21}}$	$W_7$	$W_{7_{16}}$	$W_{7_{16}}$	$W_{7_{16}}$	$W_{7_{16}}$	$W_{7_{16}}$	$W_{7_{16}}$	$W_{7_{16}}$

Tabla 3: Transiciones de la familia  $F_{W_7}$ .

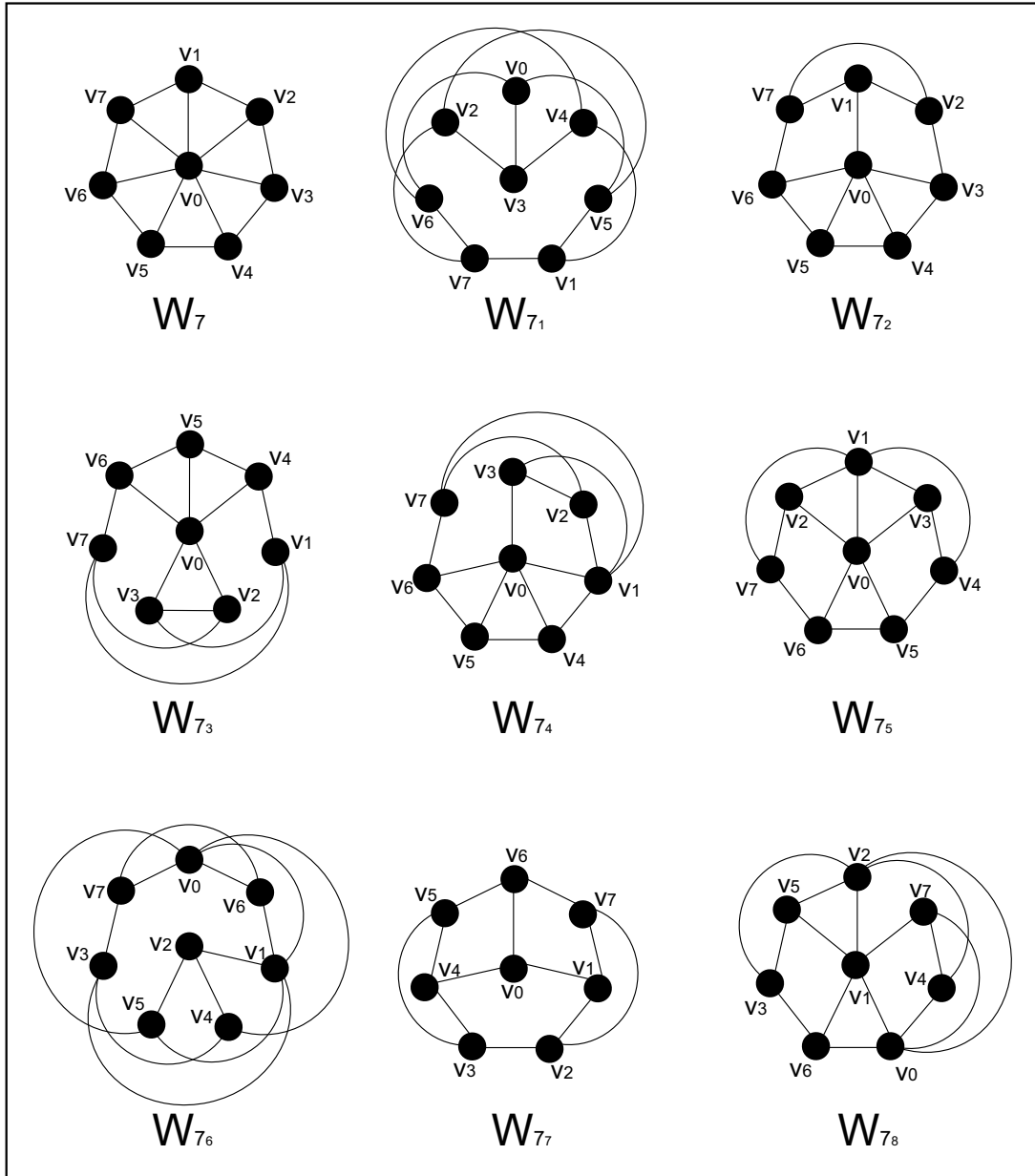


Figura 13: Primeros 9 grafos de la familia  $F_{W_7}$ .

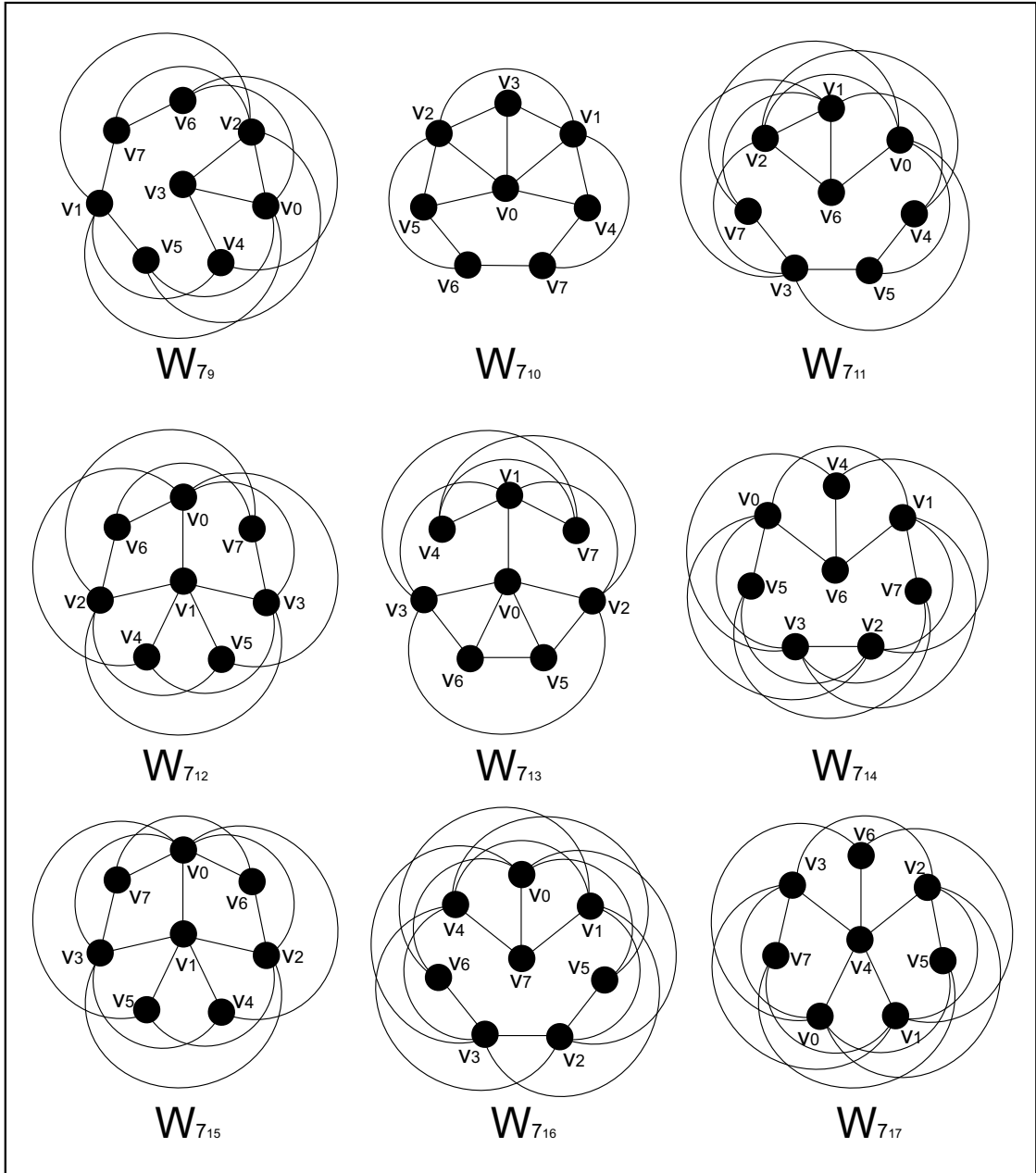


Figura 14: Grafos  $W_{7_9}$  al  $W_{7_{17}}$  de la familia  $F_{W_7}$ .

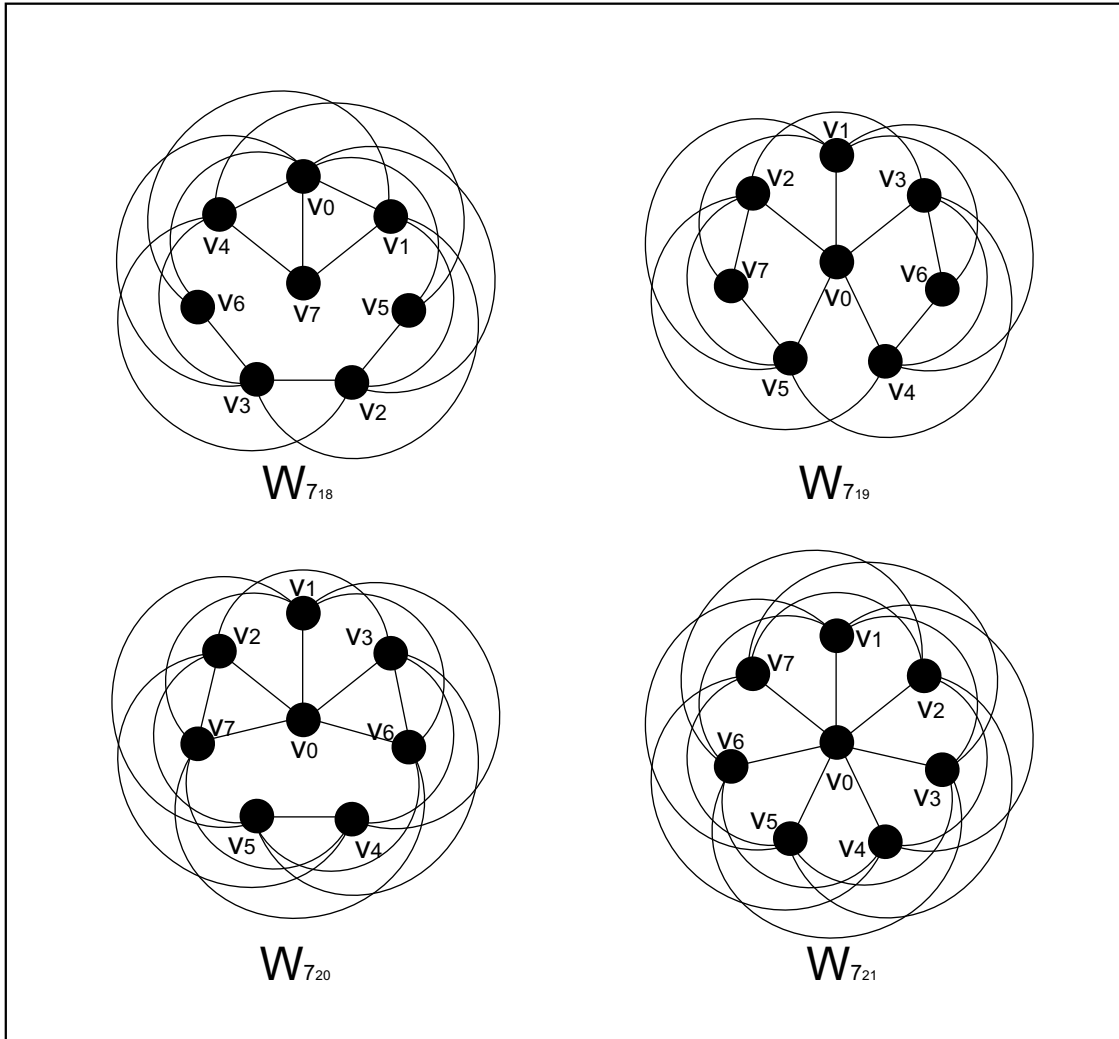


Figura 15: Grafos  $W_{718}$  al  $W_{721}$  de la familia  $F_{W_7}$ .

### 2.2.4 Conjunto minimal

La unión de las familias  $F_{W_5}$ ,  $F_{BW_3}$  y  $F_{W_7}$  conforman un conjunto minimal de estructuras prohibidas que caracterizan a los grafos de Bouchet. Esto significa que cualquier subconjunto  $S$  incluido estrictamente en  $F_{W_5} \cup F_{BW_3} \cup F_{W_7}$  no es suficiente para caracterizar a la clase.

Para probar la minimalidad del conjunto hay que mostrar que ninguna de las estructuras prohibidas sea subgrafo inducido de otra estructura prohibida. Considerando la cantidad de vértices que tienen los grafos de cada una de las tres familias, resulta suficiente ver que ningún grafo de  $F_{W_5}$  es subgrafo inducido de alguno de  $F_{BW_3} \cup F_{W_7}$ , y que tampoco existe un grafo en  $F_{BW_3}$  que sea subgrafo inducido de alguno perteneciente a  $F_{W_7}$ . Más aún, de acuerdo a los lemas 2.1 y 2.2 que figuran a continuación, alcanza sólo con ver que  $W_5$  no es subgrafo inducido de alguno perteneciente a  $F_{BW_3} \cup F_{W_7}$ , y que tampoco lo es  $BW_3$  de aquellos en  $F_{W_7}$ .

**Lema 2.1** *Sea  $G \in F_{W_5}$ . Si  $G$  es subgrafo inducido de un grafo  $H \in F_{BW_3} \cup F_{W_7}$ , entonces para todo grafo  $G' \in F_{W_5}$  existe un grafo  $H' \in F_{BW_3} \cup F_{W_7}$  tal que  $G'$  es subgrafo inducido de  $H'$ .*

*Demostración:*

Supongamos que  $G \in F_{W_5}$  es subgrafo inducido de  $H \in F_{BW_3} \cup F_{W_7}$ . Sean  $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$  los vértices de  $G$  y  $\{w_1, w_2, \dots, w_6\}$  los de  $H$  que inducen el subgrafo isomorfo a  $G$ . Supongamos también que el isomorfismo vale reemplazando  $v_i$  por  $w_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ).

Como  $G$  y  $G'$  pertenecen a  $F_{W_5}$ , existe una secuencia de  $k$  vértices  $v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_{i_k}$  de  $G$  tal que:

$$G' = LC(LC(LC(\dots LC(LC(G, v_{i_1}), v_{i_2})\dots), v_{i_{k-1}}), v_{i_k})$$

Entonces, por sucesivas aplicaciones de la propiedad 1.1 de la complementación local, el grafo

$$H' = LC(LC(LC(\dots LC(LC(H, w_{i_1}), w_{i_2})\dots), w_{i_{k-1}}), w_{i_k})$$

tiene como subgrafo inducido a  $G'$ . Por último, como  $H'$  es localmente equivalente a  $H$ ,  $H'$  pertenece a  $F_{BW_3} \cup F_{W_7}$ .  $\square$

Utilizando el mismo esquema de demostración se prueba este otro lema:

**Lema 2.2** *Sea  $G \in F_{BW_3}$ . Si  $G$  es subgrafo inducido de un grafo  $H \in F_{W_7}$ , entonces para todo grafo  $G' \in F_{BW_3}$  existe un grafo  $H' \in F_{W_7}$  tal que  $G'$  es subgrafo inducido de  $H'$ .*

Utilizando la computadora, se ha verificado que efectivamente no existe ningún grafo en  $F_{BW_3} \cup F_{W_7}$  que tenga como subgrafo inducido a  $W_5$ , ni tampoco alguno en  $F_{W_7}$  que contenga inducido a  $BW_3$ . En consecuencia, el conjunto de 33 subgrafos prohibidos es minimal.

### 2.2.5 Algoritmo de Clausura

Para obtener el conjunto de subgrafos prohibidos que caracterizan a los grafos de Bouchet se realizó una implementación que obtiene la clausura por complementación local de los grafos  $W_5$ ,  $BW_3$  y  $W_7$ .

La función *ClausuraLC* recibe como único parámetro un grafo *Semilla* y devuelve como resultado el conjunto de grafos que conforman la clausura por complementación local de *Semilla*, recorriendo el espacio de búsqueda mediante un algoritmo BFS.

#### **Funcion ClausuraLC(Grafo *Semilla*): Conjunto**

1. Variables Locales:  
 $n, i: \mathbb{N}; C: \text{Cola}; G: \text{Grafo}; \text{Resultado}: \text{Conjunto}$
2.  $\text{Resultado} := \emptyset$
3.  $n := \text{Semilla.cantVertices}$
4.  $C.\text{encolar}(\text{Semilla})$
5. Mientras ( $\neg C.\text{vacía}$ )
  - (a)  $G := C.\text{primero}$
  - (b) Si ( $G \notin \text{Resultado}$ ) entonces
    - i.  $\text{Resultado} := \text{Resultado} \cup \{G\}$
    - ii. Para  $i = 0 \dots n - 1$   $C.\text{encolar}(\text{ComplementacionLocal}(G, v_i))$
6. Devolver *Resultado*

A partir de *ClausuraLC* se construye trivialmente la función *SubgrafosProhibidosBouchet*, que devuelve el conjunto de subgrafos prohibidos para la clase.

#### **Funcion SubgrafosProhibidosBouchet(): Conjunto**

1. Variable Local:  
 $\text{Resultado}: \text{Conjunto}$
2.  $\text{Resultado} := \emptyset$
3.  $\text{Resultado} := \text{Resultado} \cup \text{ClausuraLC}(W_5)$
4.  $\text{Resultado} := \text{Resultado} \cup \text{ClausuraLC}(BW_3)$
5.  $\text{Resultado} := \text{Resultado} \cup \text{ClausuraLC}(W_7)$
6. Devolver *Resultado*



## 2.3 Generalización de grafos de intervalos

### 2.3.1 Grafos de intervalos

Un grafo  $G$  se dice de intervalos si sus vértices pueden ser puestos en una correspondencia 1-1 con un conjunto de intervalos  $\mathcal{L}$  de la recta real, tal que dos vértices son adyacentes en  $G$  si y sólo si sus correspondientes intervalos tienen intersección no vacía. Se llama a  $\mathcal{L}$  una representación de intervalos para  $G$ . Una representación de intervalos del grafo *molino* puede observarse en la figura 16.

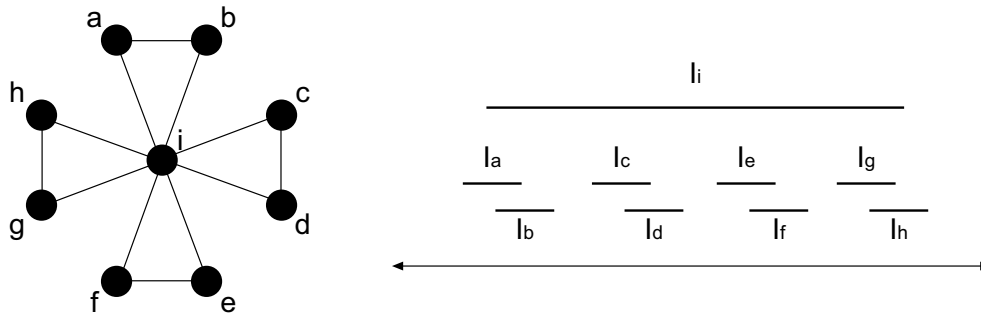


Figura 16: Un grafo de intervalos y una representación posible.

Algunos de los problemas de grafos que en el caso general son NP-Completos, como el de coloreo, tienen solución polinomial en esta clase [17] [24]. Asimismo, en [21] se ha probado que poseen una caracterización mediante infinitos subgrafos prohibidos:

**Teorema 2.2** *Un grafo  $G$  es de intervalos si y sólo si  $G$  no posee como subgrafo inducido a ninguno de los grafos de la figura 17.*

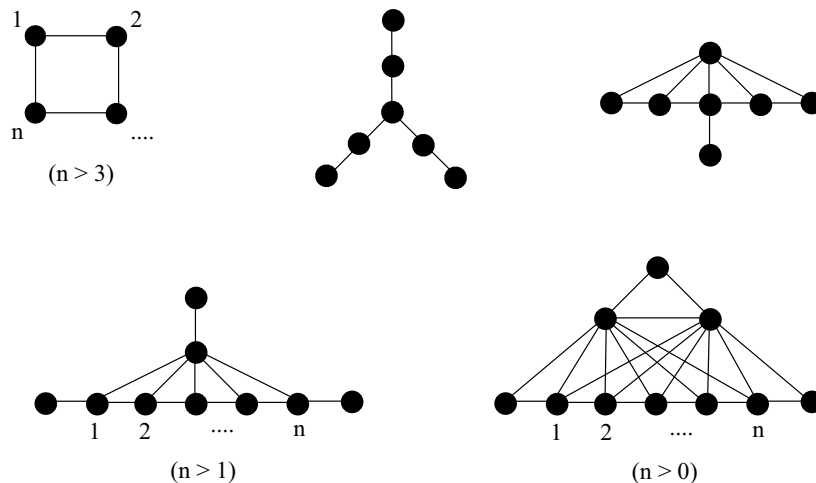


Figura 17: Estructuras prohibidas para grafos de intervalos.

En cuanto a su reconocimiento, la clase de grafos de intervalos posee un algoritmo de complejidad polinomial [4].

### 2.3.2 Intervalos $\subseteq$ Bouchet

Los grafos de intervalos han sido muy estudiados en la literatura. Existen diversas caracterizaciones para esta clase. Una de ellas fue propuesta por Gilmore y Hoffman en 1964 en [14], y es enunciada en el siguiente teorema:

**Teorema 2.3** *Un grafo  $G$  es de intervalos si y sólo si  $G$  es triangulado y su complemento  $\overline{G}$  de comparabilidad.*

Utilizando este resultado se prueba que los grafos de intervalos son una subclase de los grafos de Bouchet.

**Teorema 2.4** *Sea  $G$  un grafo de intervalos. Entonces  $G$  es un grafo de Bouchet.*

*Demostración:*

Como veremos a continuación, ninguno de los 33 subgrafos prohibidos es de intervalos. Entonces, si un grafo  $G$  es de intervalos no puede tener como subgrafo inducido a ninguna de las estructuras prohibidas para la clase de Bouchet. Por lo tanto,  $G$  es necesariamente un grafo de Bouchet.

A excepción de  $BW_{3_3}$ , los restantes 32 subgrafos prohibidos no son triangulados. Entonces, por el teorema 2.3 tampoco son de intervalos. Las tablas 4, 5 y 6 muestran ciclos inducidos de al menos 4 vértices para cada uno de ellos.

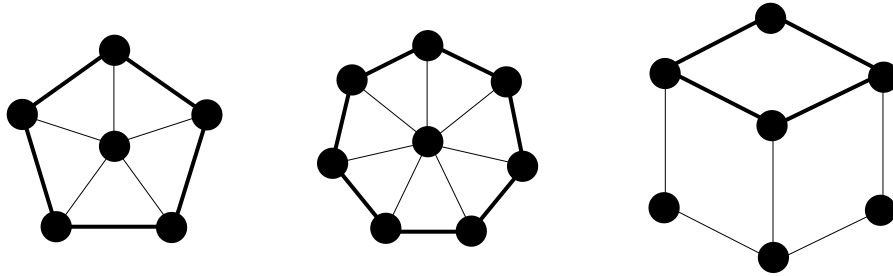


Figura 18: Ciclos inducidos marcados en negrita en  $W_5$ ,  $W_7$  y  $BW_3$ .

<i>Grafo</i>	<i>Ciclo Inducido</i>
$W_5$	$v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_1$
$W_{5_1}$	$v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_0$

Tabla 4: Ciclos inducidos en  $F_{W_5}$ .

Resta ver que  $BW_{3_3}$  no es de intervalos. Para ello, veamos que  $\overline{BW_{3_3}}$  no es de comparabilidad, y nuevamente por el teorema 2.3 tampoco de intervalos.

<i>Grafo</i>	<i>Ciclo Inducido</i>
$BW_3$	$v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_1$
$BW_{3_1}$	$v_1 - v_2 - v_3 - v_5 - v_1$
$BW_{3_2}$	$v_1 - v_3 - v_2 - v_4 - v_1$
$BW_{3_3}$	—
$BW_{3_4}$	$v_2 - v_4 - v_3 - v_6 - v_2$
$BW_{3_5}$	$v_0 - v_4 - v_6 - v_3 - v_0$
$BW_{3_6}$	$v_0 - v_6 - v_1 - v_5 - v_0$
$BW_{3_7}$	$v_1 - v_2 - v_4 - v_3 - v_1$
$BW_{3_8}$	$v_3 - v_1 - v_2 - v_5 - v_1$

Tabla 5: Ciclos inducidos en  $F_{BW_3}$ .

<i>Grafo</i>	<i>Ciclo Inducido</i>
$W_7$	$v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_1$
$W_{7_1}$	$v_0 - v_5 - v_1 - v_7 - v_6 - v_0$
$W_{7_2}$	$v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_0$
$W_{7_3}$	$v_1 - v_3 - v_2 - v_7 - v_1$
$W_{7_4}$	$v_1 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_1$
$W_{7_5}$	$v_0 - v_2 - v_7 - v_6 - v_0$
$W_{7_6}$	$v_0 - v_1 - v_2 - v_4 - v_0$
$W_{7_7}$	$v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_0$
$W_{7_8}$	$v_1 - v_5 - v_3 - v_6 - v_1$
$W_{7_9}$	$v_0 - v_1 - v_7 - v_6 - v_0$
$W_{7_{10}}$	$v_1 - v_2 - v_6 - v_7 - v_1$
$W_{7_{11}}$	$v_3 - v_5 - v_4 - v_2 - v_3$
$W_{7_{12}}$	$v_0 - v_1 - v_2 - v_6 - v_0$
$W_{7_{13}}$	$v_3 - v_6 - v_5 - v_2 - v_3$
$W_{7_{14}}$	$v_0 - v_1 - v_7 - v_5 - v_0$
$W_{7_{15}}$	$v_7 - v_6 - v_2 - v_3 - v_7$
$W_{7_{16}}$	$v_2 - v_4 - v_7 - v_0 - v_2$
$W_{7_{17}}$	$v_3 - v_7 - v_5 - v_2 - v_3$
$W_{7_{18}}$	$v_7 - v_1 - v_3 - v_4 - v_7$
$W_{7_{19}}$	$v_3 - v_6 - v_1 - v_0 - v_3$
$W_{7_{20}}$	$v_2 - v_3 - v_6 - v_7 - v_2$
$W_{7_{21}}$	$v_1 - v_4 - v_2 - v_5 - v_1$

Tabla 6: Ciclos inducidos en  $F_{W_7}$ .

No es posible establecer una orientación de las aristas del grafo  $\overline{BW}_{3_3}$  de forma de que resulte de comparabilidad. La figura 19(a) muestra a  $\overline{BW}_{3_3}$ . Como puede observarse, la arista  $(v_4, v_6)$  puede ser orientada en cualquier dirección sin perder generalidad. Consideremos la orientación  $v_6 \rightarrow v_4$  (figura 19(b)). Consecuentemente,  $(v_2, v_6)$  y  $(v_0, v_4)$  deben ser orientadas en los sentidos  $v_6 \rightarrow v_2$  y  $v_0 \rightarrow v_4$  respectivamente (figura 19(c)). Entonces, el sentido de  $(v_4, v_5)$  y  $(v_5, v_6)$  debe ser necesariamente  $v_5 \rightarrow v_4$  y  $v_6 \rightarrow v_5$  (figura 19(d)). Ahora, no es posible orientar la arista  $(v_1, v_5)$  para que el grafo resulte de comparabilidad.

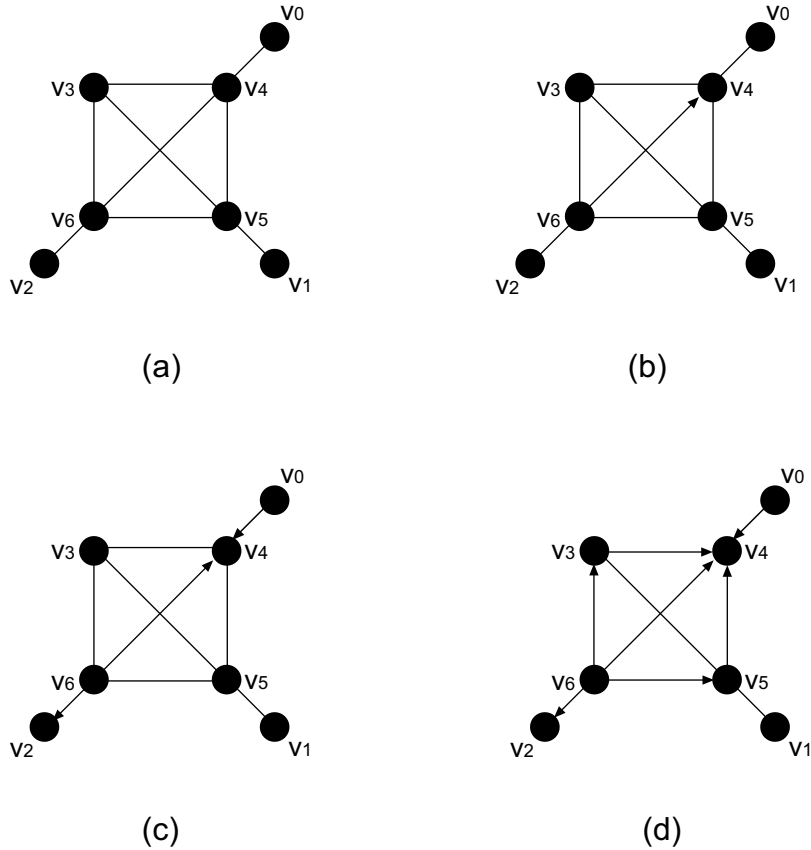


Figura 19:  $\overline{BW}_{3_3}$  no es de comparabilidad.

De esta manera, ninguna de las estructuras prohibidas es de intervalos. En consecuencia, la clase de grafos de intervalos está contenida en la de Bouchet.  $\square$

Al igual que los circulares, los grafos de intervalos están incluidos en forma estricta en los de Bouchet. Por ejemplo, el grafo  $C_4$  de la figura 20 es de Bouchet (cualquier grafo de cinco o menos vértices lo es) y no de intervalos.

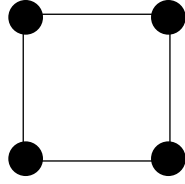


Figura 20: Grafo de Bouchet y no de intervalos.

## 2.4 ¿Bouchet = circulares $\cup$ intervalos?

En las secciones 2.1 y 2.3 hemos visto que los grafos de Bouchet generalizan a las clases de grafos circulares y de intervalos. Como consecuencia inmediata se puede afirmar que generalizan a la unión de ambas clases.

A partir de los ejemplos utilizados para mostrar que ambas inclusiones son estrictas, resulta sencillo construir un grafo que pertenezca a la clase de Bouchet y no la unión de circulares e intervalos. La figura 21 muestra un grafo no perteneciente a la unión y sí a la clase de Bouchet. No es circular porque tiene como subgrafo inducido a un grafo no circular (el mismo de la figura 5), y no es de intervalos debido a que  $C_4$  es un subgrafo inducido del mismo. Sin embargo, como no tiene inducido a ninguno de los 33 subgrafos prohibidos, el grafo es de Bouchet.

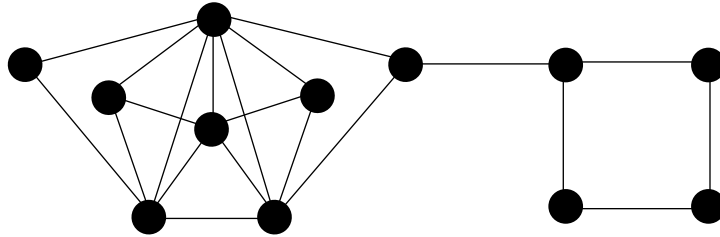


Figura 21: La inclusión de la unión es estricta.

Este ejemplo es suficiente para establecer que la inclusión de la unión también es estricta.

## 2.5 Reconocimiento polinomial

Al ser caracterizada mediante una cantidad finita de subgrafos prohibidos, cada uno de ellos con cantidad de vértices acotada, la clase de grafos de Bouchet posee un algoritmo de reconocimiento polinomial. Un grafo  $G$  pertenecerá a la clase si y sólo si:

1. ningún subgrafo inducido de  $G$  es isomorfo a algún grafo de  $F_{W_5}$ ;
2. ningún subgrafo inducido de  $G$  es isomorfo a algún grafo de  $F_{BW_3}$ ;
3. ningún subgrafo inducido de  $G$  es isomorfo a algún grafo de  $F_{W_7}$ .

En el primer caso alcanza con considerar sólo aquellos subgrafos inducidos de 6 vértices, en el segundo los de 7, y en el último los de 8. Estos tres chequeos pueden realizarse en tres etapas independientes. Veamos que cada una de ellas es realizable en tiempo polinomial.

Consideremos el primer caso. Sea  $G = (V(G), E(G))$  un grafo tal que  $|V(G)| = n$ . La cantidad de subgrafos inducidos de  $G$  de 6 vértices es:

$$\binom{n}{6} = \frac{n!}{6!(n-6)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!} \approx O(n^6)$$

El testeo consistiría en ver que ninguno de estos subgrafos es isomorfo a alguno de los de la familia  $F_{W_5}$ . Si bien en el caso general la complejidad de determinar isomorfismo entre dos grafos es desconocida, en este caso particular los chequeos pueden realizarse en orden constante, ya que el número de vértices de los grafos involucrados es una constante. Puntualmente habría que ver que todo subgrafo inducido de 6 vértices  $H$  de  $G$  no sea isomorfo a  $W_5$  o  $W_{5_1}$ . Cada uno de estos chequeos puede ser realizado en forma independiente y tiempo constante. Por ejemplo, si se está representando a los grafos como matrices de adyacencias, basta considerar todas las posibles permutaciones de filas-columnas de  $M_H$  ( $6!$  en total) y ver si cada una de estas coincide o no con  $M_{W_5}$  o  $M_{W_{5_1}}$ . Entonces, el chequeo para cada uno de los subgrafos de 6 vértices es realizable en tiempo constante, pudiendo completarse esta etapa en  $O(n^6)$ .

Utilizando el mismo esquema de razonamiento se obtiene que en los casos de las familias  $F_{BW_3}$  y  $F_{W_7}$  los chequeos también pueden ser realizados en tiempo polinomial. En estos dos casos las complejidades son de  $O(n^7)$  y  $O(n^8)$ , ya que se deben analizar todos los subgrafos inducidos de 7 y 8 vértices respectivamente. Como cada una de estas etapas es realizable en forma independiente, resulta que la complejidad total es de  $O(n^8)$ . Así, la clase de grafos de Bouchet tiene un algoritmo polinomial para su reconocimiento.

### 3 Generalización del teorema de Bouchet

Utilizando las familias  $F_{W_5}$ ,  $F_{BW_3}$  y  $F_{W_7}$ , se puede probar que el teorema 1.1 de caracterización de grafos circulares puede ser enunciado de 396 formas equivalentes. Veamos en primer lugar los siguientes lemas:

**Lema 3.1** *Sea  $G$  un grafo cualquiera y  $G_{W_5} \in F_{W_5}$ . Entonces,  $G$  es localmente equivalente a un grafo  $H$  que tiene como subgrafo inducido a  $W_5$  si y sólo si es localmente equivalente a un grafo  $H'$  que tiene como subgrafo inducido a  $G_{W_5}$ .*

*Demostración:*

Como  $G_{W_5} \in F_{W_5}$ , existe una secuencia de  $k$  vértices  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_{i_k}$  tal que  $LC(LC(LC(\dots LC(LC(W_5, v_{i_1}), v_{i_2})\dots), v_{i_{k-1}}), v_{i_k}) = G_{W_5}$ .

$\Rightarrow$ )  $G$  es localmente equivalente a un grafo  $H$  que tiene como subgrafo inducido a  $W_5$ .

Como  $W_5$  y  $G_{W_5}$  son localmente equivalentes, por sucesivas aplicaciones de la propiedad 1.1 el grafo

$$H' = LC(LC(LC(\dots LC(LC(H, v_{i_1}), v_{i_2})\dots), v_{i_{k-1}}), v_{i_k})$$

tiene como subgrafo inducido a  $G_{W_5}$ . Entonces, por la propiedad 1.4  $G$  es localmente equivalente a  $H'$ .

$\Leftarrow$ )  $G$  es localmente equivalente a un grafo  $H'$  que tiene como subgrafo inducido a  $G_{W_5}$ .

Como  $W_5$  y  $G_{W_5}$  son localmente equivalentes, por la propiedad 1.1 el grafo

$$H = LC(LC(LC(\dots LC(LC(H', v_{i_k}), v_{i_{k-1}})\dots), v_{i_2}), v_{i_1})$$

tiene como subgrafo inducido a  $W_5$ . Entonces, por la propiedad 1.4  $G$  es localmente equivalente a  $H$ .  $\square$

De igual forma pueden ser probados los siguientes dos lemas:

**Lema 3.2** *Sea  $G$  un grafo cualquiera y  $G_{BW_3} \in F_{BW_3}$ . Entonces,  $G$  es localmente equivalente a un grafo  $H$  que tiene como subgrafo inducido a  $BW_3$  si y sólo si es localmente equivalente a un grafo  $H'$  que tiene como subgrafo inducido a  $G_{BW_3}$ .*

**Lema 3.3** *Sea  $G$  un grafo cualquiera y  $G_{W_7} \in F_{W_7}$ . Entonces,  $G$  es localmente equivalente a un grafo  $H$  que tiene como subgrafo inducido a  $W_7$  si y sólo si es localmente equivalente a un grafo  $H'$  que tiene como subgrafo inducido a  $G_{W_7}$ .*

Finalmente, la generalización de la caracterización de grafos circulares está enunciada en el siguiente teorema:

**Teorema 3.1** *Existen 396 formulaciones equivalentes del teorema 1.1, reemplazando  $W_5$  por cualquiera de  $F_{W_5}$  (2 grafos),  $BW_3$  por cualquiera de  $F_{BW_3}$  (9 grafos), y  $W_7$  por cualquiera de  $F_{W_7}$  (22 grafos).*

*Demostración:*

Es una consecuencia directa de los lemas 3.1, 3.2, 3.3 y de que  $2 \times 9 \times 22 = 396$ . □



## 4 Conclusiones

En este trabajo se ha definido una nueva clase de grafos utilizando las ideas presentadas por André Bouchet en su teorema de caracterización de grafos circulares. Uno de los conceptos que usa dicho teorema es el de complementación local de un grafo. En la sección 1.3 se han probado un conjunto de propiedades de la complementación local que luego fueron utilizadas en el posterior estudio de la nueva clase. Queda como trabajo futuro un estudio profundo sobre este operador. Un enfoque posible es ver cómo queda particionado el conjunto de los grafos de  $n$  vértices mediante la clausura por complementación local, analizando las distintas clases de equivalencia que se generan.

El estudio en sí mismo de los grafos de Bouchet es presentado en la sección 2. Como se ha podido ver, esta nueva clase de grafos resulta en una generalización de otras muy estudiadas, como los circulares y los de intervalos. Queda pendiente ver qué pasa en esta clase con aquellos problemas que en el caso general son NP-Complejos, pero cuentan con soluciones de complejidad polinomial en circulares e intervalos.

Una de las particularidades de los grafos de Bouchet es que poseen una caracterización mediante subgrafos prohibidos. Para obtener el conjunto de estructuras prohibidas resultó esencial la utilización de la computadora, sin la cual habría sido imposible clausurar los conjuntos de grafos sin cometer errores. La misma resultó ser una herramienta de suma utilidad para obtener los resultados aquí presentados. No existen en la literatura muchas aplicaciones de la computadora para obtener resultados teóricos. Quizás el caso más famoso sea la prueba del Teorema de los Cuatro Colores [1] [2] [25].

El hecho de poseer una caracterización como esta tiene diversas consecuencias. Por un lado, al tratarse de un conjunto finito de estructuras prohibidas con cantidad de vértices acotada, se desprende un reconocimiento de complejidad polinomial. Por otro lado, a partir de esta caracterización resulta sencillo comparar a los grafos de Bouchet con otras clases. Por ejemplo, para ver que una clase de grafos  $C$  está incluida en los de Bouchet, basta con ver que ninguno de los 33 subgrafos prohibidos pertenezca a  $C$ . Por último, al conocer las familias  $F_{W_5}$ ,  $B_{W_3}$  y  $F_{W_7}$  el teorema original de caracterización de grafos circulares puede ser enunciado de diversas formas equivalentes.

## Referencias

- [1] K. APPEL AND W. HAKEN, Every planar map is four colorable. Part I. Discharging, *Illinois J. Math* 21 (1977), 429-490.
- [2] K. APPEL, W. HAKEN AND J. KOCH, Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility, *Illinois J. Math* 21 (1977), 491-567.
- [3] C. BERGE, "Graphs", North-Holland, 1985.
- [4] S. BOOTH AND G. LEUKER, Testing for the consecutive ones property, interval graphs and graph planarity using PQ-Tree algorithms, *J. Compute. Syst. Sci.* 13 (1976), 335-379.
- [5] A. BOUCHET, Caracterisation des symboles croises de genre nul, *C. R. Acad. Sci. Paris* 274 (1972), 724-727.
- [6] A. BOUCHET, Reducing prime graphs and recognizing circle graphs, *Combinatorica* 7, 3 (1987), 243-254.
- [7] A. BOUCHET, Circle graph obstructions, *Journal of Combinatorial Theory B* 60 (1994), 107-144.
- [8] A. BRANDSTADT, V. LE AND J. SPINRAD, "Graph Classes: A Survey", SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.
- [9] G. DURÁN, Sobre grafos intersección de arcos y cuerdas en un círculo, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires, 2000.
- [10] S. EVEN AND A. ITAI, Queues, stacks and graphs, in Theory of Machines and Computations, *Academic Press New York* (1971), 71-86.
- [11] C. GABOR, K. SUPOWIT AND W. HSU, Recognizing circle graphs in polynomial time, *Journal of the ACM* 36, 3 (1989), 435-473.
- [12] M. GAREY, D. JOHNSON, G. MILLER AND C. PAPADIMITRIOU, The complexity of coloring circular arcs and chords, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods* 1 (1980), 216-227.
- [13] F. GAVRIL, Algorithms for a maximum clique and a maximum independent set of a circle graph, *Networks* 3 (1973), 261-273.
- [14] P. GILMORE, AND A. HOFFMAN, A characterization of comparability graph and of interval graph, *Camad. J. Math* 16 (1964), 539-548.
- [15] M. GOLUBIC, "Algorithm Graph Theory and Perfect Graphs", Academic Press, New York, 1980.

- [16] A. GRAVANO, Estudio de problemas, propiedades y algoritmos en grafos arco-circulares y circulares, Tesis de Licenciatura, Departamento de Computación, Universidad de Buenos Aires, 2001.
- [17] U. GUPTA, D. LEE AND J. LEUNG, An optimal solution for the channel assignment problem, *IEEE Tras. Computers* C-28 (1979), 807-810.
- [18] F. HARARY, “Graph Theory”, Addison-Wesley, 1969.
- [19] W. HSU, Maximum weight clique algorithms for circular-arc graphs and circle graphs, *SIAM J. Comput.* 14 (1985), 224-231.
- [20] D. KNUTH, “The Art of Computer Programming”, Vol. 1, Addison-Wesley, 1969.
- [21] C. G. LEKKERKERKER AND J. C. BOLAND, Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, *Fund. Math.* 51 (1962), 45-64.
- [22] S. MASSUDA, K. NAKAJIMA, T. KASHIWABARA AND T. FUJISAWA, Efficient algorithms for finding maximum cliques of an overlap graph, *Networks* 20 (1990), 157-171.
- [23] W. NAJI, Reconnaissance des graphes de cordes, *Discrete Math* 54 (1985), 329-337.
- [24] S. OLARIU, An optimal greedy heuristic to color interval graphs, *Inf. Proc. Letters* 37 (1991), 21-25.
- [25] N. ROBERTSON, D. SANDERS, P. SEYMOUR AND R. THOMAS, The Four Color Theorem, *J. of Comb. Theory Serie B* 70 (1997), 2-44.
- [26] D. ROTEM AND J. URRUTIA, Finding maximum cliques in circle graphs, *Networks* 11 (1981), 269-278.
- [27] J. SPINRAD, Recognition of circle graphs, *Journal of Algorithms*, 16 (2), (1994), 264-282.