

TESIS DE LICENCIATURA

ESTUDIO DE PROBLEMAS,
PROPIEDADES Y ALGORITMOS EN GRAFOS
ARCO-CIRCULARES Y CIRCULARES

Agustín Gravano
agravano@dc.uba.ar

Director: Dr. Guillermo A. Durán

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Julio de 2001

Resumen

Los grafos arco-circulares son los grafos intersección de arcos alrededor de un círculo. Los grafos circulares son los grafos intersección de cuerdas dentro de un círculo. Estas dos clases de grafos han sido estudiadas a partir de la década del '60. Tienen aplicaciones muy variadas, que van desde la genética hasta el control del tránsito. Varios problemas NP-completos tienen solución eficiente en grafos pertenecientes a algunas de sus subclases.

En esta tesis, estudiamos todas las posibles intersecciones de varias subclases de grafos arco-circulares y de grafos circulares. Mostramos un ejemplo minimal en cada una de las regiones que se generan, excepto en tres de ellas, para las cuales demostramos que son vacías. Presentamos un nuevo resultado que dice que si un grafo es circular Helly y circular unitario, entonces también es arco-circular Helly. Mostramos que los árboles están incluidos en tres de las regiones mencionadas, y presentamos un algoritmo eficiente para clasificarlos.

Estudiamos las posibles intersecciones entre los grafos circulares, los grafos overlap de arco-circulares (superclase de los circulares), los grafos arco-circulares y los grafos de intervalos (subclase de los arco-circulares), mostrando un ejemplo minimal en cada región definida. En este caso no hay regiones vacías.

Mostramos una reformulación de los grafos circulares, planteada mediante sistemas de inecuaciones. Estas nuevas ideas sirven para atacar desde otro ángulo problemas teóricos y prácticos de la clase de grafos circulares.

Presentamos un algoritmo eficiente de reconocimiento de grafos arco-circular unitarios, basado en un teorema de A. Tucker y usando ideas aportadas por J. Spinrad. Por último, mostramos la implementación de este algoritmo, y de algoritmos de reconocimiento de grafos de intervalos y de grafos arco-circular Helly. Estas implementaciones fueron hechas en el lenguaje de programación Java, y tienen como objetivo comenzar la construcción de un paquete de algoritmos eficientes para acelerar las investigaciones en estas clases de grafos.

A mis padres, María Virginia Fornari y Juan Carlos Gravano.

Agradecimientos

A Willy Durán. Elegirlo como director fue una idea excelente. Su predisposición, buena voluntad y profundo conocimiento de los temas hicieron que trabajar en esta tesis resultara una tarea sumamente agradable.

A Hernán, Marina y Flavia, quienes me dieron una mano en distintas partes de la tesis, ¡confirmando que uno solo no puede hacer todo!

A Fabio y Oscar, por su cuidadosa lectura de este trabajo y sus valiosas sugerencias, que contribuyeron a dar los últimos retoques a la versión final.

A los profesores del Departamento de Computación que, mediante su esfuerzo cotidiano, pelean a favor de la Educación y la Ciencia en la Argentina.

A Mónica Bobrowski, quien me guió en mis primeros pasos como ayudante de cátedra. Siempre me contagió (al igual que a tantos otros) su pasión por la docencia, asentada sobre preceptos como la responsabilidad, la honestidad y la coherencia, y acompañada por una calidez humana excepcional.

A Hernán y Sergio. Me cuesta mucho imaginar la carrera sin su compañía. Materia tras materia, se fueron transformando en dos pilares fundamentales, tanto humana como académicamente, sin los cuales, en más de una ocasión, me habría resultado muy difícil seguir adelante.

A todos los amigos y amigas que me dio esta Facultad, y que hicieron que tantos años de estudio y sacrificio hayan quedado en mi memoria acompañados de centenares de lindos recuerdos.

A los chicos de *impa*CIENCIA, con quienes compartí el sueño, no siempre trunco, de pelear por una mejor Universidad.

A Mariano V., Mariano C., Gaspar, Santiago, Mariano W., Alfredo y Luciano: ustedes saben todo lo que significan para mí, y cuánto los necesito.

A Clau, esa hermana que la vida tardó algún tiempito en presentarme.

Al Doctor Emilio Jäger, por su paciencia y su atención desinteresada, por haberme ayudado en los momentos más difíciles que me tocó vivir. Espero algún día poder devolverle aunque sea una ínfima parte de todo lo que le debo.

A mi hermano Luis, el principal faro que tuve a lo largo de todos estos años.

A mi hermano Matías, por siempre mostrarme otras facetas de la realidad, desde una perspectiva más humana y sensible. A Vicky, por armar tan buen equipo con Mati.

Por último, pero en el lugar más importante, a mis papás, María Virginia Fornari y Juan Carlos Gravano. A ustedes debo todo. No tengo más que palabras de gratitud por las inmejorables oportunidades que me dieron durante toda la vida, resaltando desde el primer día la importancia suprema de la Educación. Los quiero mucho, y espero algún día poder ser tan buen padre como ustedes han sido conmigo.

Índice

1	Introducción	1
1.1	Definiciones básicas y notación	2
1.2	Clases de grafos	3
2	Cruce de regiones: grafos arco-circulares y circulares	5
2.1	Generalidades	5
2.1.1	Grafos arco-circulares	5
2.1.2	Grafos circulares	6
2.2	Intersecciones entre las subclases	7
2.2.1	Algunas propiedades de grafos C y CA	7
2.2.2	Enumeración de regiones	7
2.3	Las regiones vacías	11
2.3.1	Las regiones 17 y 18	11
2.3.2	La región 24	12
2.4	Representantes minimales	15
2.4.1	Algunos resultados útiles	15
2.4.2	Representantes minimales	17
2.5	Árboles	36
2.5.1	Los árboles son circulares	36
2.5.2	Los árboles y las demás clases	37
3	Cruce de regiones: grafos intersección y overlap	41
3.1	Algunos resultados útiles	41
3.2	Ejemplos minimales	42
4	Grafos e-circulares	50
4.1	Definición	50
4.2	Sobre los grafos e-circulares	53
4.3	Conjetura del diamante	53
4.3.1	G no tiene diamantes	55
4.3.2	G es circular Helly	56
5	Algoritmos	59
5.1	Reconocimiento de grafos UCA	59
5.1.1	Definiciones	59

5.1.2	Propiedades	60
5.1.3	Algoritmo	62
5.1.4	Corrección del algoritmo	62
5.1.5	Algoritmo de eliminación de <i>circuitos-(2,1)</i>	63
5.2	Implementaciones	64
5.2.1	PQ-Trees	65
5.2.2	Búsqueda de todos los cliques de un grafo	65
5.2.3	Reconocimiento de grafos de intervalos	65
5.2.4	Reconocimiento de grafos HCA	66
5.2.5	Reconocimiento de grafos UCA	66
6	Conclusiones y trabajo futuro	67
A	Algoritmos	68
A.1	Representación circular de árboles	68
A.2	Reconocimiento de grafos <i>UCA</i>	70
A.3	Búsqueda de todos los cliques de un grafo	72

Capítulo 1

Introducción

Los grafos arco-circulares, grafos intersección de arcos alrededor de un círculo, fueron introducidos a mediados de la década del '60, siendo Alan Tucker quien aportó los primeros resultados teóricos. Tienen aplicaciones en genética, control del tránsito, diseño de compiladores, estadística y problemas de almacenamiento.

Los grafos circulares, grafos intersección de cuerdas en un círculo, fueron presentados por Even e Itai a comienzos de la década del '70. Existen aplicaciones a problemas computacionales que operan con pilas y colas. Un problema de la vida real para el cual se utilizan estas ideas es aquél formulado por Knuth en el que se busca un reordenamiento de vagones de un tren utilizando la menor cantidad posible de vías.

El objetivo de esta tesis es continuar la línea de investigación desarrollada por Guillermo Durán en su Tesis Doctoral [10]. Tras atacar diversos problemas teóricos de variada complejidad, presentamos aquí un compendio de aquéllos en los cuales obtuvimos resultados satisfactorios.

En este capítulo, presentamos los tópicos de esta tesis, una lista con las definiciones básicas y las convenciones de notación usadas, y un resumen sobre clases de grafos.

En el capítulo 2, estudiamos todas las posibles intersecciones de las subclases definidas para grafos arco-circulares y grafos circulares. Para cada región definida, mostramos un ejemplo minimal, excepto en tres de ellas, para las cuales probamos su vacuidad. Una de dichas vacuidades es uno de los principales resultados de esta tesis: si un grafo es circular unitario y circular Helly, entonces necesariamente es arco-circular Helly. En este capítulo, además, analizamos la pertenencia de los árboles a las subclases mencionadas.

En el capítulo 3, presentamos representantes minimales para todos los cruces de las clases de grafos overlap de arcos circulares (*CAO*), overlap de intervalos, arco-circulares y de intervalos.

En el capítulo 4, definimos una nueva clase de grafos, equivalente a los grafos circulares, pero planteada de un modo muy diferente, mediante sistemas de ecuaciones e inecuaciones.

El capítulo 5 está destinado a la formalización y al análisis de un algo-

ritmo eficiente de reconocimiento de grafos arco-circular unitarios. También presentamos el comienzo del desarrollo de un paquete de software que implemente todos los reconocimientos eficientes conocidos para las clases de grafos estudiadas.

Por último, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones de esta tesis y algunas posibilidades de trabajo futuro.

1.1 Definiciones básicas y notación

Denotamos un grafo G por un par $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ representa un conjunto finito de vértices, y $E(G)$, un conjunto de pares no ordenados de vértices de G , llamados aristas. Sean $n = |V(G)|$ y $m = |E(G)|$.

Un vértice v es adyacente a otro vértice w en G si $(v, w) \in E(G)$. Decimos que v y w son los extremos de la arista. El vecindario de un vértice v es el conjunto $N(v)$ que consiste de todos los vértices adyacentes a v .

Un vértice v es universal cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$. Un vértice v es aislado cuando $N(v) = \emptyset$. El grado de un vértice v es la cardinalidad del conjunto $N(v)$.

El complemento de un grafo G , denotado por \overline{G} , es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices de G y tal que dos vértices distintos son adyacentes en \overline{G} si y sólo si no son adyacentes en G .

Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si $V(H) = V(G)$, decimos que H es un subgrafo generador de G . Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de G inducido por X es el subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en X .

Dos grafos G y H son isomorfos si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que conserva las adyacencias. En este caso, notamos $G = H$.

Para cualquier vértice v de un grafo G , se define una complementación local de G en v como el grafo obtenido al reemplazar al subgrafo inducido por $N(v)$ por su complemento. Dos grafos son localmente equivalentes si uno puede ser obtenido a partir del otro por una secuencia de complementaciones locales.

Un camino en un grafo G es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, \dots, v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, para $1 \leq i \leq k - 1$. Una cuerda en P es una arista que une dos vértices no consecutivos de P .

Un circuito en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, \dots, v_k$, no necesariamente distintos, donde $v_1 = v_k$, y $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, para $1 \leq i \leq k - 1$.

Un ciclo en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$, donde v_1, \dots, v_k es un camino, v_1 es adyacente a v_k , $v_1 = v_{k+1}$ y $k \geq 3$. Una cuerda en C es cualquier cuerda del camino v_1, \dots, v_k . Si los vértices que une la cuerda en C están a distancia 2, decimos que la cuerda es corta. Un ciclo

es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos C_k al ciclo inducido por k vértices (C_3 es también llamado triángulo).

Un grafo G es conexo si para todo par de vértices distintos v y w de G , existe un camino de v a w .

Un grafo G es completo si cualquier par de vértices distintos de G son adyacentes. Llamamos K_n al grafo completo con n vértices.

Un conjunto de vértices M de un grafo G es un subgrafo completo si el subgrafo inducido por M es completo. Un clique es un subgrafo completo maximal de G .

Un grafo G es un diamante si es isomorfo a $K_4 - \{e\}$, para e cualquier arista de K_4 . Un grafo es una rueda W_j si es isomorfo a un ciclo inducido C_j al que se le agrega un vértice universal. Un grafo es un abanico F_j si es isomorfo a un camino inducido P_j al que se le agrega un vértice universal.

Un concepto muy usado a lo largo de este trabajo es el de la propiedad de Helly. Una familia de subconjuntos S satisface la propiedad de Helly cuando toda subfamilia de S consistente en subconjuntos que se intersecan de a pares tiene intersección no vacía.

Una propiedad en grafos es hereditaria cuando se verifica que si un grafo tiene la propiedad, entonces cualquier subgrafo inducido de él también la tiene.

Definiciones no dadas aquí pueden encontrarse en [3], [10], [17] o [18].

1.2 Clases de grafos

Consideremos una familia finita de conjuntos no vacíos. El grafo intersección de esta familia es obtenido representando cada conjunto por un vértice, conectando dos vértices por un arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan. Es sencillo probar que todo grafo es un grafo intersección de alguna familia. El grafo overlap de esta familia se obtiene representando cada conjunto por un vértice, conectando dos vértices por una arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan pero ninguno de los dos está incluido en el otro (diremos en este caso que los conjuntos se superponen). Es fácil también demostrar que todo grafo es un grafo overlap de alguna familia.

Los grafos intersección han recibido mucha atención en el estudio de teoría algorítmica de grafos y sus aplicaciones ([17], [21]). Algunas clases muy estudiadas de grafos intersección son los grafos de intervalos, los cordales, los arco-circulares, los circulares, los de permutación, y los grafos clique.

Un grafo arco-circular es el grafo intersección de arcos alrededor de un círculo.

Un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo.

Un grafo de intervalos es el grafo intersección de intervalos en la recta real.

Un grafo G es cordal (o triangulado) si G no contiene al ciclo inducido C_k como subgrafo inducido, para $k \geq 4$.

Un grafo overlap de intervalos (conocidos en la literatura como grafos overlap) es el grafo overlap de intervalos en la recta real. Está probado que son equivalentes a los grafos circulares.

Un grafo overlap de arcos circulares (*CAO*) es el grafo overlap de arcos alrededor de un círculo. Estos grafos han sido muy poco estudiados en la literatura ([10], [19]).

Un grafo es clique-Helly si sus cliques satisfacen la propiedad de Helly.

Una completa recopilación sobre clases de grafos aparece en [6].

Capítulo 2

Cruce de regiones: grafos arco-circulares y circulares

En este capítulo, presentamos la enumeración de las 26 regiones definidas al cruzar varias subclases de grafos arco-circulares y circulares. Probamos que tres de esas regiones son vacías, y exhibimos un representante minimal para cada una de las 23 regiones restantes. Por último, estudiamos a los árboles, mostrando a cuáles de las regiones pertenecen.

2.1 Generalidades

En primer lugar, presentamos las definiciones de las distintas clases de grafos involucradas en este capítulo.

2.1.1 Grafos arco-circulares

Un grafo G es arco-circular si existe un conjunto de arcos \mathcal{A} (que llamamos representación) alrededor de un círculo y una correspondencia 1-1 entre vértices de G y arcos de \mathcal{A} , de manera que dos vértices distintos son adyacentes si y sólo si los arcos correspondientes se intersecan. Es decir, un grafo arco-circular es el grafo intersección de arcos alrededor de un círculo. Establecemos que los arcos deben ser abiertos. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que ningún par de arcos tiene un extremo común y que ningún arco cubre el perímetro total de la circunferencia. La Figura 2.1 muestra un grafo arco-circular y una representación para él.

Las siguientes son algunas subclases interesantes de los grafos arco-circulares estudiadas en la literatura:

1. Propios: un grafo G es arco-circular propio (*PCA*) si existe una representación arco-circular de G , tal que ningún arco esté contenido en forma propia en otro.

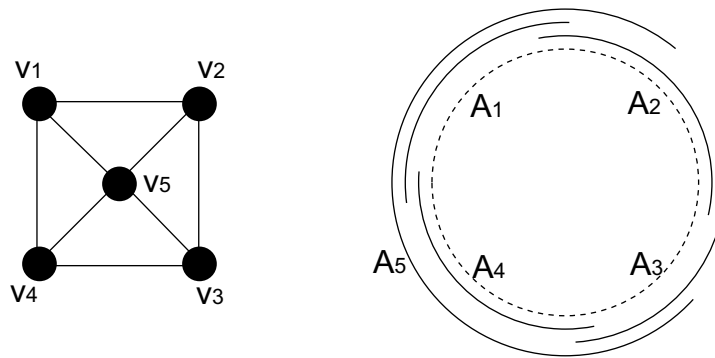


Figura 2.1: Ejemplo de grafo arco-circular, y una representación posible.

2. Unitarios: un grafo G es arco-circular unitario (UCA) si existe una representación arco-circular de G , tal que todos sus arcos tengan la misma longitud.
3. Helly: un grafo G es arco-circular Helly (HCA) si existe una representación arco-circular de G , tal que los arcos satisfagan la propiedad de Helly.
4. Clique-Helly: un grafo G es arco-circular clique-Helly ($CHCA$) si G es arco-circular y clique-Helly.

2.1.2 Grafos circulares

Un grafo G es circular si existe un conjunto de cuerdas \mathcal{L} (que llamamos modelo) dentro de un círculo y una correspondencia 1-1 entre vértices de G y cuerdas de \mathcal{L} , de manera que dos vértices distintos son adyacentes si y sólo si las cuerdas correspondientes se cortan. Es decir, un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que ningún par de cuerdas tiene un extremo común. La Figura 2.2 muestra un grafo circular y un modelo para él.

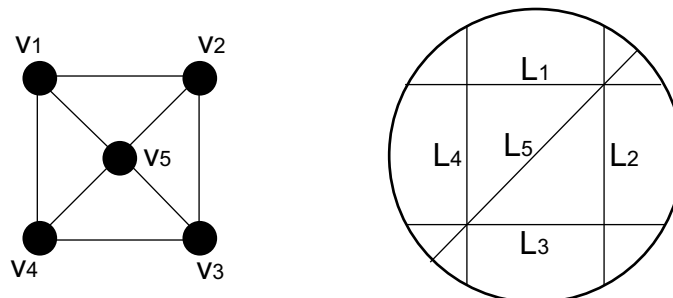


Figura 2.2: Ejemplo de grafo circular, y un posible modelo de cuerdas.

Las siguientes son algunas subclases interesantes de los grafos circulares, estudiadas en [10]:

1. Helly: un grafo G es circular Helly (HC) si existe un modelo de cuerdas para G , de manera que las cuerdas satisfagan la propiedad de Helly.
2. Clique-Helly: un grafo G es circular clique-Helly (CHC) si G es circular y clique-Helly.
3. Unitarios: un grafo G es circular unitario (UC) si existe un modelo de cuerdas para G , de manera que todas las cuerdas tengan la misma longitud.

2.2 Intersecciones entre las subclases

En [10], Durán estudia primero todas las posibles intersecciones de las subclases definidas para grafos arco-circulares, mostrando un ejemplo minimal en cada una de las regiones que se generan. Después, realiza el mismo estudio para las subclases de grafos circulares. El resultado de estos análisis puede resumirse en las Figuras 2.3 y 2.4, donde vemos los cruces de las subclases, y sus representantes minimales. Nótese que en el cruce de subclases para grafos arco-circulares hay una región vacía: $(CHCA \cap PCA) \setminus (UCA \cup HCA)$.

A partir de estos estudios, surge la motivación para estudiar el cruce de las subclases de grafos arco-circulares con las subclases de grafos circulares.

2.2.1 Algunas propiedades de grafos C y CA

Enumeramos a continuación algunas propiedades de las subclases de grafos arco-circulares y circulares recién presentadas (todas estas propiedades se pueden encontrar en [10], y se ven reflejadas en los diagramas de las Figuras 2.3 y 2.4):

1. Todo grafo circular Helly es también circular clique-Helly (es decir, $HC \subset CHC$).
2. Las clases UCA y UC son equivalentes (ver el Teorema 2.2, en la página 12 de esta tesis).
3. Todos los grafos arco-circular unitarios son también arco-circular propios (es decir, $UCA \subset PCA$).
4. Los grafos arco-circular propios son una subclase de los grafos circulares (es decir, $PCA \subset C$).

2.2.2 Enumeración de regiones

Entonces, tenemos ocho clases de grafos para cruzar: CA , PCA , UCA , $CHCA$, HCA , C , CHC , HC —omitimos la clase UC por ser equivalente a UCA —. Esto define, a priori, $2^8 = 256$ regiones distintas, siendo cada una

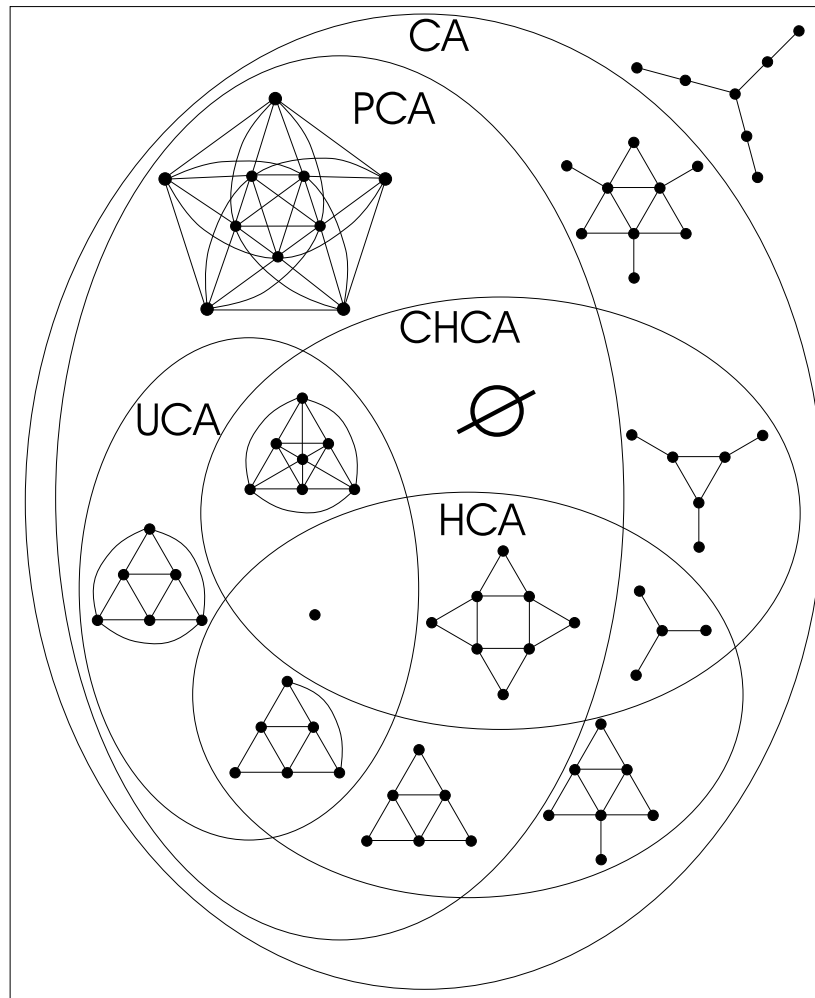


Figura 2.3: Cruce de subclases para grafos arco-circulares.

de ellas una combinación de k clases distintas ($0 \leq k \leq 8$). Sin embargo, como veremos enseguida, la gran mayoría de esas regiones son vacías (es más, muchas ni siquiera tienen sentido).

Representamos las distintas regiones mediante filas en una tabla, donde cada columna corresponde a una clase (ver Tabla 2.1). La región correspondiente a cada fila está formada por los grafos pertenecientes a las clases de las columnas con un 1, y no pertenecientes a las clases de las columnas con un 0. Por ejemplo, la región número 3 está constituida por grafos pertenecientes a C y CHC , y no pertenecientes a las restantes seis clases.

Regiones sin CA y/o sin C

En la Tabla 2.1, enumeramos las ocho regiones sin C y/o sin CA (es decir, aquellas filas con 0 en C y/o en CA). Las filas están ordenadas de menor a mayor, viendo a cada una de ellas como un número binario.

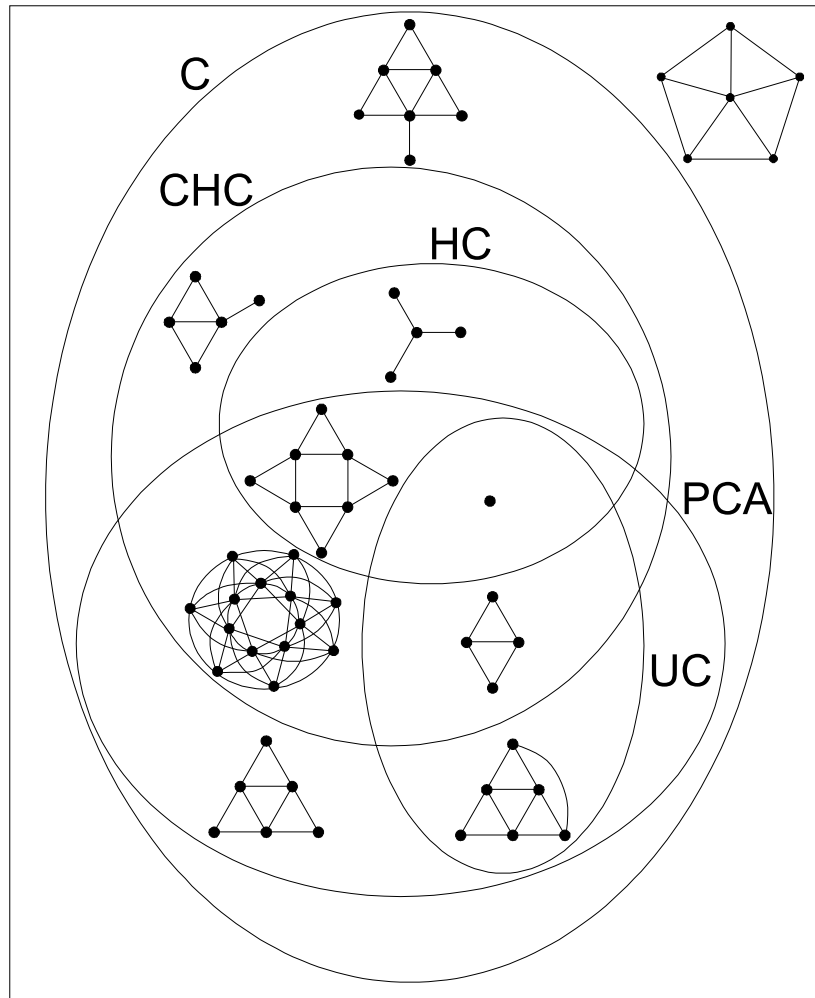


Figura 2.4: Cruce de subclases para grafos circulares.

La primera fila corresponde a la región que contiene solamente a aquellos grafos no pertenecientes a ninguna de las ocho clases. En las filas siguientes, cuando hay un 0 en la columna CA , necesariamente debe haber un 0 en las columnas PCA , UCA , $CHCA$ y HCA , puesto que son subclases de CA . Lo mismo ocurre cuando hay un 0 en la columna C : las columnas PCA , UCA , CHC y HC deben estar también en 0, dado que son subclases de C . De este modo, se descartan varias combinaciones inválidas. Por otro lado, como vimos que $HC \subset CHC$, cuando hay un 0 en CHC , también debe haber un 0 en HC , lo cual descarta otra combinación.

Regiones con CA y con C

Ahora, seguimos con las regiones que tienen a las clases C y CA (ver Tabla 2.2). Observando la definición de las clases $CHCA$ y CHC , vemos que son equivalentes dentro de $CA \cap C$. En consecuencia, podemos eliminar una columna en nuestra tabla. También eliminamos las columnas de C y CA ,

	<i>CA</i>	<i>PCA</i>	<i>UCA</i>	<i>HCA</i>	<i>CHCA</i>	<i>C</i>	<i>CHC</i>	<i>HC</i>
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	0	1	1	1
5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	1	0	0	0
7	1	0	0	1	0	0	0	0
8	1	0	0	1	1	0	0	0

Tabla 2.1: Primeras ocho regiones.

que serán siempre 1. En la Tabla 2.2 podemos ver las restantes dieciocho regiones.

	<i>PCA</i>	<i>UCA</i>	<i>CHCA</i>	<i>HCA</i>	<i>HC</i>
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	1	0
11	0	0	1	0	0
12	0	0	1	0	1
13	0	0	1	1	0
14	0	0	1	1	1
15	1	0	0	0	0
16	1	0	0	1	0
17	1	0	1	0	0
18	1	0	1	0	1
19	1	0	1	1	0
20	1	0	1	1	1
21	1	1	0	0	0
22	1	1	0	1	0
23	1	1	1	0	0
24	1	1	1	0	1
25	1	1	1	1	0
26	1	1	1	1	1

Tabla 2.2: Restantes dieciocho regiones.

En este caso, observemos que hay dos conjuntos de combinaciones inválidas: “* * 0 * 1”, y “0 1 * * *” (un asterisco denota cualquier posibilidad en esa columna); en el primer caso porque $HC \subset CHC$, y en el segundo porque $UCA \subset PCA$.

Con esto, concluimos la enumeración de las 26 regiones que analizaremos en este capítulo. En la Figura 2.5 mostramos un diagrama con todos los cruces de regiones y la numeración de las mismas, de acuerdo a las tablas vistas. En la Figura 2.46, al final de este capítulo, mostramos el mismo diagrama, con los representantes minimales.

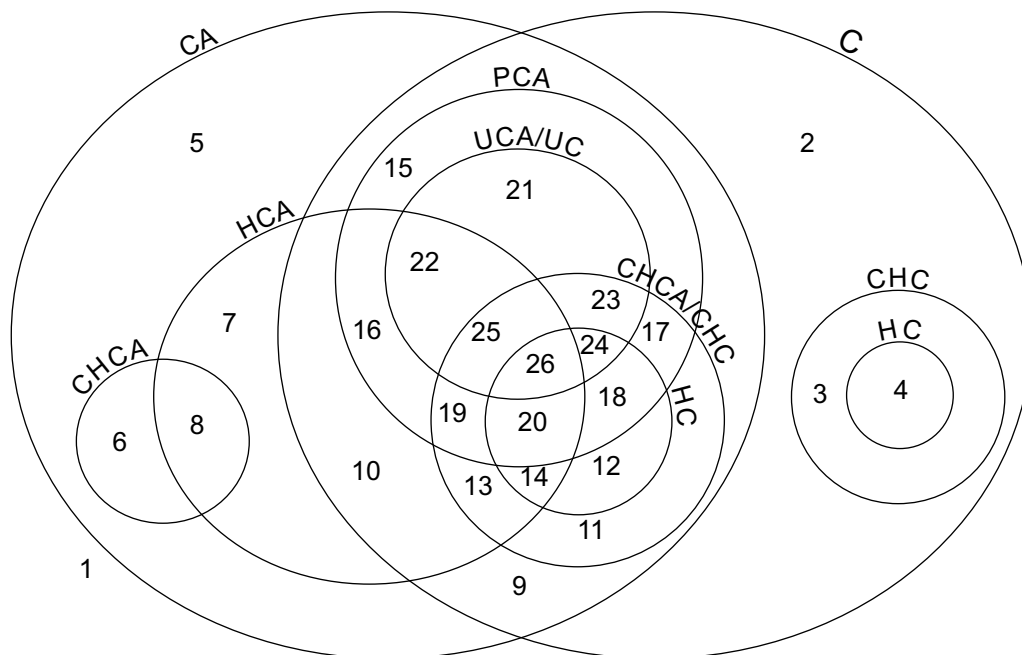


Figura 2.5: Cruce de subclases para grafos arco-circulares y circulares.

2.3 Las regiones vacías

De las 26 regiones enumeradas, tres son vacías. En esta sección, en primer lugar, mostramos que la vacuidad de las regiones número 17 y 18 es un corolario de un resultado presentado en [10]; y en segundo lugar, demostramos que la región número 24 también es vacía.

2.3.1 Las regiones 17 y 18

El siguiente teorema fue presentado por Durán en [10]:

Teorema 2.1 ([10]) *Sea un grafo $G \in PCA \setminus UCA$. Si $G \in CHCA$, entonces $G \in HCA$.*

Corolario 2.1 *Las regiones número 17 y 18 son vacías.*

Demostración:

Las regiones número 17 y 18 (ver Figura 2.5) pueden escribirse de esta manera:

$$17: ((PCA \setminus UCA) \cap (CHCA \setminus HC)) \setminus HCA$$

$$18: ((PCA \setminus UCA) \cap (CHCA \cap HC)) \setminus HCA$$

Supongamos que existe un grafo G que pertenece a alguna de estas dos regiones. Entonces, G pertenece a $PCA \setminus UCA$ y a $CHCA$, pero no a HCA .

Pero por el Teorema 2.1, tal grafo G no puede existir. Por lo tanto, estas dos regiones son vacías. \square

2.3.2 La región 24

En esta subsección, presentamos uno de los principales resultados de esta tesis: la demostración de que si un grafo es HC y UC , entonces también es HCA , lo cual implica que la región número 24 es vacía.

En [10], Durán prueba la equivalencia entre grafos arco-circular unitarios y grafos circular unitarios. En la demostración de esa equivalencia, que mostramos a continuación, presenta un procedimiento para transformar un modelo circular unitario en una representación arco-circular unitaria, y viceversa.

Teorema 2.2 ([10]) *Un grafo G es circular unitario si y sólo si G es arco-circular unitario.*

Demostración:

Sea G un grafo circular unitario y tomemos el modelo \mathcal{L} de G de cuerdas de igual longitud, en un círculo de radio $r = 1$. Transformamos cada cuerda de \mathcal{L} en un arco alrededor del círculo utilizando los mismos puntos inicial y final, y trazando el arco de longitud $\leq \pi$ que queda definido. Claramente, el grafo arco-circular que construimos es unitario e isomorfo a G .

Recíprocamente, sea G un grafo arco-circular unitario. Tenemos una representación de G en arcos de igual longitud alrededor del círculo. Si asumimos nuevamente que $r = 1$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la longitud común de cada arco es $\leq \pi$ (si no lo fuera, el grafo G es completo y podemos encontrarle una representación unitaria que verifique lo pedido). Transformamos entonces cada arco en una cuerda dentro del círculo utilizando los mismos puntos inicial y final. El grafo circular que así se construye es unitario e isomorfo a G . \square

El siguiente resultado también será útil en la demostración de la vacuidad de la región número 24:

Teorema 2.3 ([10]) *Sea G un grafo circular Helly, entonces G es circular y no contiene como subgrafo inducido ningún diamante.*

A continuación, demostramos que si un grafo pertenece a las clases HC y UC , entonces también pertenece a la clase HCA . Es decir, $HC \cap UC \subseteq HCA$. Este resultado implica que la región número 24 es vacía.

Teorema 2.4 *Si un grafo G es circular unitario y circular Helly, entonces también es arco-circular Helly.*

Demostración:

A lo largo de esta demostración, usaremos las siguientes convenciones:

- Todos los círculos tienen diámetro D .
- L es la longitud de los lados del triángulo equilátero cuyos vértices tocan la circunferencia de diámetro D (Figura 2.6 (a)).
- α_v es el menor arco circular definido por los extremos de la cuerda v (Figura 2.6 (b)).

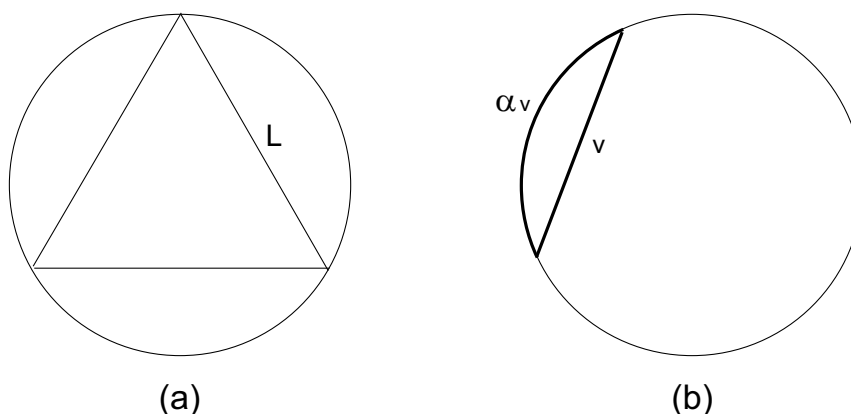


Figura 2.6: Convenciones para el Teorema 2.4

Sea G un grafo circular unitario (UC) y circular Helly (HC), y sea R un modelo UC de G , con cuerdas de longitud l . El modelo R se puede transformar en una representación R' arco-circular unitaria (UCA), empleando el procedimiento explicado en la demostración del Teorema 2.2. El grafo correspondiente a R' es isomorfo a G . Vamos a probar que los arcos de R' tienen la propiedad de Helly, y en consecuencia, que G es también HCA .

Caso 1: $l < L$

Para cada clique M de G :

Ordenamos los vértices v_i ($1 \leq i \leq k$, donde $k = |M|$) del clique de acuerdo al orden de sus arcos de R' en sentido horario (Figura 2.7):

$$\begin{aligned} \alpha_{v_1} &= (a_1, b_1) \\ \alpha_{v_2} &= (a_2, b_2) \\ &\dots \\ \alpha_{v_k} &= (a_k, b_k) \end{aligned}$$

Fijamos $a_1 = 0$ como el inicio de la circunferencia. Como $l < L$, entonces las cuerdas correspondientes a los vértices de M no llegan a dar una vuelta completa al círculo; el caso extremo en el cual las cuerdas sí completan una vuelta es $l = L$ (Figura 2.6 (a)). Por lo tanto, $a_1 < b_k$. Como las cuerdas se cortan todas con todas, y los arcos α_{v_i} son todos de igual longitud, entonces:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k < b_1 < b_2 < \dots < b_k$$

Nótese que decimos $a_k < b_1$, pero no $a_k \leq b_1$. Esto se debe a que, según la definición de grafos circulares, podemos asumir sin pérdida de generalidad que ningún par de cuerdas tiene un extremo común.

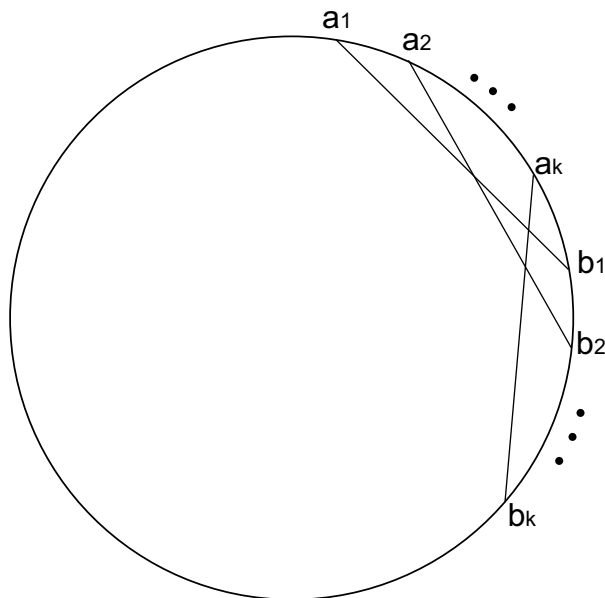


Figura 2.7: Representación R' con sus arcos ordenados en sentido horario.

De este modo, queda definido el arco intersección de todos los α_{v_i} , que llamamos γ_M :

$$(a_k, b_1) = \bigcap_{1 \leq i \leq k} \alpha_{v_i} = \gamma_M$$

Entonces, en R' cada clique M tiene un intervalo no vacío γ_M . En consecuencia, R' cumple la propiedad de Helly, porque cualquier conjunto de arcos que se cortan dos a dos están en una clique.

Caso 2: $L \leq l \leq D$

2.a: Supongamos que G no tiene a K_3 como subgrafo inducido. Por lo tanto, en cualquier representación arco-circular de G , toda familia de arcos que se intersecan de a pares tiene tamaño igual a dos. Esto impide que exista una familia de arcos sin una intersección en común. Por lo tanto, cualquier representación CA de G es HCA . Por otro lado, como G es UC , entonces también es UCA (según el Teorema 2.2, las clases UC y UCA son equivalentes). En consecuencia, por lo dicho anteriormente, G es HCA .

2.b: Supongamos ahora que G tiene a K_3 como subgrafo inducido. Tomemos uno de esos K_3 . En nuestro modelo circular unitario R , ese subgrafo puede estar representado de tres formas: como muestran las Figuras 2.8 (a), (b) y (c), con $l = L$, $L < l < D$ y $l = D$, respectivamente.

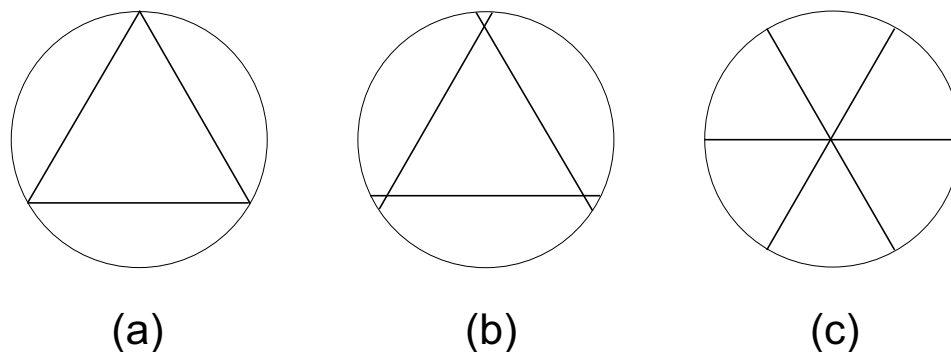


Figura 2.8: Tres modelos para K_3 : (a) $l = L$, (b) $l < L < D$, y (c) $l = D$.

Sabemos que G es HC . Entonces, a partir de los modelos de las figuras, las cuerdas que resta agregar deben cortar a todas las demás, porque:

- no puede cortar a una sola, porque $l > L$;
- si corta a más de una, pero no a todas, se formaría un diamante, con lo cual G no sería HC (Teorema 2.3).

Por lo tanto, en este caso G es completo. Es fácil ver que los grafos completos son HCA : puede construirse un modelo HCA para cualquier grafo completo tomando todas sus cuerdas de longitud $l = D$. En consecuencia, tenemos que G es HCA . \square

Corolario 2.2 *La región número 24 es vacía.*

Demostración:

La región número 24 (ver Figura 2.5) puede escribirse de esta manera: $(UC \cap HC) \setminus HCA$. Supongamos que existe un grafo G que pertenece a esta región. Entonces, G pertenece a UC y a HC , pero no a HCA . Pero por el Teorema 2.4, tal grafo G no puede existir. Luego, esta región es vacía. \square

2.4 Representantes minimales

En esta sección, presentamos un representante minimal para cada una de las 23 regiones restantes. Al hablar de minimalidad de los grafos, nos referimos a que cualquier subgrafo inducido de ellos pertenece a otra región.

2.4.1 Algunos resultados útiles

En primer lugar, presentamos una serie de resultados que serán usados en las demostraciones de esta sección.

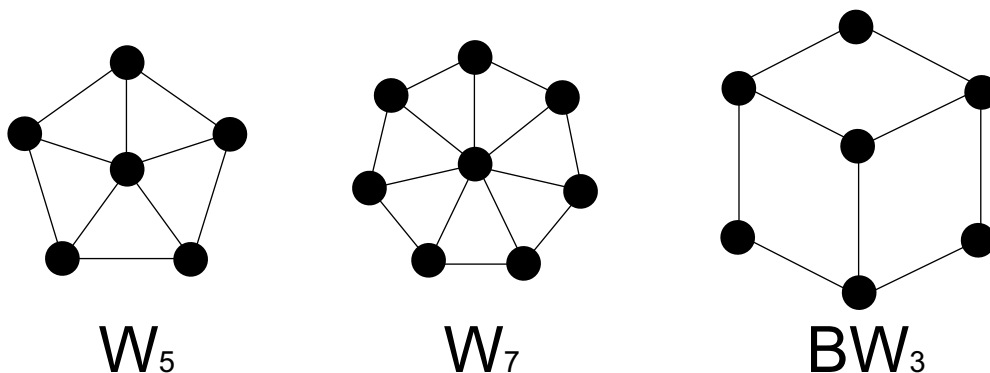


Figura 2.9: Grafos de Bouchet: W_5 , W_7 y BW_3

Teorema 2.5 ([5]) *Un grafo G es circular si y sólo si ningún grafo localmente equivalente a G tiene como subgrafo inducido a alguno de los grafos de la Figura 2.9.*

Del Teorema 2.3 se deduce el siguiente corolario:

Corolario 2.3 *Si un grafo tiene un diamante como subgrafo inducido, entonces no es circular Helly.*

Veamos una caracterización de grafos arco-circular propios conexos y cordales mostrada en [2]. Sean H_1 y H_2 los grafos de la Figura 2.10.

Teorema 2.6 ([2]) *Sea G un grafo conexo y cordal. G es arco-circular propio si y sólo si no contiene ni a H_1 ni a H_2 como subgrafos inducidos.*

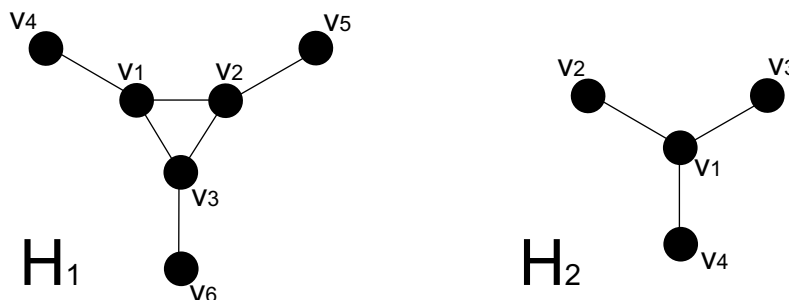


Figura 2.10: Grafos H_1 y H_2 .

Una matriz tiene forma de 1's circulares si los 1's en cada columna aparecen en un orden circular consecutivo. Una matriz tiene la propiedad de 1's circulares si por una permutación de las filas puede ser transformada en una matriz con forma de 1's circulares. Sea G un grafo y M_1, M_2, \dots, M_k los cliques de G . Denotamos por A_G la matriz clique de $k \times n$; es decir, la entrada (i, j) es 1 si el vértice $v_j \in M_i$, y 0 en caso contrario. Veamos la siguiente caracterización de grafos arco-circular Helly, que aparece en [15].

Teorema 2.7 ([15]) *Un grafo G es arco-circular Helly si y sólo si A_G tiene la propiedad de 1's circulares.*

Por otra parte, también se conoce el siguiente resultado:

Teorema 2.8 ([10]) *Si un grafo tiene a H_1 (Figura 2.10) como subgrafo inducido, entonces no es arco-circular Helly.*

Las pertenencias a las clases CA , PCA , UCA , HCA , C , UC y HC son propiedades hereditarias: si un grafo pertenece a alguna de estas clases, entonces todos sus subgrafos inducidos también pertenecen a la misma. Gracias a ello, para demostrar la minimalidad de un representante G fuera de alguna de esas clases, alcanza con mostrar que sacándole un vértice cualquiera, el grafo resultante pasa a pertenecer a la misma. En otras palabras, no es necesario sacarle subconjuntos de dos, tres, o más vértices a G .

Sin embargo, esto no vale para las clases $CHCA$ y CHC , puesto que la propiedad de clique-Helly no es hereditaria. En esos casos, si al sacarle un vértice a un representante G , el grafo pasa a ser (o deja de ser) clique-Helly, también hay que analizar qué ocurre al sacar más vértices. Esto se debe a que un subgrafo más pequeño podría pertenecer a la misma región de G , con lo cual G no sería minimal.

Parte de las demostraciones de pertenencia y minimalidad de los representantes de las 23 regiones usa fuertemente los resultados encontrados por Durán en [10], mencionados anteriormente (ver Figuras 2.3 y 2.4).

En particular, las demostraciones completas (pertenencia y minimalidad) de los grafos de las regiones 10, 14, 15, 16, 20, 21 y 22, y las demostraciones de minimalidad de los grafos de las regiones 4, 8, 9, 12, 13, 19, 23 y 25 son consecuencia directa de esos resultados. Por lo tanto, dichas demostraciones serán omitidas en esta tesis.

2.4.2 Representantes minimales

Ahora sí, pasamos a enumerar los representantes minimales de cada una de las 23 regiones no vacías.

Proposición 2.1 *El grafo G_1 (Figura 2.11) es un representante minimal de la región número 1: $\overline{C \cup CA}$.*

Demostración:

Sabemos que G_1 no es circular, por el Teorema 2.5, pues G_1 es isomorfo a $BW3$. Veamos que tampoco es arco-circular. Supongamos que sí lo es. En cualquier representación CA de G_1 , el subgrafo inducido por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ necesariamente cubre todo el círculo (ver Figura 2.12).

La única forma de agregar el arco A_5 es incluirlo estrictamente en A_1 , sin que toque a A_2 ni a A_4 . Lo mismo vale para el arco A_6 : debe estar incluido

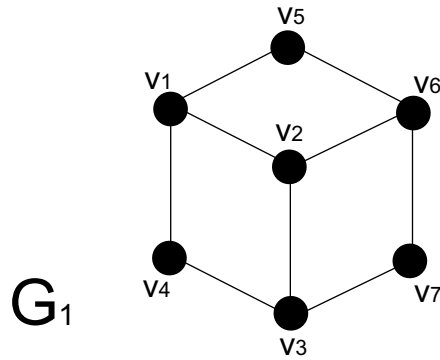


Figura 2.11: Representante minimal de la región número 1.

en A_2 , sin tocar a A_1 ni a A_3 . Entonces, no hay forma de hacer que A_5 y A_6 se toquen, pese a que sus vértices correspondientes son adyacentes en G_1 . Por lo tanto, G_1 no es arco-circular.

Resta verificar que G_1 es minimal en la cantidad de vértices. Veamos uno por uno los diferentes casos:

- Si sacamos v_2 , nos queda un ciclo, y es fácil ver que todos los ciclos son circulares.
- Si sacamos v_4 , v_5 o v_7 , nos queda el grafo de la Figura 2.13, que es circular, como podemos ver en la misma figura.
- Si sacamos v_1 , v_3 o v_6 , nos queda el grafo de la Figura 2.14, que es arco-circular, como podemos ver en la misma figura. \square

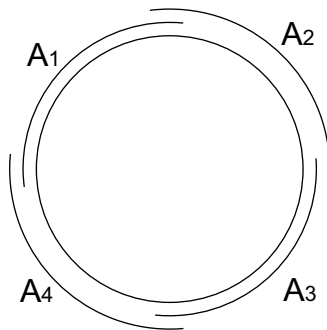


Figura 2.12: Representación CA del ciclo v_1, v_2, v_3, v_4 .

Proposición 2.2 *El grafo G_2 (Figura 2.15) es un representante minimal de la región número 2: $C \setminus CA \setminus CHC$.*

Demostración:

1. G_2 es un grafo circular: en la Figura 2.15 mostramos un modelo circular del mismo.

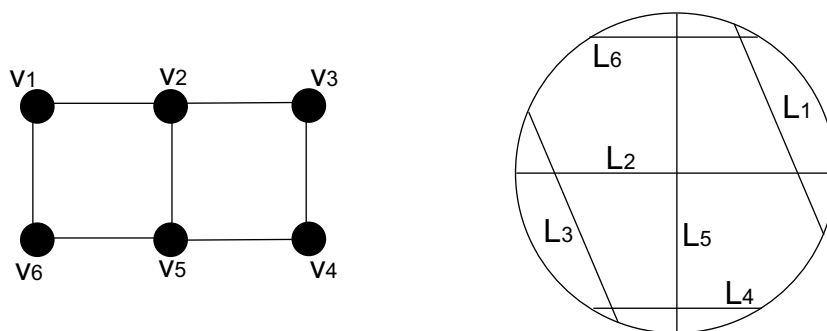


Figura 2.13: $G_1 \setminus \{v_7\}$ y su modelo circular.

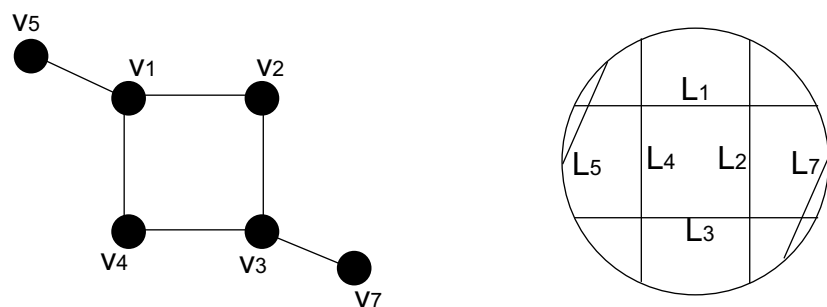


Figura 2.14: $G_1 \setminus \{v_6\}$ y su representación circular.

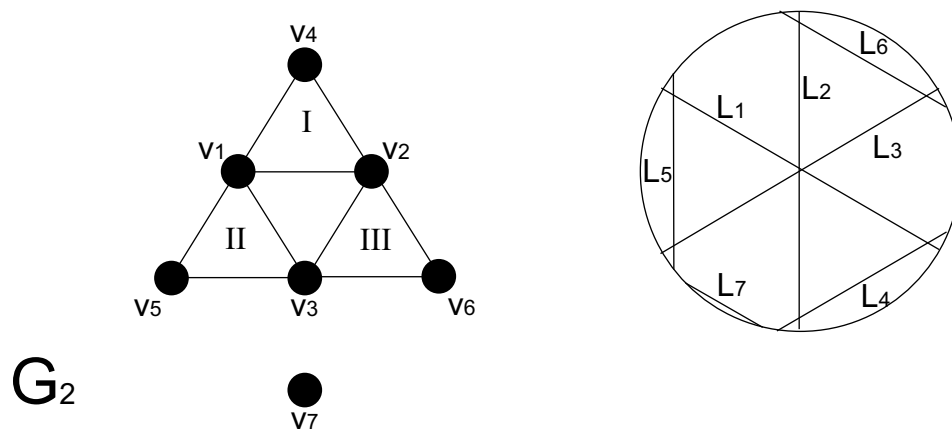


Figura 2.15: Representante minimal de la región 2, y su modelo circular.

2. G_2 no es un grafo arco-circular: es fácil ver que cualquier representación arco-circular de la pirámide formada por los vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , y v_6 cubre todo el círculo, por lo que no hay forma de agregar el arco correspondiente a v_7 .
3. G_2 no es un grafo circular clique-Helly: la familia de cliques $\{I, II, III\}$ no verifica la propiedad de Helly.

Analicemos la minimalidad. Si sacamos v_7 , el grafo resultante es arco-circular (ver Proposición 2.16). Sacando cualquier otro vértice, el grafo pasa a ser clique-Helly: es fácil ver que un grafo no clique-Helly debe contener al menos cuatro cliques de tamaño mayor o igual a 3. \square

Proposición 2.3 *El grafo G_3 (Figura 2.16) es un representante minimal de la región número 3: $CHC \setminus HC \setminus CA$.*

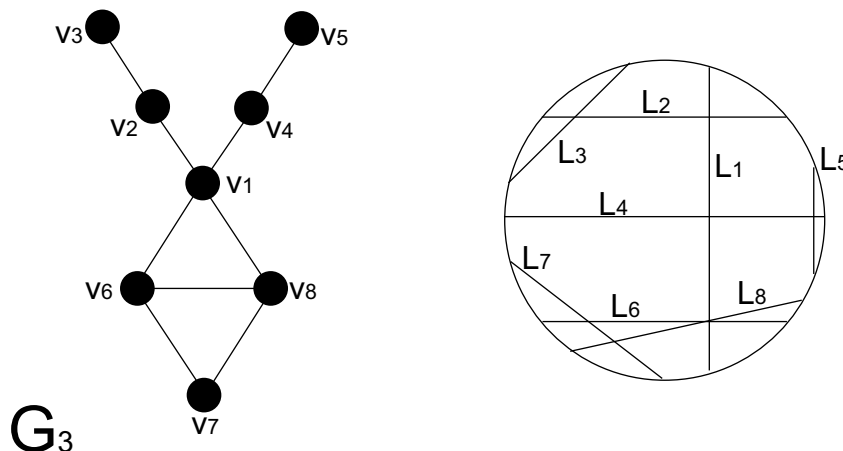


Figura 2.16: Representante minimal de la región 3, y su modelo circular.

Demostración:

1. G_3 es un grafo circular: en la Figura 2.16 mostramos un modelo circular.
2. G_3 es un grafo circular clique-Helly: cada subconjunto de cliques que se intersecan de a pares tiene algún vértice en común.
3. G_3 no es un grafo circular Helly: los vértices v_1, v_6, v_7 y v_8 inducen un diamante.
4. G_3 no es un grafo arco-circular: el subgrafo $G_3 \setminus \{v_8\}$ es isomorfo a G_4 (ver Proposición 2.4).

Veamos por qué satisface la minimalidad:

- Si sacamos v_3 o v_5 , obtenemos el grafo de la Figura 2.17, que es arco-circular (en la misma figura mostramos una representación de intervalos, clase incluida en los arco-circulares).

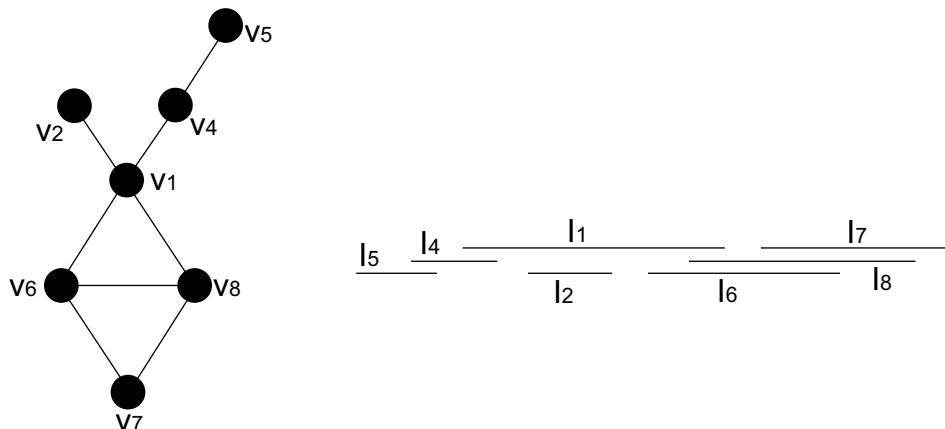


Figura 2.17: $G_3 \setminus \{v_3\}$ y su representación de intervalos.

- Si sacamos v_2 o v_4 , nos queda un grafo arco-circular: una representación para $G_3 \setminus \{v_2\}$ puede construirse de manera análoga a la de la Figura 2.17, simplemente borrando el intervalo I_2 y agregando el intervalo aislado I_3 .
- Si sacamos v_1 , v_6 , v_7 o v_8 , obtenemos un grafo circular Helly: es fácil modificar el modelo circular de la Figura 2.16, para que, al eliminar la cuerda correspondiente a uno de estos vértices, las cuerdas restantes respeten la propiedad de Helly. \square

Proposición 2.4 *El grafo G_4 (Figura 2.18) es un representante minimal de la región número 4: $HC \setminus CA$.*

Demostración:

1. G_4 es un grafo circular Helly: en la Figura 2.18 mostramos un modelo circular del mismo, donde las cuerdas satisfacen la propiedad de Helly.
2. En [10] está demostrado que G_4 no es un grafo arco-circular. \square

Proposición 2.5 *El grafo G_5 (Figura 2.19) es un representante minimal de la región número 5: $CA \setminus C \setminus HCA \setminus CHCA$.*

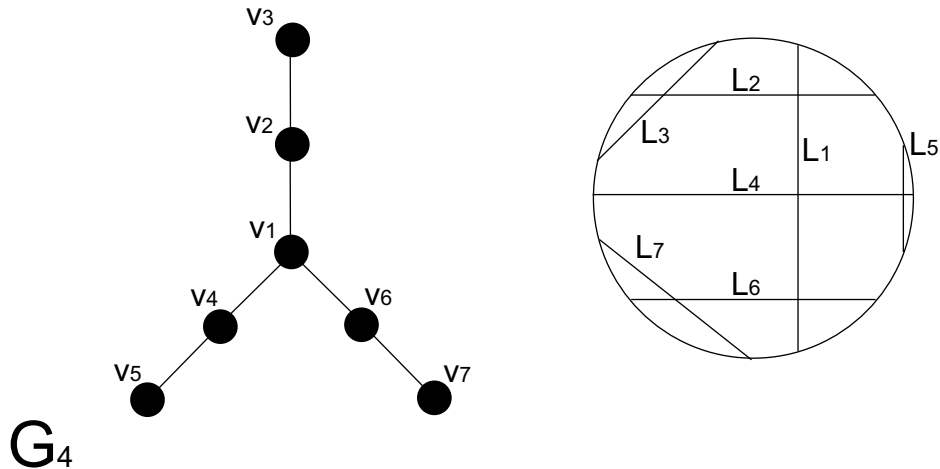


Figura 2.18: Representante minimal de la región 4, y su modelo HC .

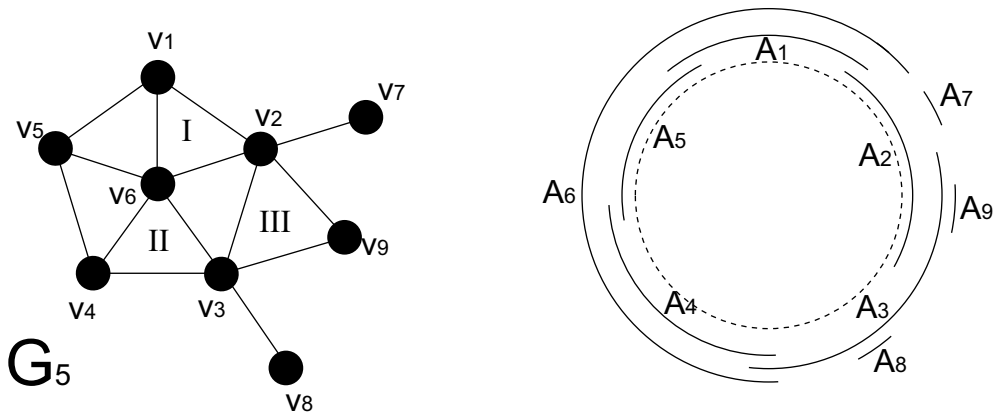


Figura 2.19: Representante minimal de la región 5, y su representación CA .

Demostración:

1. G_5 es un grafo arco-circular: en la Figura 2.19 mostramos una representación arco-circular.
2. G_5 no es un grafo circular: los vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6 inducen W_5 , que no es circular (ver Teorema 2.5).
3. G_5 no es un grafo arco-circular Helly: los vértices v_2, v_3, v_5, v_6, v_7 y v_8 inducen al grafo H_1 (ver Teorema 2.8).
4. G_5 no es un grafo arco-circular clique-Helly: la familia de cliques $\{I, II, III\}$ no verifica la propiedad de Helly.

Veamos por qué satisface la minimalidad:

- Si sacamos v_1, v_2, v_3, v_4, v_6 o v_9 , el grafo resultante es clique-Helly. Debemos ver qué ocurre si seguimos sacando vértices, puesto que, como vimos anteriormente, la propiedad de clique-Helly no es hereditaria. En este caso, es fácil verificar que si sacamos uno de estos vértices, cualquier subgrafo inducido es clique-Helly: los cliques más grandes son de tamaño tres, y no es posible construir una estructura no clique-Helly (como la pirámide) con la disposición de vértices y aristas resultante.
- Si sacamos v_7 o v_8 , es arco-circular Helly: a partir de la Figura 2.19, podemos obtener una representación HCA de $G_5 \setminus \{v_7\}$ (el caso de $G_5 \setminus \{v_8\}$ es análogo) eliminando el arco A_7 y prolongando el extremo superior de A_3 hasta que éste toque a A_6 .
- Si sacamos v_5 , también es arco-circular Helly: en la Figura 2.20 mostramos una representación HCA del grafo resultante. \square

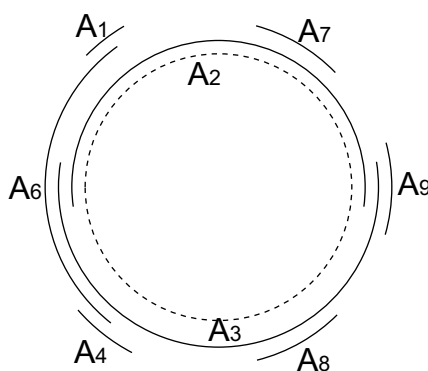


Figura 2.20: Representación HCA de $G_5 \setminus \{v_5\}$.

Proposición 2.6 *El grafo G_6 (Figura 2.21) es un representante minimal de la región número 6: $CHCA \setminus C \setminus HCA$.*

Demostración:

1. G_6 es un grafo arco-circular: sacándole el arco A_9 a la representación de la Figura 2.19, obtenemos una representación CA de G_6 .
2. G_6 es un grafo arco-circular clique-Helly: es fácil ver que la familia de sus siete cliques cumple la propiedad de Helly.
3. G_6 no es un grafo circular: los vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6 inducen W_5 , que no es circular (según el teorema 2.5).
4. G_6 no es un grafo arco-circular Helly: los vértices v_2, v_3, v_5, v_6, v_7 y v_8 inducen al grafo H_1 .

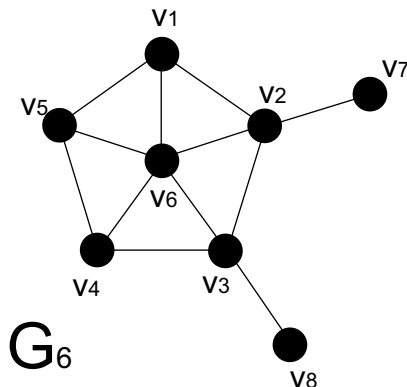


Figura 2.21: Representante minimal de la región 6.

Veamos por qué satisface la minimalidad:

- Si sacamos v_5 , v_7 o v_8 , es arco-circular Helly: las demostraciones son análogas a las de la Proposición 2.5, para los mismos vértices.
- Si sacamos v_1 o v_4 , es circular: en la Figura 2.22 mostramos el grafo resultante y un modelo circular.

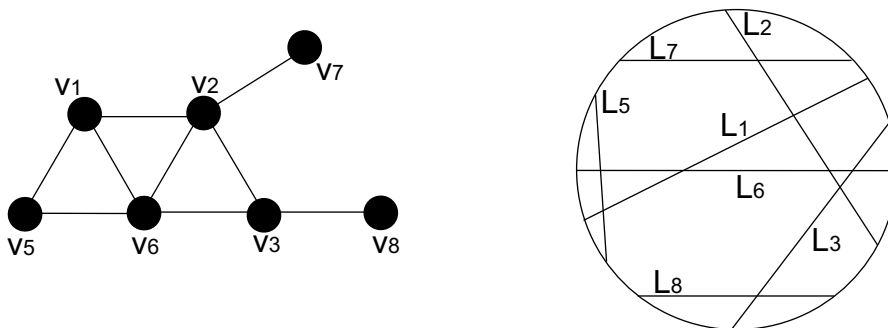


Figura 2.22: $G_6 \setminus \{v_4\}$ y su modelo circular.

- Si sacamos v_2 o v_3 , es circular: en la Figura 2.23 mostramos el grafo resultante y un modelo circular.
- Si sacamos v_6 , es circular: en la Figura 2.24 mostramos el grafo resultante y un modelo circular. \square

Proposición 2.7 *El grafo G_7 (Figura 2.25) es un representante minimal de la región número 7: $HCA \setminus C \setminus CHCA$.*

Demostración:

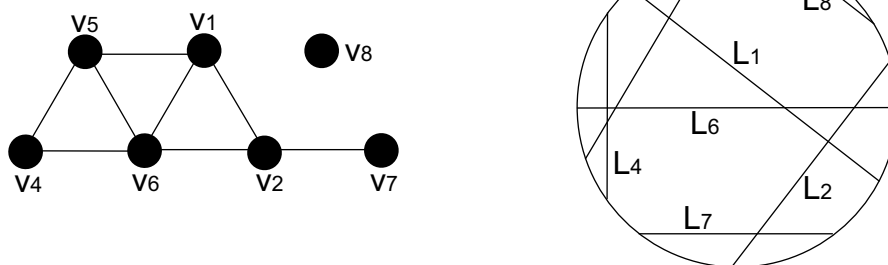


Figura 2.23: $G_6 \setminus \{v_3\}$ y su modelo circular.

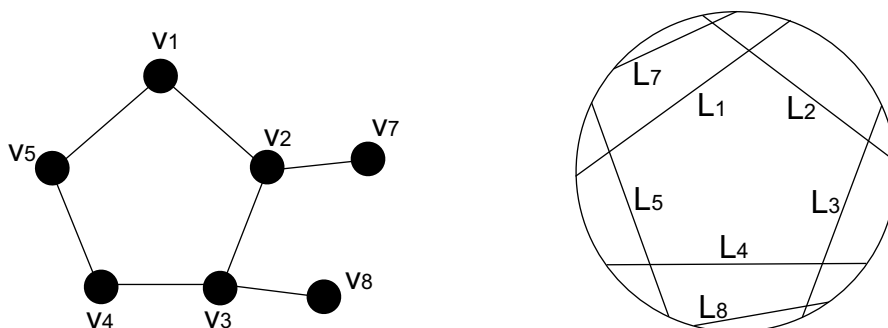


Figura 2.24: $G_6 \setminus \{v_6\}$ y su modelo circular.

1. G_7 es un grafo arco-circular Helly: la Tabla 2.3 muestra la matriz clique de G_7 , si numeramos los cliques de I a VI como en la Figura 2.25. Esta matriz tiene la propiedad de 1's circulares. Por lo tanto, según el teorema 2.7, G_7 es HCA .
2. G_7 no es un grafo circular: los vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6 inducen W_5 , que no es circular.
3. G_7 no es un grafo arco-circular clique-Helly: la familia de cliques $\{I, IV, VI\}$ no verifica la propiedad de Helly.

Veamos por qué satisface la minimalidad:

- Si sacamos v_2 , el grafo resultante es la pirámide, que como veremos en la Proposición 2.16, es circular.
- Si sacamos cualquier otro vértice, el grafo resultante es clique-Helly. En este caso, hay que realizar el mismo análisis que en la prueba de minimalidad de la proposición 2.5. \square

Proposición 2.8 *El grafo G_8 (Figura 2.26) es un representante minimal de la región número 8: $(HCA \cap CHCA) \setminus C$.*

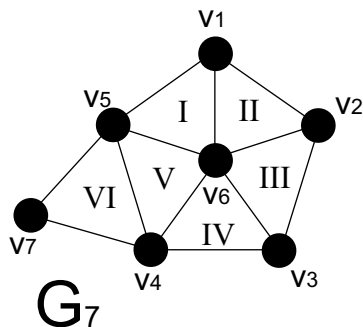


Figura 2.25: Representante minimal de la región número 7.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
<i>I</i>	1	0	0	0	1	1	0
<i>II</i>	1	1	0	0	0	1	0
<i>III</i>	0	1	1	0	0	1	0
<i>IV</i>	0	0	1	1	0	1	0
<i>V</i>	0	0	0	1	1	1	0
<i>VI</i>	0	0	0	1	1	0	1

Tabla 2.3: Matriz A_{G_7} , con la propiedad de 1's circulares.

Demostración:

1. G_8 es un grafo arco-circular Helly: la Tabla 2.4 muestra la matriz clique de G_8 , si numeramos los cliques de I a V como en la Figura 2.26. Como esta matriz tiene la propiedad de 1's circulares, el grafo en cuestión es *HCA* (Teorema 2.7).

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
<i>I</i>	1	0	0	0	1	1
<i>II</i>	1	1	0	0	0	1
<i>III</i>	0	1	1	0	0	1
<i>IV</i>	0	0	1	1	0	1
<i>V</i>	0	0	0	1	1	1

Tabla 2.4: Matriz A_{G_8} , con la propiedad de 1's circulares.

2. G_8 es un grafo arco-circular clique-Helly: todos sus cliques tienen al vértice v_6 en común.
3. G_8 no es un grafo circular: es isomorfo a W_5 , que no es circular, según el Teorema 2.5. \square

Proposición 2.9 *El grafo G_9 (Figura 2.27) es un representante minimal de la región número 9: $(C \cap CA) \setminus HCA \setminus CHCA \setminus PCA$.*

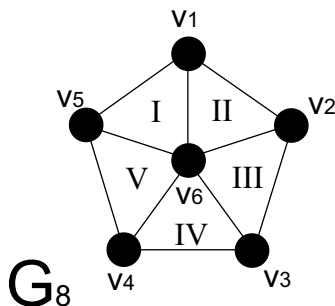


Figura 2.26: Representante minimal de la región número 8.

Demostración:

1. En [10] está probado que G_9 es un grafo arco-circular, pero no arco-circular Helly, ni arco-circular clique-Helly, ni arco-circular propio.
2. G_9 es un grafo circular: la Figura 2.27 muestra un posible modelo de cuerdas del mismo. \square

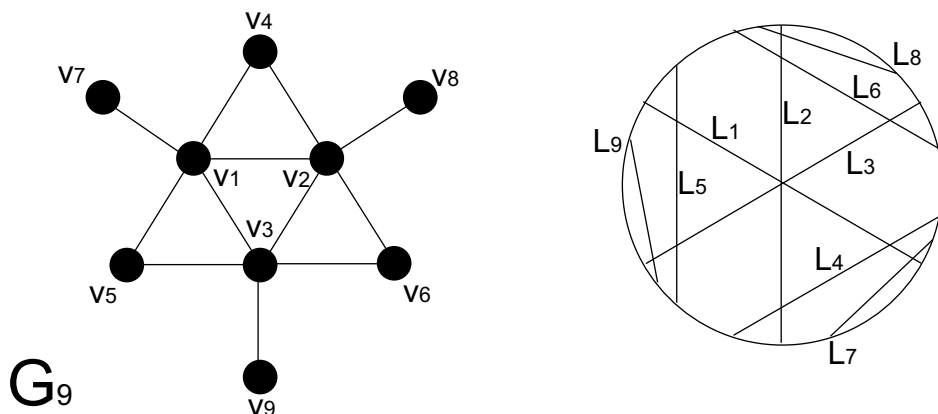


Figura 2.27: Representante minimal de la región 9, y su modelo circular.

Proposición 2.10 ([10]) *El grafo G_{10} (Figura 2.28) es un representante minimal de la región número 10: $(HCA \cap C) \setminus PCA \setminus CHCA$.*

Proposición 2.11 *El grafo G_{11} (Figura 2.29) es un representante minimal de la región número 11: $(CHCA \cap C) \setminus HC \setminus HCA \setminus PCA$.*

Demostración:

1. G_{11} es un grafo circular y arco-circular, como nos muestra la Figura 2.30.

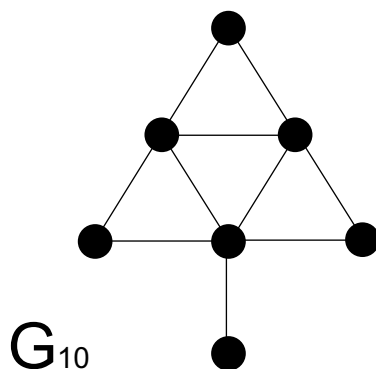


Figura 2.28: Representante minimal de la región número 10.

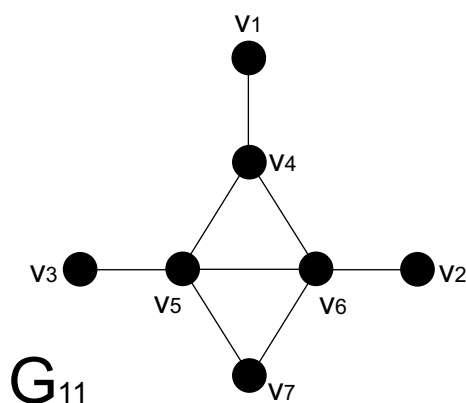


Figura 2.29: Representante minimal de la región número 11.

2. Es fácil ver que G_{11} es un grafo arco-circular clique-Helly.
3. G_{11} no es un grafo circular Helly: los vértices v_4, v_5, v_6 y v_7 inducen un diamante.
4. G_{11} no es un grafo arco-circular Helly: los vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6 inducen al grafo H_1 .
5. G_{11} no es un grafo arco-circular propio: es conexo y cordal, y los vértices v_3, v_4, v_5 , y v_7 inducen al grafo H_2 (ver Teorema 2.6).

Veamos por qué satisface la minimalidad:

- Si sacamos v_4, v_5, v_6 o v_7 , es circular Helly: tras sacar uno de estos vértices, el modelo circular de la Figura 2.30 puede ser modificado sencillamente para que sus cuerdas cumplan la propiedad de Helly.
- Si sacamos v_1 , es arco-circular Helly: en la Figura 2.31 podemos ver el grafo resultante, con sus cliques numerados de I a IV , y en la Tabla

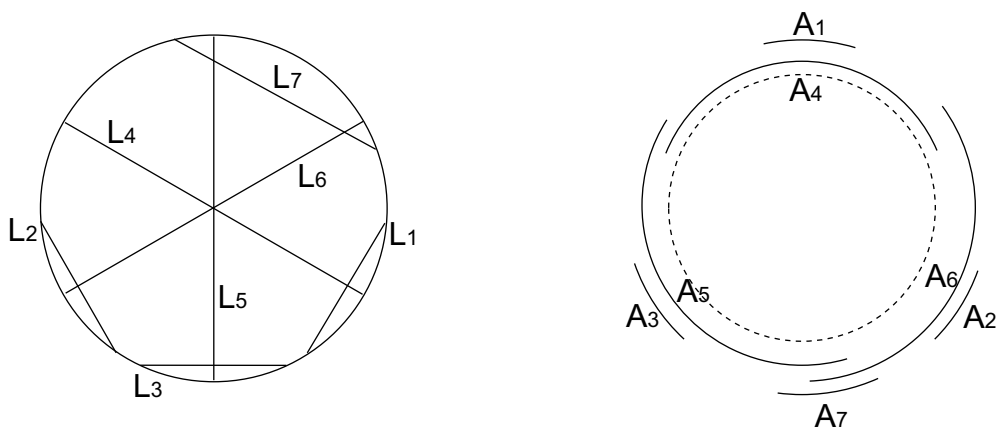


Figura 2.30: Modelo de cuerdas y representación arco-circular de G_{11} .

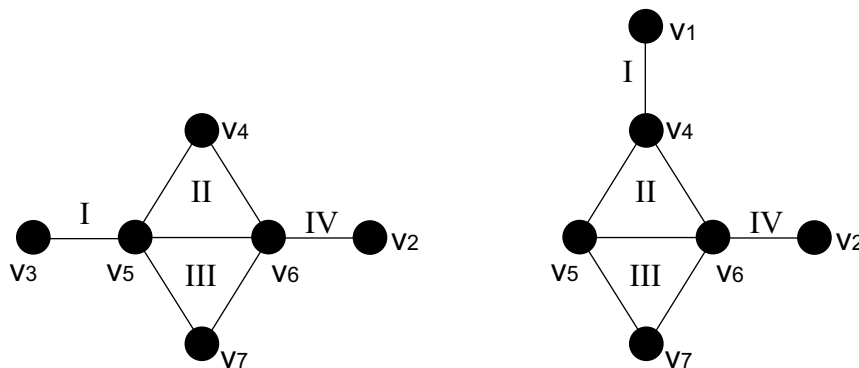


Figura 2.31: $G_{11} \setminus \{v_1\}$ y $G_{11} \setminus \{v_3\}$.

	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
<i>I</i>	0	1	0	1	0	0
<i>II</i>	0	0	1	1	1	0
<i>III</i>	0	0	0	1	1	1
<i>IV</i>	1	0	0	0	1	0

Tabla 2.5: Matriz clique de $G_{11} \setminus \{v_1\}$, con la propiedad de 1's circulares.

2.5 tenemos su matriz clique. Entonces, dicho grafo es HCA porque su matriz clique tiene la propiedad de 1's circulares (Teorema 2.7).

- Por último, si sacamos v_2 o v_3 , también es arco-circular Helly: en la Figura 2.31 podemos ver el grafo resultante, con sus cliques numerados de I a IV , y en la Tabla 2.6 tenemos su matriz clique. Entonces, dicho grafo es HCA porque su matriz clique tiene la propiedad de 1's circulares (Teorema 2.7). \square

	v_1	v_2	v_4	v_5	v_6	v_7
I	1	0	1	0	0	0
II	0	0	1	1	1	0
III	0	0	0	1	1	1
IV	0	1	0	0	1	0

Tabla 2.6: Matriz clique de $G_{11} \setminus \{v_3\}$, con la propiedad de 1's circulares.

Proposición 2.12 *El grafo G_{12} (Figura 2.32) es un representante minimal de la región número 12: $(HC \cap CA) \setminus HCA \setminus PCA$.*

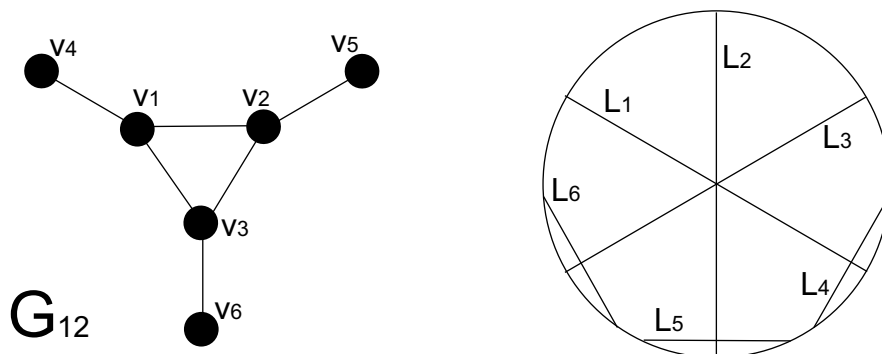


Figura 2.32: Representante minimal de la región 12, y su modelo HC .

Demostración:

1. En [10] está probado que G_{12} es un grafo arco-circular, arco-circular clique-Helly, pero no arco-circular Helly, ni arco-circular propio.
2. G_{12} es un grafo circular Helly: la Figura 2.32 muestra una posible representación HC del mismo. \square

Proposición 2.13 *El grafo G_{13} (Figura 2.33) es un representante minimal de la región número 13: $(HCA \cap CHC) \setminus HC \setminus PCA$.*

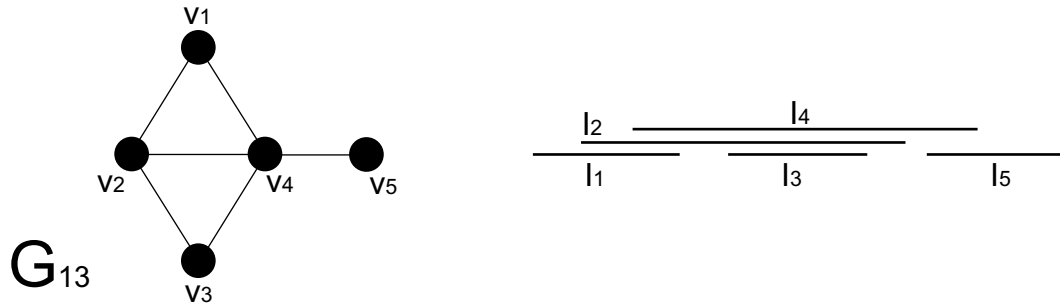


Figura 2.33: Representante de la región 13, y su representación de intervalos.

Demostración:

1. En [10] está probado que G_{13} es un grafo circular clique-Helly, pero no circular Helly, ni arco-circular propio.
2. G_{13} es un grafo arco-circular Helly: la Figura 2.33 muestra una posible representación de intervalos (toda representación de intervalos respeta trivialmente la propiedad de Helly). \square

Proposición 2.14 ([10]) *El grafo G_{14} (Figura 2.34) es un representante minimal de la región número 14: $(HCA \cap HC) \setminus PCA$.*

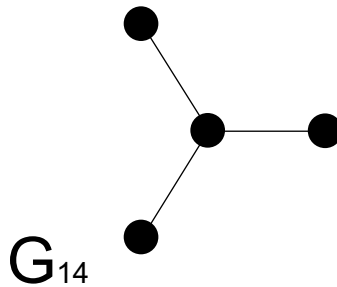


Figura 2.34: Representante minimal de la región número 14.

Proposición 2.15 ([10]) *El grafo G_{15} (Figura 2.35) es un representante minimal de la región número 15: $PCA \setminus UCA \setminus HCA \setminus CHCA$.*

Observación: El grafo G_{15} es conocido como $CI(5, 2)$. La definición de la familia de grafos CI es estudiada en la sección 5.1 de esta tesis.

Proposición 2.16 ([10]) *El grafo G_{16} (Figura 2.36) es un representante minimal de la región número 16: $(PCA \cap HCA) \setminus UCA \setminus CHCA$.*

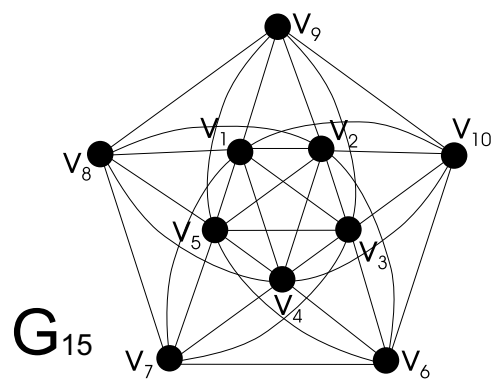


Figura 2.35: Representante minimal de la región número 15.

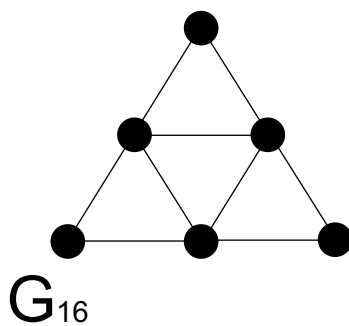


Figura 2.36: Representante minimal de la región número 16.

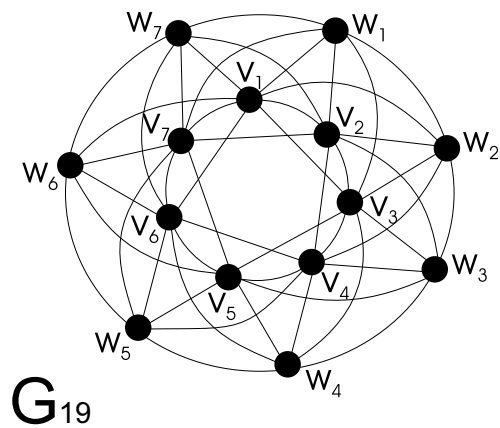


Figura 2.37: Representante minimal de la región número 19.

Proposición 2.17 *El grafo G_{19} (Figura 2.37) es un representante minimal de la región número 19: $(CHCA \cap PCA \cap HCA) \setminus HC \setminus UCA$.*

Observación: El grafo G_{19} es conocido como $CI(7, 2)$. La definición de la familia de grafos CI es estudiada en la sección 5.1 de esta tesis.

Demostración:

1. En [10] está probado que G_{19} es un grafo circular clique-Helly y arco-circular propio (y en consecuencia, también arco-circular clique-Helly), pero no circular Helly ni arco-circular unitario.
2. G_{19} es un grafo arco-circular Helly: si no lo fuera, pertenecería a la región número 17, que, como ya vimos, es vacía. \square

Proposición 2.18 ([10]) *El grafo G_{20} (Figura 2.38) es un representante minimal de la región número 20: $(HC \cap HCA \cap PCA) \setminus UCA$.*

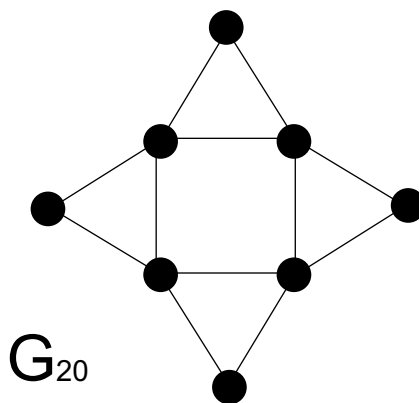


Figura 2.38: Representante minimal de la región número 20.

Proposición 2.19 ([10]) *El grafo G_{21} (Figura 2.39) es un representante minimal de la región número 21: $UCA \setminus HCA \setminus CHCA$.*

Proposición 2.20 ([10]) *El grafo G_{22} (Figura 2.40) es un representante minimal de la región número 22: $(UCA \cap HCA) \setminus CHCA$.*

Proposición 2.21 *El grafo G_{23} (Figura 2.41) es un representante minimal de la región número 23: $(UCA \cap CHCA) \setminus HCA \setminus HC$.*

Demostración:

1. En [10] está probado que G_{23} es un grafo arco-circular unitario y arco-circular clique-Helly, pero no arco-circular Helly.

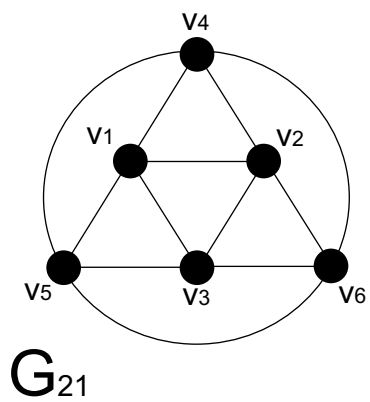


Figura 2.39: Representante minimal de la región número 21.

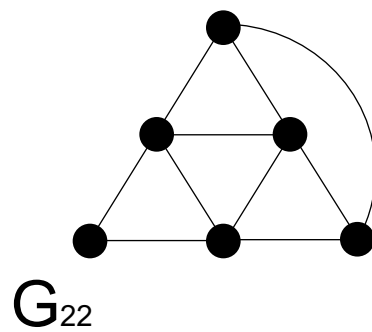


Figura 2.40: Representante minimal de la región número 22.

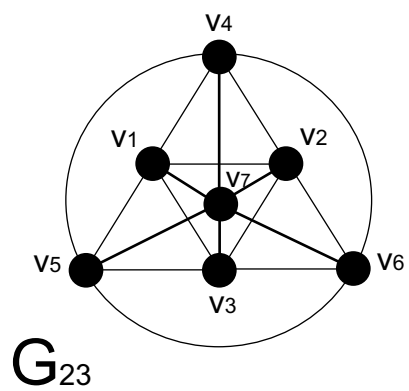


Figura 2.41: Representante minimal de la región número 23.

2. G_{23} no es un grafo circular Helly: el subgrafo inducido por los vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 es un diamante. \square

Proposición 2.22 *El grafo G_{25} (Figura 2.42) es un representante minimal de la región número 25: $(HCA \cap UCA \cap CHCA) \setminus HC$.*

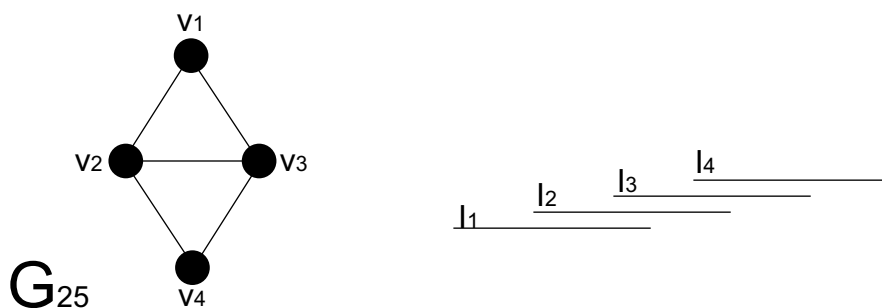


Figura 2.42: Grafo de la región 25, con su representación de intervalos.

Demostración:

1. G_{25} es un grafo arco-circular Helly y arco-circular unitario: la Figura 2.42 muestra una representación de intervalos unitaria.
2. G_{25} no es un grafo circular Helly, ¡porque es un diamante!
3. G_{25} es un grafo circular clique-Helly: sus únicos dos cliques tienen vértices en común. \square

Proposición 2.23 *El grafo G_{26} (Figura 2.43) es un representante minimal de la región número 26: $UCA \cap HCA \cap HC$.*

Demostración: Trivial. \square



Figura 2.43: Representante minimal de la región número 26.

2.5 Árboles

Un grafo G es un árbol si es conexo y no contiene ciclos. En esta sección, analizamos la pertenencia de los árboles a las distintas clases de grafos estudiadas en las secciones anteriores.

2.5.1 Los árboles son circulares

En primer lugar, demostramos que es posible encontrar un modelo circular para cualquier árbol, y mostramos un algoritmo lineal para construir dicho modelo.

Teorema 2.9 *Si G es un árbol, entonces G es circular.*

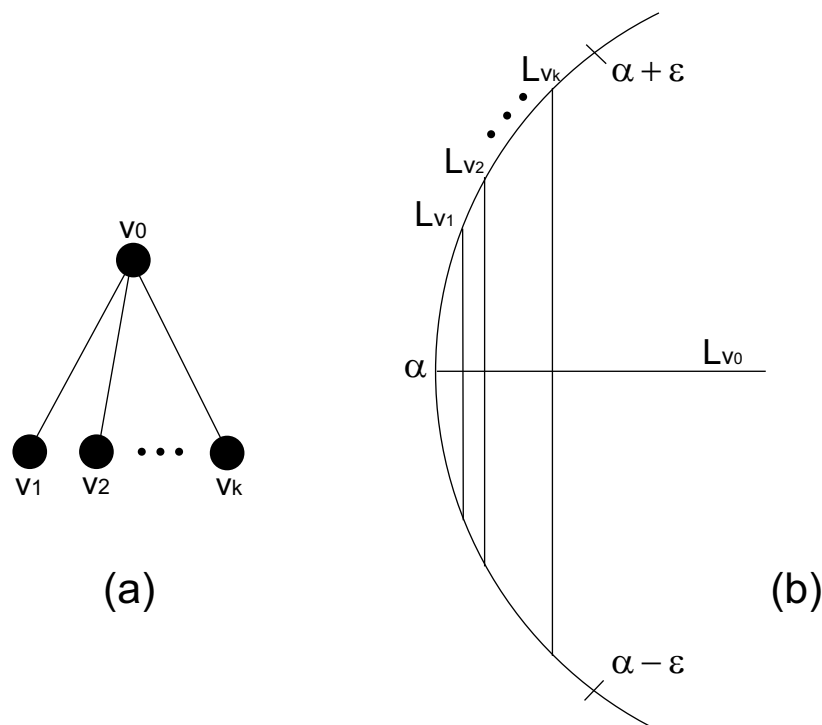


Figura 2.44: Paso inductivo en la construcción del modelo circular.

Demostración:

La demostración es constructiva. Empezamos con el nodo raíz del árbol, para el cual ponemos una cuerda en cualquier parte del círculo. Ahora avanzamos en la construcción del modelo circular de la siguiente manera:

Si el nodo actual es una hoja, listo (ya lo dibujamos). Si no, llamemos v_0 al nodo actual, y v_1, v_2, \dots, v_k a sus k hijos (Figura 2.44(a)). La cuerda L_{v_0} ya está dibujada. Tomemos uno de sus extremos, que llamamos α . Existe un número real $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, tal que en el arco circular $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ no hay otro extremo más que el de L_{v_0} . Dentro de ese arco,

dibujamos las cuerdas $L_{v_1}, L_{v_2}, \dots, L_{v_k}$, en paralelo, y de manera tal que todas corten a L_{v_0} , como se ve en la Figura 2.44(b).

Para cada uno de los nodos v_1, v_2, \dots, v_k , repetimos el procedimiento anterior. Y continuamos de este modo hasta haber dibujado todo el árbol. Esto nos da un modelo circular para cualquier árbol. Por lo tanto, los árboles son circulares. \square

De la demostración anterior se desprende de manera natural un algoritmo de construcción de un modelo circular para cualquier árbol, que presentamos en el Apéndice A.1.

2.5.2 Los árboles y las demás clases

Proposición 2.24 *Los árboles pertenecen a las regiones número 4, 14 ó 26 de la Figura 2.5: $HC \setminus CA$, $(HCA \cap HC) \setminus PCA$, o $UCA \cap HCA \cap HC$, respectivamente.*

Demostración:

Como vimos en las proposiciones 2.4, 2.14 y 2.23, los grafos G_4, G_{14} y G_{26} pertenecen a las regiones 4, 14 y 26, respectivamente. Veamos ahora que no hay árboles en las regiones restantes.

Ya vimos que los árboles son circulares. Ahora bien, si G es un árbol, sabemos por definición que no tiene ciclos. En particular, tampoco tiene a K_3 como subgrafo inducido, lo cual implica que no tiene cliques de tamaño mayor a dos. Entonces, en cualquier representación circular de un árbol, sus cuerdas respetan trivialmente la propiedad de Helly. En consecuencia, todo árbol es circular Helly (HC).

Supongamos que tenemos un árbol G arco-circular. Como G es un árbol, no tiene a K_3 como subgrafo inducido, lo cual implica que los arcos de cualquier representación CA de G respetan la propiedad de Helly. Entonces, si un árbol es arco-circular, también es arco-circular Helly (HCA).

El Teorema 5.1 dice que si un grafo es arco-circular propio, pero no es arco-circular unitario, entonces tiene como subgrafo inducido a un grafo $CI(j, k)$, con j, k coprimos, y $j > 2k$ (la familia de grafos CI es definida y estudiada en mayor detalle en la sección 5.1 de esta tesis). Tales grafos tienen ciclos inducidos, por lo que no son árboles. Entonces, si un árbol es arco-circular propio (PCA), también es arco-circular unitario (UCA).

En conclusión, los árboles pertenecen a $HC \setminus CA$, a $(HCA \cap HC) \setminus PCA$, o a $UCA \cap HCA \cap HC$. \square

Presentamos a continuación una clasificación de los árboles en las tres regiones mencionadas; i.e., dado un árbol, mostramos una forma de determinar si pertenece a la región 4, a la 14, o a la 26.

Proposición 2.25 *Un árbol pertenece a la región número 26 ($UCA \cap HCA \cap HC$) si y sólo si es un camino (es decir, es un árbol con todos los vértices de grado a lo sumo 2).*

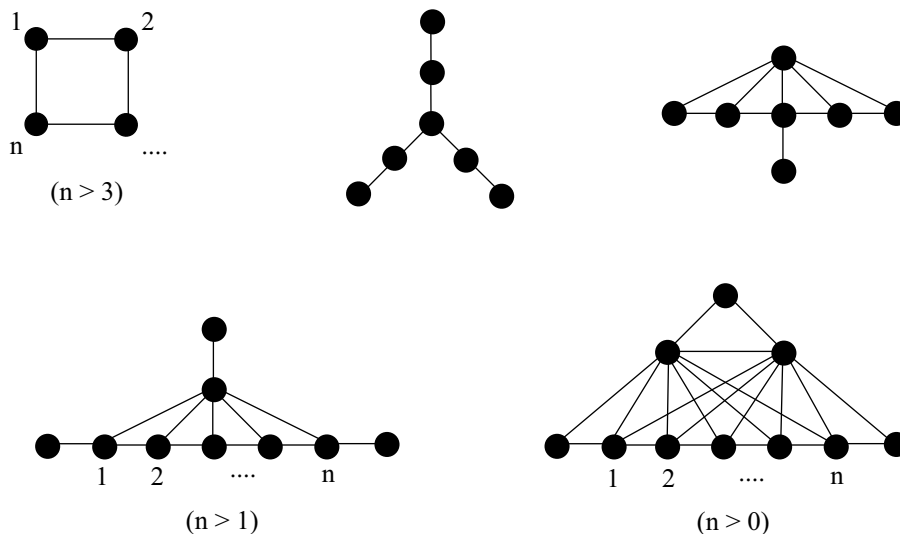


Figura 2.45: Estructuras prohibidas para grafos de intervalos.

Demostración:

Por un lado, es fácil ver que si un grafo es un camino, entonces pertenece a las clases UCA , HCA y HC .

Veamos la recíproca. Sea G un árbol perteneciente a la región número 26. Supongamos que G tiene algún vértice v de grado mayor que 2. Como G no tiene ciclos, el grafo inducido por v y tres vecinos cualesquiera de v es isomorfo a G_{14} (Figura 2.34). Pero ese grafo no es PCA (Proposición 2.14), lo cual contradice el hecho de que G pertenece a la región número 26. El absurdo proviene de suponer que G tiene algún vértice de grado mayor que 2. Por lo tanto, G es un camino. \square

Veamos la siguiente caracterización de los grafos de intervalos mediante estructuras prohibidas, presentada por Lekkerkerker y Boland:

Teorema 2.10 ([20]) *Un grafo es de intervalos si y sólo si no contiene como subgrafo inducido a ninguno de los grafos de la Figura 2.45.*

Corolario 2.4 *Un árbol es de intervalos si y sólo si no contiene como subgrafo inducido a G_4 (Figura 2.18).*

Demostración:

De las cinco estructuras prohibidas del Teorema 2.10, solamente una de ellas puede ser contenida como subgrafo inducido por un árbol: justamente G_4 . Todas las demás tienen ciclos. \square

Corolario 2.5 *Un árbol es arco-circular si y sólo si es de intervalos.*

Demostración:

Sea G un árbol arco-circular, y supongamos que no es de intervalos. Entonces, por el Teorema 2.10, G contiene como subgrafo inducido a alguno de los grafos de la Figura 2.45, y como es un árbol, solamente puede tratarse de G_4 . Pero ese grafo no es arco-circular (Proposición 2.4), lo cual implica que G tampoco lo es. Esta contradicción proviene de suponer que G no es de intervalos. Por lo tanto, si G es arco-circular, también es de intervalos. La recíproca es cierta porque los grafos de intervalos son una subclase de los grafos arco-circulares. \square

Proposición 2.26 *Un árbol no perteneciente a la región número 26 ($UCA \cap HCA \cap HC$) pertenece a la región número 14 ($(HCA \cap HC) \setminus PCA$) si y sólo si no tiene como subgrafo inducido a G_4 (Figura 2.18).*

Demostración:

Según los corolarios 2.4 y 2.5, un árbol es arco-circular si y sólo si no contiene a G_4 como subgrafo inducido. Según la Proposición 2.24, los árboles pertenecen a las regiones 4, 14 ó 26. Sea G un árbol no perteneciente a la región número 26. Si G tiene a G_4 , entonces no es arco-circular, y cae en la región número 4. Si no tiene a G_4 , entonces es arco-circular, por lo que cae en la región número 14. \square

Las proposiciones 2.25 y 2.26 nos ofrecen un método para determinar eficientemente a cuál de las tres regiones pertenece un árbol G :

1. Si todos los vértices de G tienen grado ≤ 2 , G pertenece a la región número 26.
2. En caso contrario, si G no contiene a G_4 como subgrafo inducido, G pertenece a la región número 14.
3. En caso contrario, G pertenece a la región número 4.

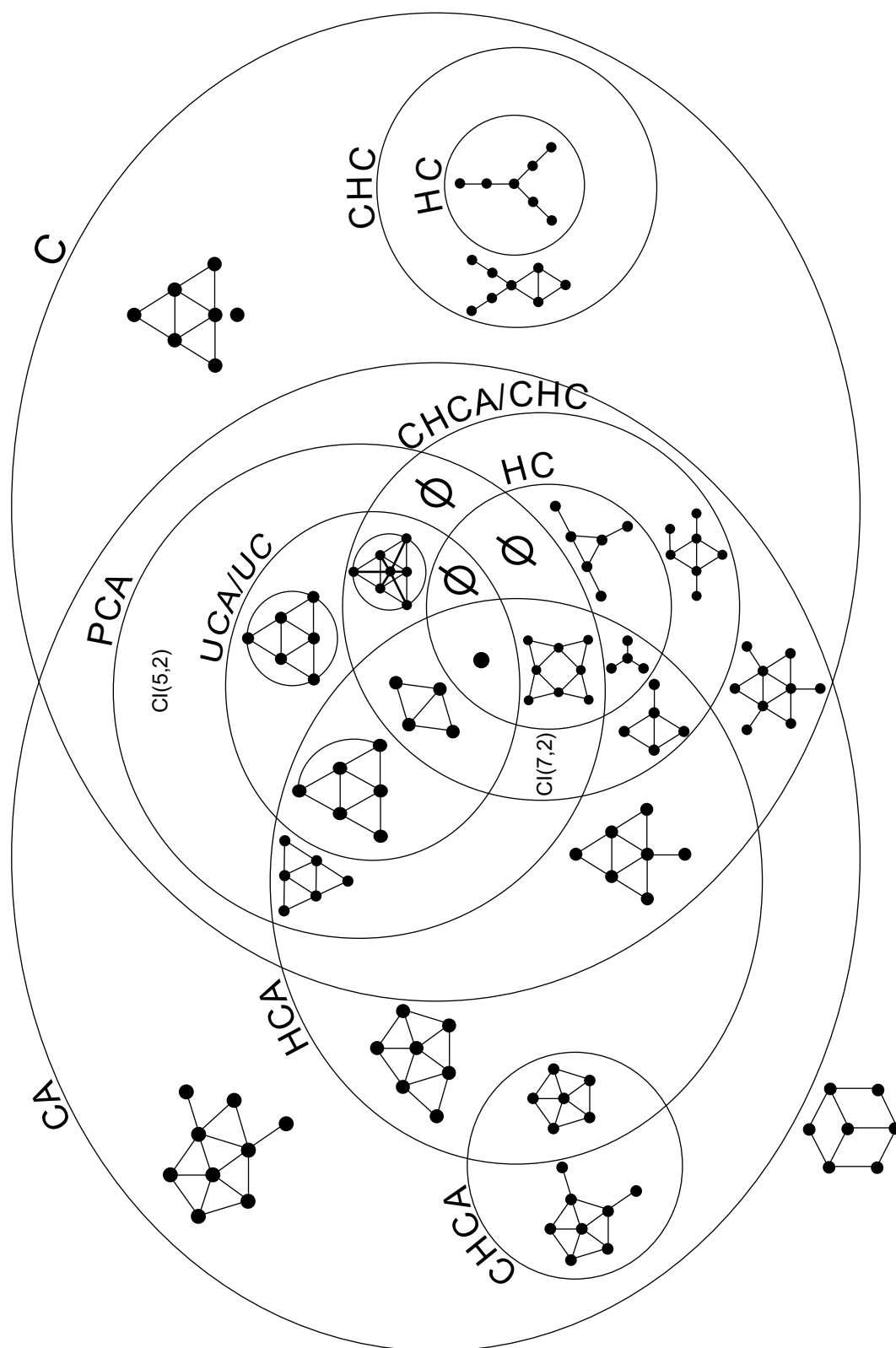


Figura 2.46: Las 26 regiones y sus representantes minimales.

Capítulo 3

Cruce de regiones: grafos intersección y overlap

Los grafos circulares son equivalentes a los grafos overlap de intervalos (conocidos en la literatura como grafos overlap). Un grafo G es overlap de intervalos si sus vértices pueden ser puestos en correspondencia 1-1 con una familia de intervalos en la recta real, de manera que dos vértices son adyacentes en G si y sólo si sus correspondientes intervalos se superponen (tienen intersección no vacía, pero ninguno está contenido propiamente en el otro). La prueba de la equivalencia entre ambas clases puede encontrarse en [14].

Los grafos overlap de arcos alrededor de un círculo, también conocidos como grafos overlap de arco-circulares (CAO), son una generalización de los grafos circulares. Claramente, cualquier grafo G circular es un grafo CAO , ya que la representación de G en overlap de intervalos sirve como overlap de arco-circulares. Como veremos más adelante, la recíproca no es cierta. Estos grafos han sido poco estudiados en la literatura ([10], [19]).

Un grafo G es de intervalos (I) si sus vértices se corresponden 1-1 con una familia de intervalos en la recta real, de manera que dos vértices son adyacentes en G si y sólo si sus correspondientes intervalos se intersecan.

Los grafos arco-circulares (CA) son una generalización de los grafos de intervalos, dado que cualquier representación en intervalos sirve como representación arco-circular. La recíproca no vale, como veremos enseguida.

En este capítulo, presentamos un estudio del cruce de estas cuatro clases de grafos: C , CAO , I y CA . Mostramos que las dos inclusiones recién mencionadas ($I \subset CA$ y $C \subset CAO$) son las únicas ciertas entre estas cuatro clases. Además, en este caso, no hay regiones vacías.

3.1 Algunos resultados útiles

En primer lugar, presentamos una serie de resultados que serán usados en las demostraciones de este capítulo.

Teorema 3.1 ([10]) *Sea G un grafo CAO . G es circular si y sólo si G*

tiene una representación en overlap de arcos circulares tal que no existen dos arcos que cubran todo el círculo.

Corolario 3.1 ([10]) *Sea G un grafo CAO no circular y H un nuevo grafo constituido por dos copias de G . Entonces H no es un grafo CAO.*

Corolario 3.2 ([10]) *Sea G un grafo CAO no circular y de intervalos, y H un nuevo grafo constituido por dos copias de G . Entonces H es un grafo arco-circular que no pertenece a CAO.*

Lema 3.1 *Sea G un grafo cualquiera. Si cada una de sus componentes conexas es CAO, y a lo sumo una de ellas no es circular, entonces G es CAO.*

Demostración:

Llamemos H_1, \dots, H_q a las componentes conexas de G , con $q \geq 1$. Sabemos que todas ellas son CAO, y que a lo sumo una de ellas no es circular.

En el caso en que todas son circulares, basta tomar una representación en overlap de intervalos de cada H_i y colocarlas en distintas partes del círculo, para conseguir una representación CAO de G .

Si hay una componente no circular, tomamos una representación CAO de la misma, que llamamos R . Por el Teorema 3.1, R necesariamente cubre todo el círculo. Las representaciones en overlap de intervalos de las restantes H_i pueden ser tan pequeñas como uno quiera. Entonces, las insertamos en R de modo tal que los arcos de cada una queden totalmente incluidos en uno o más arcos ya existentes. Esto evita que se formen adyacencias que no existen en G . De esta forma, conseguimos una representación CAO de G . \square

3.2 Ejemplos minimales

Vamos a demostrar que cada uno de los grafos de la Figura 3.1 pertenece a la región respectiva, y verificaremos su minimalidad. Al hablar de minimalidad de los grafos, nos referimos a que cualquier subgrafo inducido de ellos pertenece a otra región.

Proposición 3.1 *El grafo G_1 (Figura 3.2) es CAO, pero no es circular ni arco-circular.*

Demostración:

En la Proposición 2.1 vimos que G_1 no es circular ni arco-circular. Por otra parte, la Figura 3.2 muestra una representación de G en overlap de arcos circulares. La minimalidad de G_1 también está mostrada en la proposición recién mencionada. \square

Proposición 3.2 *El grafo formado por dos copias de G_1 (que llamamos BG_1) no es CAO ni arco-circular.*

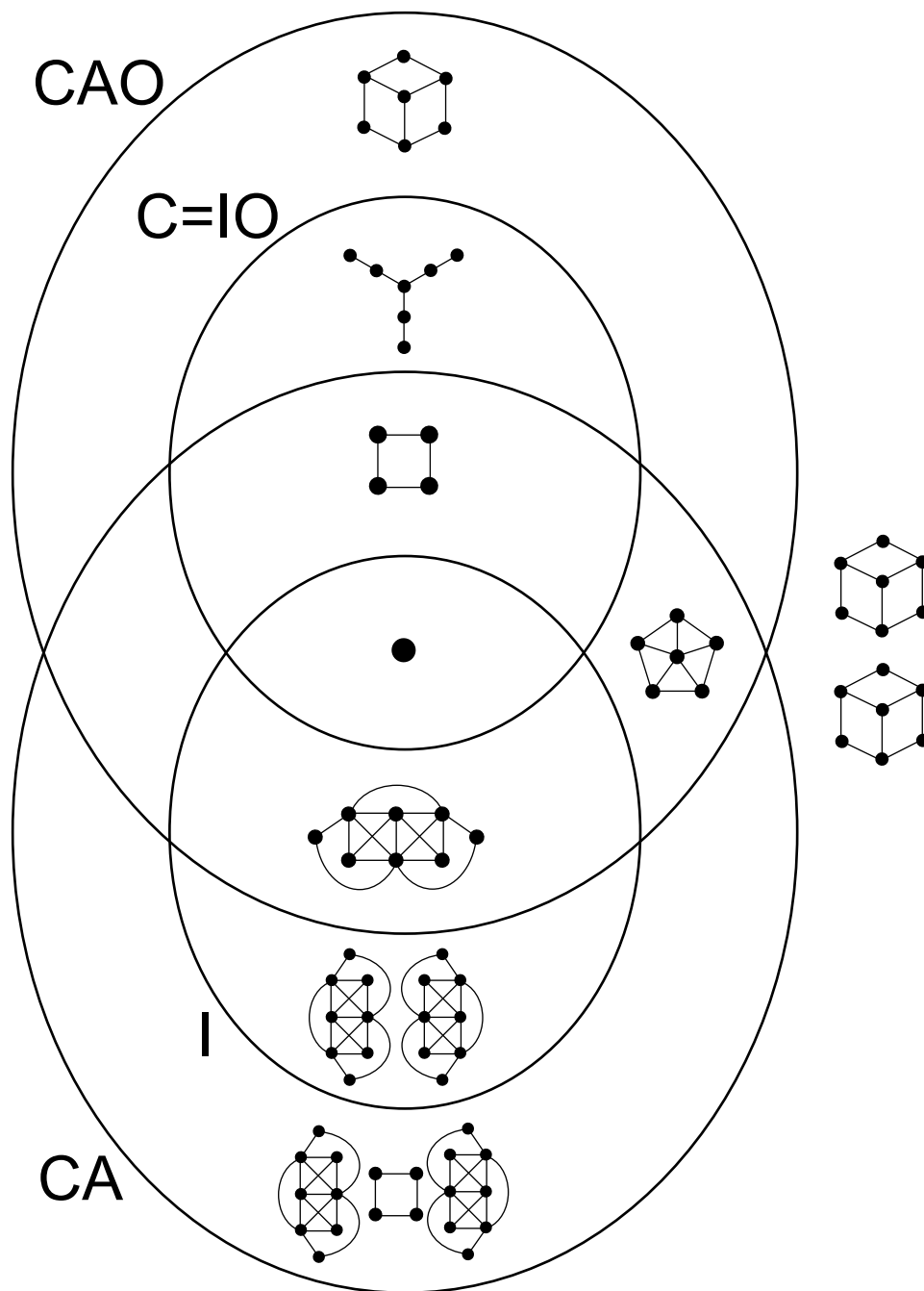


Figura 3.1: Cruce de las clases C , CAO , I y CA .

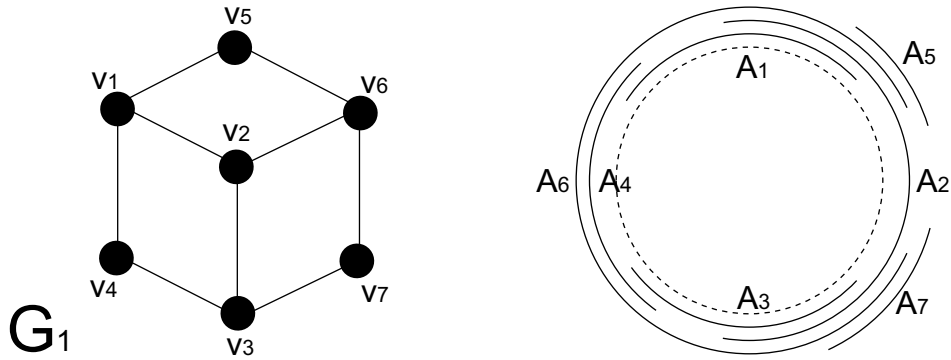


Figura 3.2: G_1 y su representación CAO.

Demostración:

En la proposición anterior vimos que G_1 es un grafo CAO no circular. Entonces, por el Corolario 3.1, BG_1 no es CAO. Además, BG_1 no es arco-circular porque ya vimos que sus componentes conexas tampoco lo son.

Para ver la minimalidad, observemos que las dos componentes conexas de BG_1 son CAO no circulares. Sacándole cualquier vértice a una de ellas, la misma queda circular, como vimos en la Proposición 2.1. Por lo tanto, usando el Lema 3.1 llegamos a que, si le sacamos cualquier vértice a BG_1 , el grafo resultante es CAO. Por lo tanto, BG_1 es minimal. \square

Proposición 3.3 *El grafo G_8 (Figura 3.3) es CAO y arco-circular, pero no es circular ni de intervalos.*

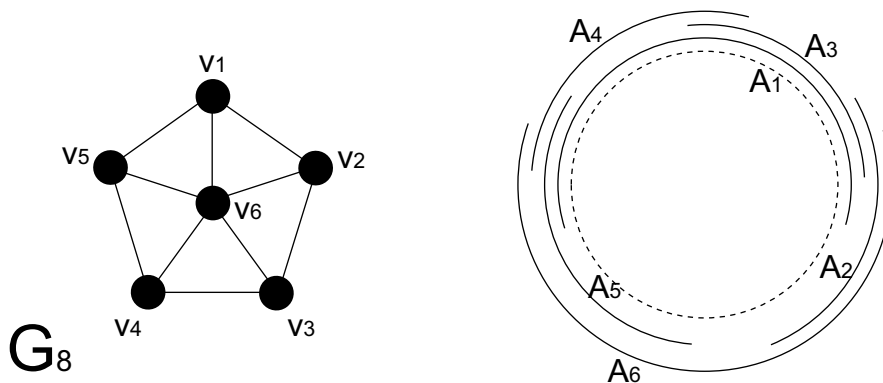


Figura 3.3: G_8 y su representación CAO.

Demostración:

- En la Proposición 2.8 vimos que G_8 es un grafo arco-circular, pero no circular.
- G_8 es CAO: en la Figura 3.3 mostramos una representación CAO del mismo.

- G_8 no es de intervalos: los vértices v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 inducen un ciclo de longitud mayor a tres, y no existe ninguna representación de intervalos para tales ciclos.

Veamos la minimalidad de G_8 : si sacamos v_6 queda C_5 , y si sacamos cualquier otro vértice queda F_4 . Para ambos grafos, es fácil encontrar un modelo circular. \square

Proposición 3.4 ([8]) *El grafo CZ (Figura 3.4) es CAO y de intervalos, pero no es circular.*

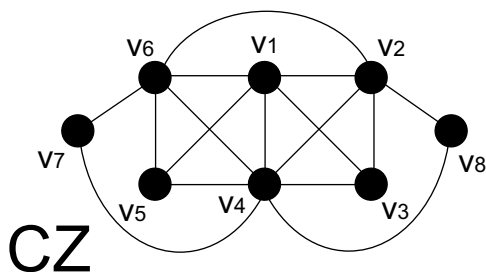


Figura 3.4: El grafo CZ.

Demostración:

- CZ es un grafo CAO: en la Figura 3.5 mostramos una representación en overlap de intervalos del mismo.
- CZ no es un grafo circular: complementando localmente primero por v_7 y después por v_8 , obtenemos un grafo que tiene a W_5 como subgrafo inducido (por los vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6). Entonces, como consecuencia del Teorema 2.5, CZ no es circular.
- CZ es un grafo de intervalos: en la Figura 3.6 mostramos una representación de intervalos del mismo. \square

Analicemos ahora la minimalidad del grafo CZ, respecto de la cantidad de vértices. Para ello basta observar que si sacamos cualquier vértice, el grafo resultante es circular.

En la Figura 3.7, mostramos los grafos resultantes de sacarle a CZ cada uno de sus vértices, y sus respectivos modelos circulares:

- $CZ \setminus \{v_1\}$
- $CZ \setminus \{v_2\}$ (isomorfo a $CZ \setminus \{v_6\}$)
- $CZ \setminus \{v_4\}$
- $CZ \setminus \{v_3\}$ (isomorfo a $CZ \setminus \{v_5\}$)
- $CZ \setminus \{v_7\}$ (isomorfo a $CZ \setminus \{v_8\}$)

\square

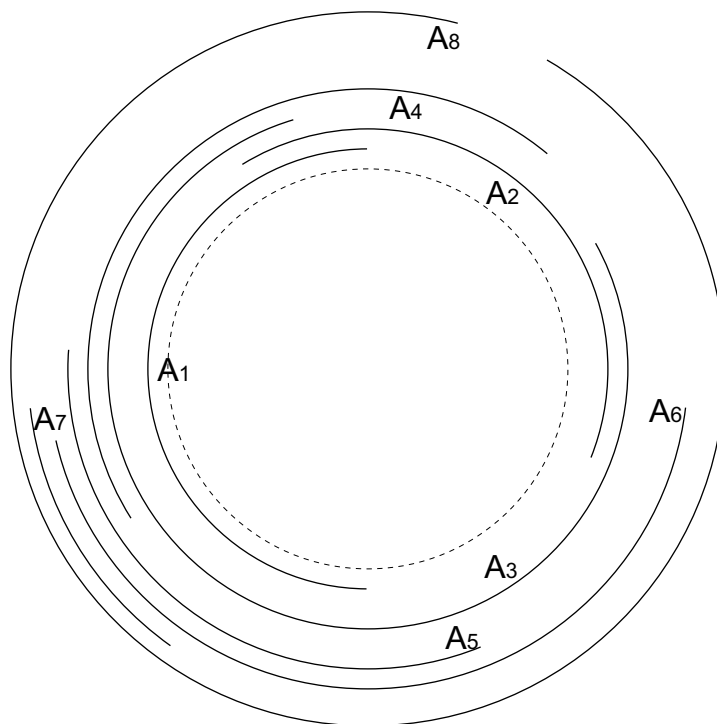


Figura 3.5: Representación *CAO* del grafo *CZ*.

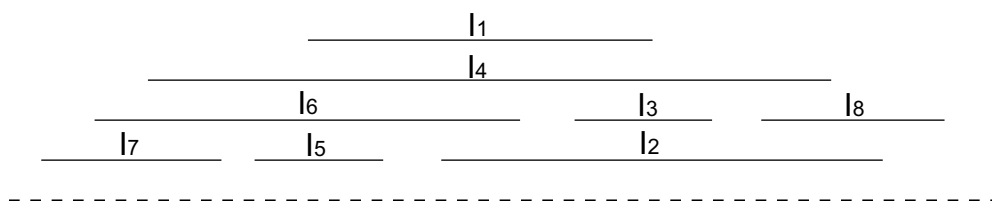


Figura 3.6: Representación de intervalos del grafo *CZ*.

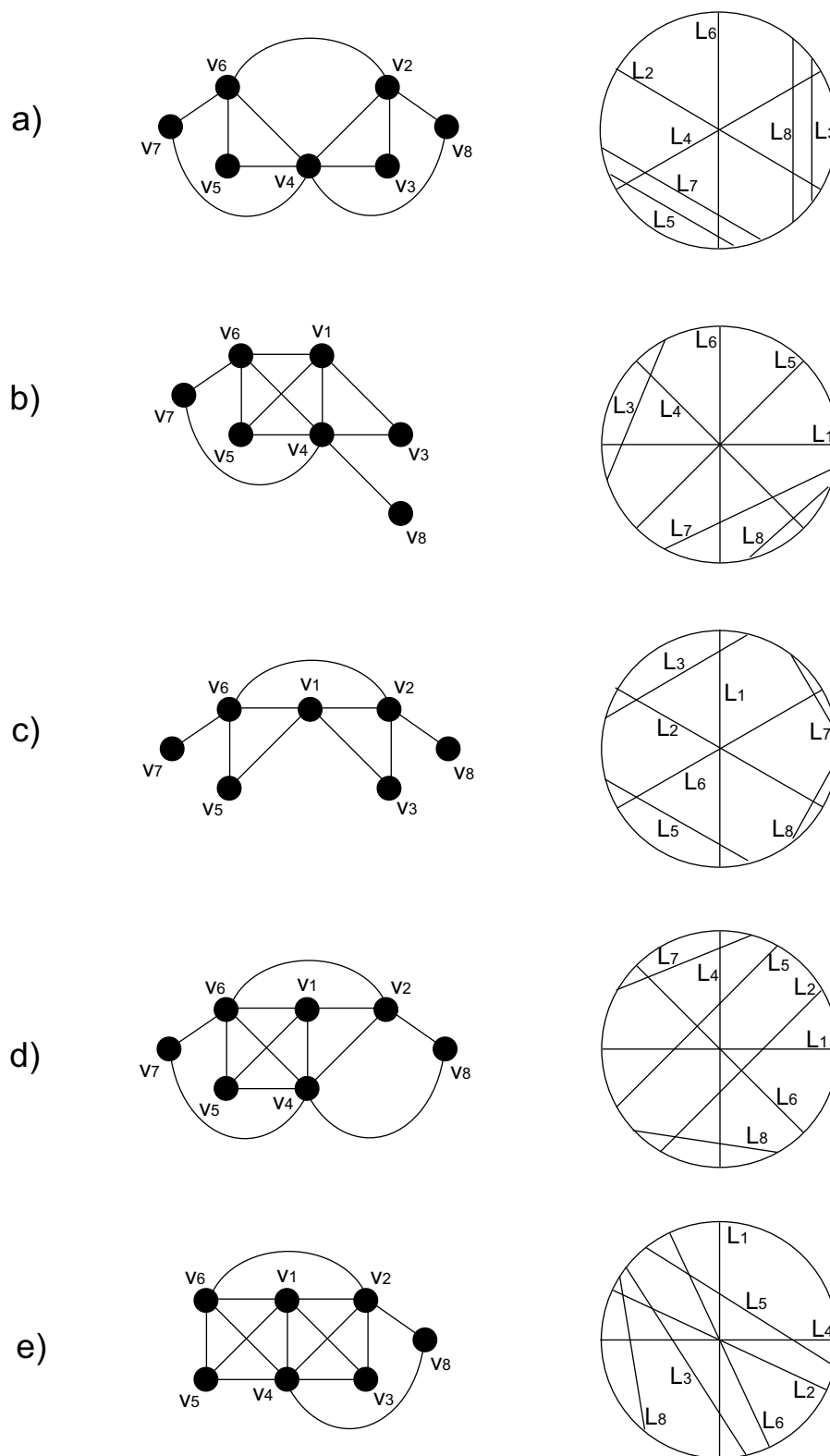


Figura 3.7: CZ menos alguno de sus vértices, y sus modelos circulares.

Proposición 3.5 *El grafo formado por dos copias de CZ (que llamamos BCZ) es de intervalos, pero no es CAO .*

Demostración:

En la proposición anterior vimos que CZ es un grafo CAO no circular y de intervalos. Entonces, por el Corolario 3.2, BCZ no es CAO . Además, BCZ es de intervalos, porque sus dos componentes conexas lo son; entonces basta con escribir la representación de intervalos de una al lado de la otra para tener una representación de intervalos de todo el grafo.

Para verificar la minimalidad de BCZ , observemos que sus dos componentes conexas son CAO no circulares y, como vimos en la proposición anterior, al sacarles un vértice cualquiera, pasan a ser circulares. Entonces, usando el Lema 3.1 llegamos a que si le sacamos un vértice a BCZ , el grafo resultante es CAO . En consecuencia, BCZ es minimal. \square

Proposición 3.6 *El grafo C_4 (Figura 3.8) es circular y arco-circular, pero no de intervalos.*

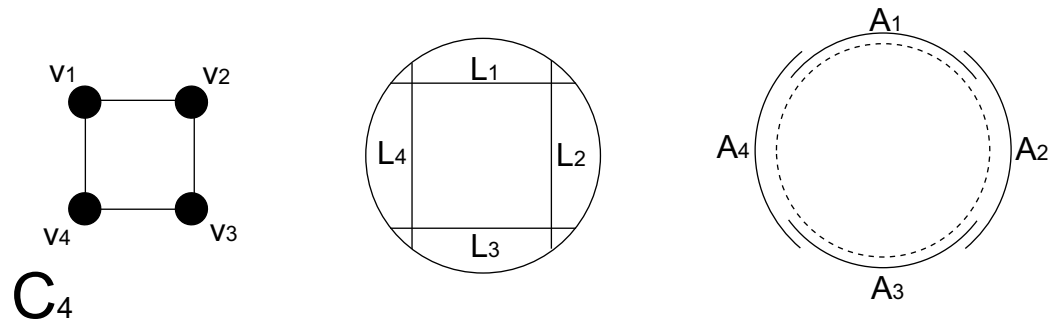


Figura 3.8: C_4 , su modelo de cuerdas y su representación arco-circular.

- C_4 es un grafo circular y arco-circular: en la Figura 3.8 mostramos un modelo de cuerdas y una representación arco-circular del mismo.
- C_4 no es un grafo de intervalos: es fácil verificar que para ciclos de tamaño mayor a tres no hay forma de construir una representación de intervalos.

La minimalidad de C_4 es muy fácil de verificar: si le sacamos cualquier vértice, el grafo resultante es un camino de tres vértices, que es trivialmente de intervalos. \square

Proposición 3.7 *El grafo formado por dos copias de CZ y una copia de C_4 es CA , pero no es de intervalos ni CAO .*

Demostración:

La demostración es análoga a la de la Proposición 3.5, pero con la salvedad de que ahora una de las componentes conexas del grafo no es intervalos. Por lo tanto, el grafo completo tampoco lo es.

Veamos la minimalidad de este grafo:

- Si le sacamos un vértice a la componente C_4 , dejamos las tres componentes de intervalos, con lo cual el grafo entero pasa también a ser de intervalos.
- Si le sacamos un vértice a una de las otras dos componentes, la misma nos queda circular (según lo visto en la Proposición 3.4). En ese caso, tenemos un grafo con dos componentes CAO circulares y una CAO no circular. Entonces, por el Lema 3.1, el grafo resultante es CAO . \square

Proposición 3.8 *El grafo G_4 (Figura 2.18) es circular, pero no es arco-circular.*

Demostración:

Ver Proposición 2.4. La minimalidad se verifica observando que al sacar cualquier vértice, es fácil construir una representación arco-circular para el grafo resultante. \square

Proposición 3.9 *El grafo G_{26} (Figura 2.43) es circular y de intervalos.*

Demostración: Trivial. \square

Capítulo 4

Grafos e-circulares

Trabajando en un problema abierto de grafos circulares, conocido como la Conjetura del Diamante [10], Fabio Protti [22] nos sugirió una interesante idea para reformular el problema y encararlo desde otro ángulo. Dicha idea consiste en ver al modelo circular de un grafo como un conjunto de rectas en el plano, y pasar a trabajar exclusivamente con sus ecuaciones e inecuaciones. Esto, en principio, pondría a nuestra disposición un nuevo arsenal de teoría para atacar el problema. Procedimos a formalizar la Conjetura del Diamante en estos nuevos términos, pero desafortunadamente no pudimos seguir avanzando en su demostración o refutación. Sin embargo, el nuevo enfoque resulta lo suficientemente interesante desde el punto de vista teórico, como para merecer ser presentado y estudiado en mayor profundidad. Ofrece una elegante alternativa para tratar problemas teóricos de la clase de grafos circulares.

En este capítulo, presentamos la clase de grafos e-circulares, basada en estas ideas, y probaremos que es equivalente a la clase de grafos circulares. Después, mostramos la mencionada reformulación de la Conjetura del Diamante. Resultó invaluable el aporte de Marina Groshaus [16] a lo largo de todo este estudio.

4.1 Definición

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo cualquiera. Decimos que G es e-circular si se puede construir un modelo de rectas en el plano de acuerdo al procedimiento explicado a continuación.

Representamos cada vértice $v_i \in V(G)$ mediante una recta R_i en el plano, fijando el origen de coordenadas en el centro de un círculo de radio $r = 1$. Dos rectas se cruzan dentro del círculo si y sólo si sus vértices correspondientes son adyacentes en G (Figura 4.1). Llamamos $R(G)$ al conjunto de rectas correspondientes a los vértices de G .

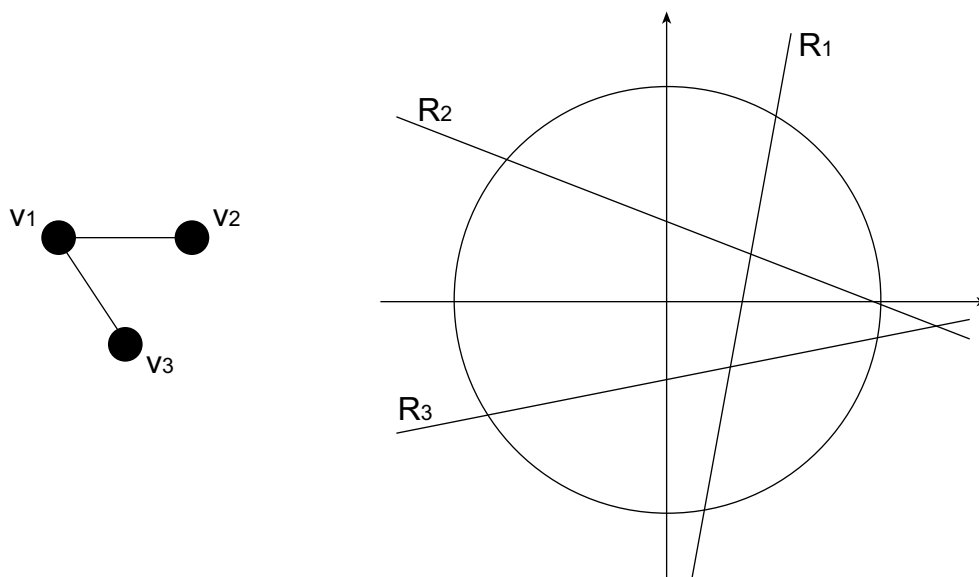


Figura 4.1: Sistema de rectas para un grafo de tres vértices.

Para formalizar este concepto, realizamos las siguientes simplificaciones:

1. En $R(G)$ no hay rectas verticales.
2. En $R(G)$ no hay rectas horizontales.
3. En $R(G)$ no hay rectas paralelas.

Veamos que estas simplificaciones no implican pérdida alguna de generalidad. Supongamos que un grafo G tiene un conjunto de rectas $R(G)$, tal que $\forall i \neq j$ vale que R_i corta a R_j dentro del círculo si y sólo si v_i es adyacente a v_j . Si en $R(G)$ hay rectas verticales u horizontales, basta con rotar ligeramente todas las rectas hasta que no haya ninguna vertical ni horizontal. Por otra parte, si hay algún par de rectas paralelas, basta con inclinar ligeramente una de ellas para eliminar dicho paralelismo, sin modificar los cortes que ocurren dentro del círculo.

Gracias a la primera simplificación, cada recta R_i puede escribirse como una ecuación $y = m_i \cdot x + b_i$. La segunda nos garantiza que $\forall i, m_i \neq 0$. Por último, la tercera nos asegura que $\forall i \neq j, m_i \neq m_j$.

Como dijimos antes, fijamos el origen de coordenadas en el centro de un círculo de radio $r = 1$, y construimos un sistema de ecuaciones e inecuaciones de la siguiente manera.

Para cada par de vértices $v_i, v_j \in V(G)$, con $i \neq j \wedge 1 \leq i, j \leq n$, agregamos las ecuaciones:

- $y_{ij} = m_i \cdot x_{ij} + b_i$
- $y_{ij} = m_j \cdot x_{ij} + b_j$

(x_{ij}, y_{ij}) es el punto en que se cortan las rectas R_i y R_j . Además, agregamos las inecuaciones:

- $x_{ij}^2 + y_{ij}^2 < 1$ si $(v_i, v_j) \in E(G)$
- $x_{ij}^2 + y_{ij}^2 > 1$ en caso contrario

Es decir, las rectas R_i y R_j se cortan dentro del círculo si y sólo si los vértices v_i y v_j son adyacentes en G . Como no puede haber rectas paralelas, necesariamente se cruzan en algún punto, dentro o fuera del círculo. El caso en que $x_{ij}^2 + y_{ij}^2 = 1$ puede obviarse de manera análoga a las simplificaciones hechas anteriormente: si existe un modelo de rectas con tal igualdad, éste siempre puede ser modificado ligeramente para transformarla en una desigualdad estricta.

Por último, agregamos al sistema las siguientes restricciones, consecuencia de las simplificaciones 2 y 3:

- $m_i \neq 0$ $\forall i : 1 \leq i \leq n$
- $m_i \neq m_j$ $\forall i, j : i \neq j \wedge 1 \leq i, j \leq n$

En total, tenemos $2n^2 - n$ ecuaciones e inecuaciones. Entonces, definimos más formalmente a los grafos e-circulares como aquéllos para los cuales el sistema de ecuaciones e inecuaciones construido de esta forma tiene solución.

Teorema 4.1 *Los grafos e-circulares son exactamente los grafos circulares. En otras palabras, el sistema de ecuaciones e inecuaciones construido de esta forma a partir de un grafo G tiene solución si y sólo si G es circular.*

Demostración:

En primer lugar, supongamos que G es circular, y sea M un modelo circular del mismo. Es fácil ver que puede encontrarse un nuevo modelo M' sin cuerdas verticales, horizontales, ni paralelas: si hay una o más cuerdas verticales u horizontales, basta con rotar de manera conveniente todo el modelo circular; si hay cuerdas paralelas, elegimos una de ellas y movemos ligeramente uno de sus extremos, rompiendo el paralelismo sin afectar los cruces. En este caso, las cuerdas del nuevo modelo M' definen rectas que satisfacen trivialmente todas las ecuaciones e inecuaciones del sistema.

Para ver la recíproca, supongamos que el sistema planteado tiene solución. Esto define una recta R_i para cada vértice $v_i \in V(G)$, la cual corta dentro del círculo exactamente a las rectas de $N(v_i)$. Para cada vértice v_i no aislado, R_i necesariamente pasa por el círculo; entonces, tomamos ese segmento de R_i como la cuerda correspondiente a v_i en el modelo circular. Para cada vértice v_i aislado, su recta no necesariamente pasa por el círculo. En ese caso, basta con asignarle a v_i una cuerda aislada lo suficientemente pequeña en cualquier lugar del círculo, una vez que ya hayan sido definidas las cuerdas de los vértices no aislados. De este modo, construimos un modelo circular para G . \square

4.2 Sobre los grafos e-circulares

Aprovechando su equivalencia con los grafos circulares, las representaciones e-circulares pueden ser usadas para atacar problemas teóricos y prácticos de la clase de grafos circulares con herramientas matemáticas totalmente distintas a las usuales en teoría de grafos.

Por otra parte, introduciendo modificaciones a la definición de los grafos e-circulares, se podría generalizar de manera muy natural la clase de grafos circulares, o bien generar nuevas clases. Por ejemplo:

- En lugar de tomar un círculo como figura central en el modelo de rectas, podría tomarse cualquier otra figura geométrica: cuadrados, aros, etc..
- Podrían modificarse las reglas primarias de los sistemas de rectas: las adyacencias en el grafo podrían representarse con rectas paralelas, o con cruces en el exterior de la figura, etc..
- En vez de representar los vértices como rectas en un plano, podrían verse como planos en el espacio. Es decir, cada vértice se correspondería con un plano en el espacio tridimensional; y dos vértices serían adyacentes si y sólo si sus planos correspondientes se cruzaran dentro de una esfera de radio 1, con centro en el origen de coordenadas. Pese a que las inecuaciones de un sistema semejante rápidamente pueden tornarse inasibles, la idea intuitiva aún puede manejarse con relativa comodidad, y aportar nuevas formas de encarar problemas de grafos.

En definitiva, el interés inicial de estas nuevas clases de grafos es netamente teórico, dejando abierto un amplio campo para la investigación. Permitiría contar con nuevas herramientas para la demostración de propiedades, y la búsqueda de algoritmos eficientes en clases de grafos ya conocidas.

A modo de ejemplo, en la próxima sección mostramos una reformulación de la conjetura del diamante —motivación original de este estudio—, empleando las ideas de la clase de grafos e-circulares.

4.3 Conjetura del diamante

Un grafo G es un diamante si es isomorfo a $K_4 - \{e\}$, para e cualquier arista de K_4 (Figura 4.2). En [10], Durán demostró la siguiente propiedad:

Teorema 4.2 ([10]) *Sea G un grafo circular Helly, entonces G es circular y no contiene como subgrafo inducido ningún diamante.*

En el mismo trabajo, Durán conjeturó que la recíproca de esta propiedad también es cierta:

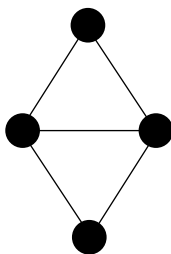


Figura 4.2: Un diamante.

Conjetura 4.1 ([10]) *Sea G un grafo circular sin diamantes. Entonces G es circular Helly.*

Esta interesante y atractiva conjetura permanece abierta. Observemos que, en caso de ser cierta, nos proporcionaría un reconocimiento polinomial de la subclase de los grafos circular Helly, ya que hay formas eficientes de saber si un grafo dado contiene un diamante como subgrafo inducido (analizando, por ejemplo, todos los subgrafos inducidos de 4 vértices). Mostramos aquí una reformulación de esta conjetura, usando las ideas recién presentadas.

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo. En primer lugar, construimos para G un sistema de ecuaciones e inecuaciones, de la manera explicada en las secciones anteriores. Como ya vimos, dicho sistema, que llamamos S_G , tiene solución si y sólo si G es un grafo circular. Para terminar de reformular la conjetura, resta reescribir dos cosas: que G no tiene diamantes, y que G es circular Helly.

Para llevar a cabo esa tarea, usaremos la siguiente notación:

- Dados un modelo de rectas en el plano para un grafo G , y dos vértices $i, j \in V(G)$, usamos el par no ordenado (i, j) para denotar el punto en el que se cruzan sus rectas correspondientes.
- $x_{(i,j)}$ e $y_{(i,j)}$ son las coordenadas x e y , respectivamente, del punto (i, j) .
- $\|(i, j)\|$ es la distancia del punto (i, j) al origen de coordenadas; es decir, $\|(i, j)\| = \sqrt{x_{(i,j)}^2 + y_{(i,j)}^2}$.
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Definimos $a \dot{-} b = \begin{cases} a - b & \text{si } a \geq b, \\ 0 & \text{si } a < b. \end{cases}$

Observemos que $a \dot{-} b \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

4.3.1 G no tiene diamantes

Para cada conjunto U de cuatro vértices de $V(G)$, agregamos al sistema S_G las siguientes inecuaciones:

$$\delta_U^0 \leq 1 - \|(i, j)\| \quad (4.1)$$

para cada $i, j \in U$, tales que $i \neq j$.

Además, para cada combinación posible de $\{\{i, j\}, \{k, l\}\} \subseteq \mathbb{P}(U)$, tal que $i \neq j$, $k \neq l$, y $\{i, j\} \neq \{k, l\}$, agregamos las inecuaciones:

$$\begin{aligned} \delta_U^{ij,kl} &\leq \|(i, j)\| - 1 \\ \delta_U^{ij,kl} &\leq \|(k, l)\| - 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por último, agregamos la siguiente inecuación:

$$\delta_U^0 + \sum_{\substack{\{\{i,j\}, \{k,l\}\} \subseteq \mathbb{P}(U) \\ i \neq j, k \neq l \\ \{i,j\} \neq \{k,l\}}} \delta_U^{ij,kl} > 0 \quad (4.3)$$

Donde $\delta_U^0, \delta_U^{ij,kl} \in \mathbb{R}$. Para un grafo G , con $n \geq 4$, hay $\binom{n}{4}$ subconjuntos distintos de cuatro vértices de $V(G)$. Por lo tanto, la cantidad total de inecuaciones que se agregan al sistema es $O(n^4)$.

Proposición 4.1 ([16]) *El nuevo sistema S'_G construido a partir de un grafo $G = (V, E)$ tiene solución si y sólo si G es circular y no tiene diamantes.*

Demostración:

En primer lugar, supongamos que el sistema S'_G tiene solución. Como vimos en la sección anterior, si el sistema original S_G tiene solución entonces G es circular. Resta demostrar que si se satisfacen las nuevas inecuaciones, entonces G no tiene diamantes.

Para cada conjunto U de cuatro vértices de $V(G)$, la inecuación 4.3 obliga a que al menos uno de sus dos términos sea positivo:

- Si $\delta_U^0 > 0$, entonces, por las inecuaciones de 4.1, las rectas correspondientes a todos los vértices de U se cortan entre sí dentro del círculo. Esto significa que el subgrafo inducido por U es completo. Por lo tanto, no es un diamante.
- Si la sumatoria de la inecuación 4.3 es positiva, entonces es cierto que $\delta_U^{ij,kl} > 0$, para alguna combinación de $\{\{i, j\}, \{k, l\}\} \subseteq \mathbb{P}(U)$, tal que $i \neq j$, $k \neq l$, y $\{i, j\} \neq \{k, l\}$. Por las inecuaciones de 4.2, esto implica que los puntos (i, j) y (k, l) están fuera del círculo. Por lo tanto, G no tiene las dos aristas correspondientes, lo cual garantiza que el subgrafo inducido por U no es un diamante.

De este modo, hemos visto que si el sistema tiene solución, entonces G es circular y cualquier subgrafo inducido por cuatro vértices de G es completo o le faltan al menos dos aristas. En otras palabras, si el sistema tiene solución, entonces G es circular y sin diamantes. Veamos ahora la recíproca.

Supongamos que G es circular y que no tiene diamantes. Sabemos que el sistema original S_G tiene solución porque G es circular. Veamos que las nuevas inecuaciones se satisfacen para alguna elección de δ 's. En primer lugar, observemos que todos los $\delta_U = 0$ satisfacen trivialmente las inecuaciones de 4.1 y 4.2.

Para cada conjunto U de cuatro vértices de $V(G)$:

- Si el subgrafo inducido por U es completo, entonces elegimos:

$$\begin{aligned}\delta_U^0 &= \min_{i,j \in U} (1 - \|(i,j)\|) \\ \delta_U^{ij,kl} &= 0 \quad \forall \{\{i,j\}, \{k,l\}\} \subseteq \mathbb{P}(U) : i \neq j, k \neq l, \{i,j\} \neq \{k,l\}\end{aligned}$$

Como el subgrafo inducido por U es completo, las rectas de todos sus vértices se cruzan entre sí estrictamente dentro del círculo, según la solución del sistema S_G . Por lo tanto, el valor elegido para δ_U^0 es mayor que cero, y satisface las inecuaciones del sistema S'_G .

- Si el subgrafo inducido por U no es completo, entonces le faltan al menos dos aristas, porque sabemos que G no tiene diamantes. En este caso, elegimos:

$$\begin{aligned}\delta_U^0 &= 0 \\ \delta_U^{ij,kl} &= \begin{cases} 0 & \text{si } \{(i,j), (k,l)\} \cap E(G) \neq \emptyset \\ \min\{\|(i,j)\|, \|(k,l)\|\} - 1 & \text{si } \{(i,j), (k,l)\} \cap E(G) = \emptyset \end{cases}\end{aligned}$$

El último valor corresponde al caso en que las aristas (i,j) y (k,l) no pertenecen al grafo. Luego, los cruces de las rectas correspondientes ocurren fuera del círculo, lo cual nos asegura que $\delta_U^{ij,kl} > 0$. \square

4.3.2 G es circular Helly

Para cada conjunto U de tres vértices de $V(G)$, partiendo nuevamente del sistema original S_G , agregamos las siguientes inecuaciones:

$$\sum_{\substack{i,j \in U \\ i \neq j}} (\|(i,j)\| - 1) \leq \eta_U \cdot c \quad (4.4)$$

$$\sum_{\substack{i,j \in U \\ i \neq j}} (x_{(i,j)} - \alpha_U) \leq \eta_U \cdot c \quad (4.5)$$

$$\sum_{\substack{i,j \in U \\ i \neq j}} (y_{(i,j)} \dot{-} \beta_U) \leq \eta_U \cdot c \quad (4.6)$$

$$\sum_{\substack{i,j \in U \\ i \neq j}} (\alpha_U \dot{-} x_{(i,j)}) \leq \eta_U \cdot c \quad (4.7)$$

$$\sum_{\substack{i,j \in U \\ i \neq j}} (\beta_U \dot{-} y_{(i,j)}) \leq \eta_U \cdot c \quad (4.8)$$

$$- \sum_{\substack{i,j \in U \\ i \neq j}} (\|(i,j)\| \dot{-} 1) < (1 - \eta_U) \cdot c \quad (4.9)$$

$$c = \max_{\substack{i,j \in V(G) \\ i \neq j}} \|(i,j)\| \cdot 3 + 1 \quad (4.10)$$

Donde $\eta_U, \alpha_U, \beta_U, c \in \mathbb{R}$; $\eta_U \in \{0, 1\}$; c es simplemente la norma del cruce de rectas más alejado del origen, por 3 más 1. Para un grafo G , con $n \geq 3$, hay $\binom{n}{3}$ subconjuntos distintos de tres vértices de $V(G)$. Por lo tanto, la cantidad total de inecuaciones que se agregan al sistema es $O(n^3)$.

Proposición 4.2 ([16]) *El nuevo sistema S_G'' construido a partir de un grafo G tiene solución si y sólo si G es circular Helly.*

Demostración:

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo cualquiera. En primer lugar, supongamos que el sistema S_G'' tiene solución. Como ya vimos, si el sistema original S_G tiene solución entonces G es circular. Resta demostrar que si se satisfacen las nuevas inecuaciones, entonces el modelo de G respeta la propiedad de Helly.

Sea U un conjunto de tres vértices de $V(G)$. Sabemos que sus inecuaciones 4.4 a 4.10 se cumplen. η_U puede tomar dos valores: 0 ó 1. Supongamos que $\eta_U = 0$; entonces:

- Por la inecuación 4.4, $\|(i,j)\| \leq 1$ para todos los (i,j) , lo cual significa que U es completo.
- Por las inecuaciones 4.5 y 4.7, $\alpha_U = x_{(i,j)}$ para todos los (i,j) .
- Por las inecuaciones 4.6 y 4.8, $\beta_U = y_{(i,j)}$ para todos los (i,j) .

De esta manera, para cada subgrafo completo U de tres vértices, sus rectas se cruzan en un punto (con coordenadas $x = \alpha_U$, e $y = \beta_U$).

Veamos ahora el caso en que $\eta_U = 1$. Por la inecuación 4.9, existe al menos un (i,j) tal que $\|(i,j)\| > 1$. Por lo tanto, U no es completo.

Entonces, vimos que para cada conjunto U de tres vértices, si el subgrafo inducido por U es completo, entonces sus rectas se cortan en un mismo punto.

Es fácil ver que esto equivale a decir que todas las rectas de cada subgrafo completo de G (de cualquier tamaño) se cortan en un mismo punto. Por lo tanto, el modelo de cuerdas definido por el sistema S_G'' cumple la propiedad de Helly.

Supongamos ahora que G es circular Helly. Sabemos que el sistema original S_G tiene solución porque G es circular. Veamos que las nuevas inecuaciones se satisfacen para alguna elección de las variables.

Nuevamente, sea U un conjunto de tres vértices de $V(G)$. Si el subgrafo inducido por U es completo, entonces elegimos:

- $\eta_U = 0$
- α_U y $\beta_U =$ coordenadas x e y , respectivamente, del punto en el cual se cortan las rectas de U , según la solución del sistema S_G .

Los términos de la derecha en las inecuaciones 4.4 a 4.8 son iguales a 0, obligando a los términos de la izquierda a ser también iguales a 0. En el primer caso (4.4), dicha igualdad vale porque $\|(i, j)\| < 1$ para todo (i, j) (dado que U es completo). En los casos restantes, las igualdades valen porque las coordenadas x e y de todos los (i, j) son justamente α_U y β_U , respectivamente. Por último, para verificar la inecuación 4.9, basta con notar que el único valor que c puede tomar es mayor que 0.

Si el subgrafo inducido por U no es completo, entonces elegimos:

- $\eta_U = 1$
- $\alpha_U = \beta_U = 0$

En este caso, la inecuación 4.9 se satisface porque necesariamente existe un (i, j) tal que $\|(i, j)\| > 1$, dado que U no es completo. Por último, es fácil ver que las inecuaciones 4.4 a 4.8 se satisfacen, porque el único valor posible de c es una cota superior de cada sumatoria. \square

De este modo, usando las Proposiciones 4.1 y 4.2, la Conjetura 4.1 puede reformularse de la siguiente manera:

Conjetura 4.2 *Sea G un grafo cualquiera. Si el sistema de inecuaciones S_G' tiene solución, entonces el sistema S_G'' también la tiene.*

Sabemos que la recíproca es cierta, según lo dicho en el Teorema 4.2.

Capítulo 5

Algoritmos

En este capítulo, en primer lugar, presentamos una explicación detallada de un algoritmo de reconocimiento de grafos arco-circular unitarios. En segundo lugar, comentamos la implementación de éste y de otros algoritmos de reconocimientos de grafos, que inician la construcción de un conjunto de programas para reconocer y representar todos los grafos estudiados en los capítulos anteriores.

5.1 Reconocimiento de grafos *UCA*

En [23], Spinrad introduce brevemente un algoritmo de reconocimiento de grafos arco-circular unitarios, basado en un teorema presentado por Tucker [25]. El algoritmo parte de una representación *PCA* sin pares de arcos que cubran todo el círculo (“circle-covering pairs”), y determina si el grafo en cuestión es *UCA*.

En esta sección, presentamos dicho algoritmo de manera más detallada, junto con las definiciones y propiedades necesarias para justificar su correcto funcionamiento.

5.1.1 Definiciones

Sea G un grafo arco-circular propio, y ϱ una representación arco-circular propia de G . Un *circuito*- (n,k) ¹ de G , con respecto a ϱ , es un conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ de vértices de G , tal que los vértices x_i y x_{i+1} son adyacentes ($1 \leq i \leq n-1$), x_n es adyacente a x_1 , el arco A_{i+1} comienza a continuación de A_i (en sentido horario), y el conjunto de arcos da k vueltas alrededor del círculo. Un *conjunto independiente*- (m,l) es un conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$ de vértices, tal que los vértices x_i e x_{i+1} no son adyacentes ($1 \leq i \leq m-1$), x_m no es adyacente a x_1 , el arco A_{i+1} comienza después de A_i (en sentido horario), y el conjunto de arcos da l vueltas alrededor del círculo.

¹A lo largo de esta discusión, n y m **no** hacen referencia a la cantidad de vértices y de aristas del grafo, respectivamente.

Decimos que un *circuito* (n, k) C es minimal si no existe un *circuito* (n', k') con $n'/k' < n/k$ formado por vértices de C . Definimos *conjunto independiente* (m, l) maximal del mismo modo.

Sea $CI(n, k)$ (con $n > k$) un grafo arco-circular cuya representación en arcos circulares se construye de la siguiente forma: sea ε un número real positivo pequeño y $r=1$ el radio de la circunferencia. Se dibujan n arcos $(A_0, A_1, \dots, A_{n-1})$ de longitud $l_1 = 2\pi k/n + \varepsilon$ tal que cada arco A_i empieza en $2\pi i/n$ y termina en $2\pi(i+k)/n + \varepsilon$ ($A_i = (2\pi i/n, 2\pi(i+k)/n + \varepsilon)$). Luego, se dibujan otros n arcos $(B_0, B_1, \dots, B_{n-1})$ de longitud $l_2 = 2\pi k/n - \varepsilon$, tal que cada arco B_i empieza en $(2\pi i + \pi)/n$ y termina en $(2\pi(i+k) + \pi)/n - \varepsilon$ ($B_i = ((2\pi i + \pi)/n, (2\pi(i+k) + \pi)/n - \varepsilon)$). Por ejemplo, la representación de la Figura 5.1 genera el grafo $CI(4, 1)$.

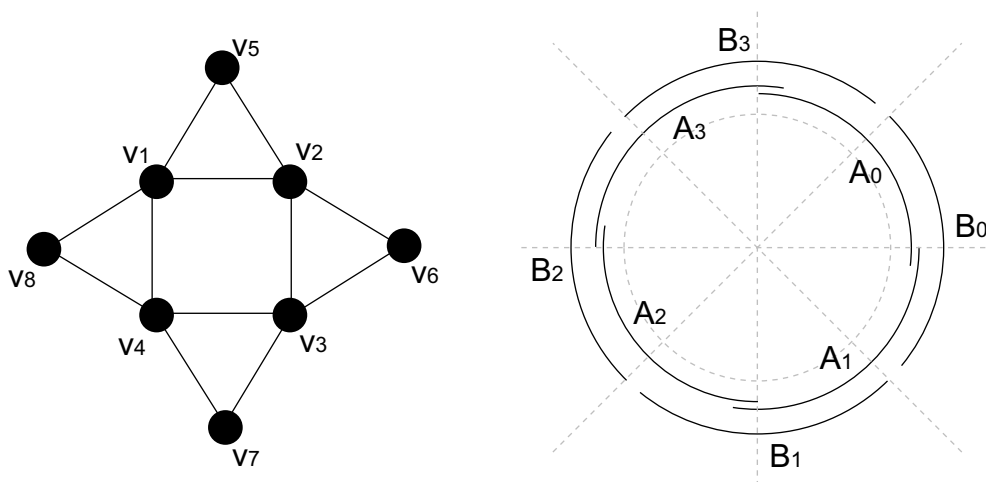


Figura 5.1: $CI(4, 1)$ y su representación arco-circular.

La definición de esta familia de grafos es introducida por Tucker en [25], y la construcción recién presentada es formalizada por Durán en [10]. En esta tesis, ya hemos visto algunos grafos de esta familia: G_{15} (Figura 2.35) es $CI(5, 2)$, G_{16} (Figura 2.36) es $CI(3, 1)$, y G_{19} (Figura 2.37) es $CI(7, 2)$.

5.1.2 Propiedades

Teorema 5.1 ([25]) *Sea G un grafo arco-circular propio. G es arco-circular unitario si y sólo si G no contiene a $CI(n, k)$ como subgrafo inducido, para n, k coprimos y $n > 2k$.*

Para la demostración de este teorema, Tucker prueba dos lemas, que también nos resultan de utilidad para el análisis de nuestro algoritmo:

Lema 5.1 ([25]) *Sea G un grafo arco-circular propio, y sea ϱ una representación arco-circular propia de G . Entonces, para cualquier circuito (n, k)*

y cualquier conjunto independiente- (m,l) , ambos con respecto a ϱ , tenemos que $m/l \leq n/k$.

Lema 5.2 ([25]) *Sea G un grafo arco-circular propio. Para n, k coprimos, con $n > 2k$, G tiene un circuito- (n,k) C minimal y un conjunto independiente- (n,k) I maximal, con respecto a cualquier representación arco-circular propia de G , si y sólo si G tiene a $CI(n, k)$ como subgrafo inducido. En el caso en que $n < 2k$, o n, k no son coprimos, tal I maximal no puede existir. En el caso restante, $n=2, k=1$, los circuito- $(2,1)$ pueden ser eliminados sin problemas de cualquier representación PCA.*

Corolario 5.1 *Sea G un grafo arco-circular propio. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. G no es arco-circular unitario.
2. G tiene a $CI(n, k)$ como subgrafo inducido, con n, k coprimos, $n > 2k$.
3. G tiene un circuito- (n,k) minimal y un conjunto independiente- (n,k) maximal con respecto a cualquier representación PCA, con n, k coprimos, $n > 2k$.

Demostración: Se infiere directamente del Teorema 5.1 y del Lema 5.2. \square

En la demostración del Lema 5.2, Tucker prueba que para cualquier representación ϱ de un grafo arco-circular propio G , valen las siguientes propiedades:

Lema 5.3 ([25]) *Si $C = x_1, \dots, x_n$ es un circuito- (n,k) minimal, entonces vale que para cada i , A_{i+1} es el arco vecino de A_i en ϱ que más lejos llega, en sentido horario (i.e., de todos los arcos adyacentes a A_i , A_{i+1} es aquél cuyo extremo horario es el más lejano a A_i).*

Lema 5.4 ([25]) *Si $I = x_1, \dots, x_m$ es un conjunto independiente- (m,l) maximal, entonces vale que para cada i , A_{i+1} es el primer arco no vecino de A_i en ϱ , en sentido horario (i.e., de todos los arcos no adyacentes a A_i , A_{i+1} es aquél cuyo extremo antihorario es el más cercano a A_i).*

Dijimos que el algoritmo de reconocimiento de grafos UCA toma como entrada una representación PCA sin pares de arcos que cubran todo el círculo. El siguiente teorema nos garantiza que todo grafo PCA puede ser representado de esa manera.

Teorema 5.2 ([17]) *Si G es un grafo arco-circular propio, entonces G tiene una representación arco-circular propia en la cual ningún par de arcos cubre todo el círculo (es decir, no se intersecan entre sí en ambos extremos).*

5.1.3 Algoritmo

Describimos aquí el algoritmo de reconocimiento de grafos *UCA*. En el Apéndice A.2, lo presentamos de manera más detallada, mediante pseudocódigo de más bajo nivel.

El algoritmo recibe como entrada una representación ϱ arco-circular propia de un grafo G . Busca una cota estrictamente inferior y otra estrictamente superior para la longitud del círculo en cualquier representación arco-circular unitaria con arcos de longitud 1. Dichas cotas determinarán si la existencia de dicha representación arco-circular unitaria es posible o no.

1. BÚSQUEDA DE LA MAYOR COTA INFERIOR

Para cada arco circular A_i de ϱ :

- (a) $c \leftarrow A_i$
- (b) Marcar c .
- (c) Mientras haya arcos sin marcar no adyacentes a c :
 - i. Buscar, en sentido horario, el primer arco sin marcar no adyacente a c . Marcarlo, y guardarlo en c .
 - ii. Calcular m/l , donde m es la cantidad de arcos marcados, y l es la cantidad de vueltas completadas. Si este valor es la mayor cota inferior encontrada, guardarla.

2. BÚSQUEDA DE LA MENOR COTA SUPERIOR

Para cada arco circular A_i de ϱ :

- (a) $c \leftarrow A_i$
- (b) Marcar c .
- (c) Mientras haya arcos sin marcar adyacentes a c :
 - i. Buscar el arco sin marcar adyacente a c que más se extiende en sentido horario. Marcarlo, y guardarlo en c .
 - ii. Si al agregar c a los arcos marcados se completó una nueva vuelta, calcular n/k , donde n es la cantidad de arcos marcados, y k es la cantidad de vueltas completadas. Si este valor es la menor cota superior encontrada, guardarla.

3. Las mejores cotas superior e inferior encontradas son iguales si y sólo si G no es *UCA*.

5.1.4 Corrección del algoritmo

Analizamos a continuación el correcto funcionamiento del algoritmo recién presentado.

En primer lugar, el algoritmo construye en forma golosa (i.e., *greedy*) un *conjunto independiente*-(m,l), empezando en cada arco y eligiendo en cada paso el arco no vecino más inmediato (en sentido horario). De esta forma, gracias al Lema 5.4, visita todos los *conjuntos independientes*-(m,l) maximales, consiguiendo una cota inferior m/l para la longitud de la circunferencia en cualquier representación *UCA* de G con arcos de longitud 1.

En el siguiente paso, el algoritmo construye en forma golosa un *circuito*-(n,k), empezando en cada arco y eligiendo en cada paso el arco vecino que más lejos llega (en sentido horario). De esta forma, gracias al Lema 5.3, el algoritmo visita todos los *circuitos*-(n,k) minimales. Entonces, consigue una cota superior n/k para la longitud de la circunferencia en cualquier representación *UCA* de G con arcos de longitud 1.

Sólo resta comparar las cotas superior e inferior encontradas. Por el Lema 5.1, sabemos que siempre vale que $m/l \leq n/k$. Entonces, el único caso que impediría que exista una representación *UCA* es $m/l = n/k$. La respuesta del algoritmo es si vale o no dicha igualdad.

Supongamos que vale que $m/l = n/k$. En otras palabras, existen un *circuito*-(n,k) minimal y un *conjunto independiente*-(n,k) maximal. Necesitamos ver que n, k son coprimos y que $n > 2k$:

- En primer lugar, si $n < 2k$, o si n, k no fueran coprimos, el *conjunto independiente*-(n,k) encontrado no sería maximal (Lema 5.2).
- Resta ver el caso $n = 2, k = 1$. La entrada del algoritmo es una representación *PCA* que no tiene pares de arcos que cubran todo el círculo. Esto es lo mismo que decir que dicha representación no tiene ningún *circuito*-($2,1$). Entonces, no puede ser cierto que $n = 2, k = 1$.

En consecuencia, sabemos que existen un *circuito*-(n,k) minimal y un *conjunto independiente*-(n,k) maximal, con n, k coprimos y $n > 2k$. Como vimos anteriormente, esto equivale a decir que G no es arco-circular unitario.

Supongamos ahora que no vale la igualdad $m/l = n/k$. Por el Lema 5.1, solamente queda la posibilidad de que $m/l < n/k$. El *conjunto independiente*-(m,l) encontrado por el algoritmo es máximo, y el *circuito*-(n,k) es mínimo. Por lo tanto, no pueden existir un *conjunto independiente*-(m',l') maximal y un *circuito*-(n',k') minimal, tales que $m'/l' = n'/k'$. Como vimos antes, esto implica que G es arco-circular unitario.

Como vimos, $m/l = n/k$ si y sólo si G no es un grafo *UCA*. El algoritmo devuelve el valor de verdad de la primera igualdad, contestando en consecuencia si G es un grafo *UCA* o no.

5.1.5 Algoritmo de eliminación de *circuitos*-($2,1$)

Como vimos, el algoritmo de reconocimiento de grafos *UCA* recibe como entrada una representación *PCA* de los grafos, sin pares de arcos que cubran todo el círculo.

A continuación, presentamos un algoritmo para eliminar los pares de arcos que cubren todo el círculo de una representación *PCA*. Este algoritmo está basado en la demostración del Teorema 5.2 [17].

1. A partir de la representación *PCA*, generar una secuencia σ de letras, donde cada letra representa un extremo de un arco circular. De esta manera, cada arco A_x tiene asociadas dos letras: x y \hat{x} ; la primera para su extremo anti-horario y la segunda para su extremo horario.
2. Buscar circularmente en σ una subsecuencia:

$$\underbrace{a \dots \hat{b}}_{\tau} \dots \underbrace{b \dots \hat{a} \dots}_{\rho}$$

3. Reemplazar τ por $\tau_1 \tau_2$, donde τ_1 son las letras de τ con \wedge , y τ_2 son las letras de τ sin \wedge , en ambos casos preservando el orden de aparición de las mismas.
4. Volver al paso 2, hasta que no haya más subsecuencias de σ como la descrita.

La idea del algoritmo es la siguiente. En el paso 2, busca un par de arcos que cubra todo el círculo, y lo elimina mediante los reordenamientos del paso 3. Dichos reordenamientos no generan nuevos pares que cubran todo el círculo, ni rompen la representación *PCA*. Por lo tanto, reiterando este proceso se termina dejando una nueva representación *PCA* libre de tales pares.

5.2 Implementaciones

Llegamos así a la última parte de esta tesis: la implementación de algoritmos de reconocimiento de grafos de intervalos, grafos arco-circular unitarios (*UCA*), y grafos arco-circular Helly (*HCA*).

El objetivo de estas implementaciones es comenzar la construcción de un paquete de software con algoritmos eficientes de reconocimiento y de representación de las clases estudiadas en esta tesis. Dicho paquete facilitará el avance en el estudio de esas clases de grafos, puesto que realizar manualmente esas operaciones implica un enorme consumo de tiempo. Los algoritmos fueron implementados en el lenguaje de programación Java.

Al iniciar este trabajo, surgió una complicación inesperada: la dificultad de “reconstruir” los algoritmos, que casi siempre se encuentran distribuidos entre varios artículos. Es decir, cuando en un artículo se presenta un algoritmo, se aclara que algunas partes del mismo pueden resolverse con un determinado orden de complejidad, y se cita uno o más artículos anteriores. El segundo nivel de artículos hace lo mismo, y esto se repite uno o dos niveles más. Estos verdaderos árboles de artículos a veces tienen su raíz en nuestros días, y sus hojas en artículos de la década del '60, muy complicados

de conseguir. Por lo tanto, en más de una ocasión, los algoritmos quedan incompletos, y no es posible reconstruirlos de la manera pensada originalmente por sus respectivos autores.

5.2.1 PQ-Trees

En [4], Booth y Lueker presentan una estructura de datos llamada PQ-Tree, preparada específicamente para resolver de manera eficiente el problema conocido como *General consecutive arrangement problem*.

Ese problema se define de la siguiente manera [17]: dados un conjunto finito X y una colección \mathcal{I} de subconjuntos de X , ¿existe alguna permutación Π de X , en la cual los miembros de cada subconjunto $I \in \mathcal{I}$ aparecen como una subsecuencia consecutiva de Π ?

Teorema 5.3 ([4]) *Usando un PQ-Tree, la clase de permutaciones en la cual cada conjunto de una familia \mathcal{I} aparece como una subsecuencia consecutiva puede ser computada en $O(m + n + \text{SIZE}(\mathcal{I}))$ pasos, donde m es la cantidad de elementos de X , n es la cantidad de subconjuntos de \mathcal{I} , y $\text{SIZE}(\mathcal{I})$ es la suma de los tamaños de todos sus subconjuntos.*

De manera análoga a la propiedad de 1's circulares (ver Sección 2.4 de esta tesis), definimos la propiedad de 1's consecutivos: una matriz tiene forma de 1's consecutivos si los 1's en cada columna aparecen en orden consecutivo; una matriz tiene la propiedad de 1's consecutivos si por una permutación de sus filas puede ser transformada en una matriz con forma de 1's consecutivos.

El problema de determinar si una matriz M tiene la propiedad de 1's consecutivos es un caso particular del *General consecutive arrangement problem*: X es el conjunto de columnas de M , y el i -ésimo subconjunto de \mathcal{I} está formado por las columnas que tienen un 1 en la i -ésima fila. De esta manera, es fácil ver que existe un permutación de X que cumple las restricciones de \mathcal{I} si y sólo si M tiene la propiedad de 1's consecutivos.

5.2.2 Búsqueda de todos los cliques de un grafo

Para implementar los reconocimientos que mostramos más adelante, es necesario contar con un algoritmo eficiente que busque y enumere todos los cliques de un grafo. En [7], Bron y Kerbosch presentan un algoritmo eficiente para resolver este problema (i.e., eficiente respecto de la cantidad de cliques del grafo, que puede ser exponencial). En el Apéndice A.3 mostramos dicho algoritmo.

5.2.3 Reconocimiento de grafos de intervalos

Usando una implementación de la estructura PQ-Tree y el siguiente teorema, puede obtenerse un algoritmo eficiente para reconocer grafos de intervalos.

Teorema 5.4 ([12]) *Un grafo $G = (V, E)$ es de intervalos si y sólo si A_G (la matriz clique de G) tiene la propiedad de 1's consecutivos.*

Ahora, resta resolver el problema de construir la matriz clique de un grafo. Potencialmente, el número de cliques de un grafo G puede crecer exponencialmente en relación a su número de vértices. Sin embargo, si G es HCA , entonces el número de cliques está acotado superiormente por n (la cantidad de vértices del grafo), como está probado en [15]. Como todo grafo de intervalos también es HCA , entonces la cota vale también para esa clase de grafos.

Por lo tanto, para construir A_G eficientemente, se van enumerando los cliques (i.e., las filas de A_G) con el algoritmo de [7]. Si en algún momento la cantidad de cliques supera n , se interrumpe la ejecución del algoritmo y se contesta que el grafo no es de intervalos.

5.2.4 Reconocimiento de grafos HCA

Recordemos el siguiente teorema, que ya vimos en la Sección 2.4.

Teorema 5.5 ([15]) *Un grafo G es arco-circular Helly si y sólo si A_G tiene la propiedad de 1's circulares.*

La propiedad de 1's circulares puede ser verificada usando un algoritmo que verifique la propiedad de 1's consecutivos, como puede verse en el siguiente lema de Tucker [24]. Dada M una matriz de unos y ceros, sea M^c la matriz que se obtiene al complementar cada columna de M que tiene un 1 en la primera fila.

Lema 5.5 ([24]) *Una matriz de unos y ceros tiene la propiedad de 1's circulares para las columnas si y sólo si M^c tiene la propiedad de 1's consecutivos para las columnas.*

El algoritmo implementado, entonces, consiste en construir A_G de la manera vista, complementar las columnas que tengan un 1 en la primera fila, y testear la propiedad de 1's consecutivos para la matriz resultante.

5.2.5 Reconocimiento de grafos UCA

En el caso del reconocimiento de grafos arco-circular unitarios, el algoritmo implementado es el que presentamos en la Sección 5.1 y en el Apéndice A.2 de esta tesis.

Las listas circulares fueron implementadas usando vectores dinámicos. Todas sus operaciones excepto “cantidad”, que es constante, tienen orden lineal respecto de su longitud. En [23], Spinrad sugiere el uso de una estructura de datos de van Emde Boas [11] que permite realizar las búsquedas requeridas en $O(\log \log n)$, donde n es la longitud de la lista circular, sin afectar el orden lineal de las operaciones restantes. Queda como trabajo futuro la implementación de esta modificación.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

En los capítulos 2 y 3, mostramos la existencia de representantes en algunas regiones y la vacuidad de otras, al cruzar distintas subclases de grafos arco-circulares, circulares, de intervalos y overlap de arco-circulares. Este análisis podrá resultar de interés para aquellos investigadores que trabajen sobre alguna de esas clases de grafos.

Las ideas presentadas en el capítulo 4 permiten encarar problemas teóricos de grafos (no solamente circulares) de una manera diferente. Por otra parte, puede resultar de interés estudiar diversas modificaciones a dichas ideas, para definir nuevas clases de grafos. Queda pendiente un análisis profundo de la reformulación presentada de la Conjetura del Diamante, para intentar avanzar en su demostración o refutación.

Los algoritmos presentados en el capítulo 5 tienen muchos aspectos para mejorar y ampliar. La implementación del reconocimiento de grafos *UCA* recibe como entrada una representación *PCA*; queda pendiente implementar un algoritmo eficiente que reconozca y represente grafos *PCA*. El motivo por el cual no se presenta en esta tesis es el mencionado al principio de la sección 5.2: la dificultad para conseguir los artículos que presentan algunas partes del algoritmo.

El paquete de algoritmos presentado tiene los reconocimientos de grafos *HCA*, *UCA* y de intervalos. Una línea de trabajo que queda abierta es implementar los reconocimientos y representaciones de las restantes clases de grafos que ya se encuentran resueltos de manera eficiente. Esto aportaría a contar con una herramienta de suma utilidad para acelerar futuros desarrollos teóricos y prácticos.

Apéndice A

Algoritmos

A.1 Representación circular de árboles

El algoritmo toma como entrada un grafo $G = (V(G), E(G))$ conexo y sin ciclos. Devuelve una representación overlap de intervalos del mismo, representada mediante una secuencia de extremos de los arcos. Si el grafo a representar tiene más de una componente conexa, basta con correr el algoritmo para cada una de ellas, concatenando todas las secuencias resultantes.

En el algoritmo, S es una lista doblemente encadenada de Nodos. Cada Nodo está formado por tres referencias: a un vértice del grafo, y a otros dos Nodos (el anterior y el siguiente en la lista). Escribimos $a \cdot b$ para encadenar dos Nodos a y b . $\text{Siguiente}(a)$ devuelve el siguiente elemento en la lista; si a no tiene un siguiente elemento, devuelve $NULL$.

1. Elegir un vértice cualquiera $v \in V(G)$
2. $v_1 := \text{nuevo Nodo}(v)$
3. $v_2 := \text{nuevo Nodo}(v)$
4. $S := v_1 \cdot v_2$
5. $NODO_ACTUAL := v_2$
6. $CANT_MARCADOS := 0$
7. Mientras $CANT_MARCADOS < |V(G)|$
 - (a) Marcar $\text{Vértice}(NODO_ACTUAL)$
 - (b) $CANT_MARCADOS := CANT_MARCADOS + 1$
 - (c) Para cada $u \in N(v)$ que no esté marcado
 - i. $u_1 := \text{nuevo Nodo}(u)$
 - ii. $u_2 := \text{nuevo Nodo}(u)$

- iii. Reemplazar en S :
 $NODO_ACTUAL$ por $u_1 \cdot NODO_ACTUAL \cdot u_2$
- (d) $NODO_ACTUAL := \text{Siguiente}(NODO_ACTUAL)$

8. Devolver S

Para estimar la complejidad de este algoritmo, observemos que el ciclo del paso 7 se ejecuta exactamente $|V(G)|$ veces, mientras que el ciclo del paso 7(c) se ejecuta $O(|E(G)|)$ veces en total. Como S es una lista doblemente enlazada, el paso 7(c)iii tiene orden constante. En consecuencia, el algoritmo completo tiene una complejidad de $O(|V(G)| + |E(G)|)$.

A.2 Reconocimiento de grafos *UCA*

En el algoritmo de reconocimiento de grafos *UCA*, empleamos dos tipos de datos: Arco y ListaCircular, que presentamos a continuación:

Tipo Arco

Un elemento de tipo Arco es sencillamente una tupla con dos campos de tipo real:

$$\langle \text{límiteInferior: } \mathbb{R}, \text{límiteSuperior: } \mathbb{R} \rangle$$

Tipo ListaCircular

El tipo ListaCircular provee las siguientes operaciones:

- cantidad: \mathbb{Z}
Devuelve la cantidad de arcos que hay en la lista circular.
- agregar(a : Arco)
Agrega el arco a a la lista circular.
- empezarEn(a : Arco)
Marca a como el arco actual y lo borra de la lista circular.
- siguienteNoAdyacente: Arco
Busca el siguiente arco no adyacente al arco actual (según el sentido horario), lo marca como actual, lo borra de la lista y lo devuelve.
- siguienteAdyacente: Arco
Busca el arco adyacente al arco actual que más lejos llega (según el sentido horario), lo marca como actual, lo borra de la lista y lo devuelve.

Algoritmo Principal

El algoritmo recibe como parámetros N elementos de tipo Arco, correspondientes a los arcos de una representación *PCA* del grafo G , sin pares de arcos que cubran todo el círculo.

1. Variables Locales:

c : Arco

$listaIS, listaC$: ListaCircular

$i, j, k, l, m, n, cantidadVueltas$: \mathbb{Z}

$cotaInferior, cotaSuperior, gradosRecorridos, últimoGrado$: \mathbb{R}

2. $cotaInferior := 0$

3. Para $i := 1 \dots N$
 - (a) $listaIS := Nueva ListaCircular$
 - (b) $\forall j : 1 \leq j \leq N : listaIS.agregar(A_j)$
 - (c) $c := A_i$
 - (d) $listaIS.empezarEn(c)$
 - (e) $gradosRecorridos := (c.límiteSuperior - c.límiteInferior) \bmod 360$
 - (f) $últimoGrado := c.límiteSuperior$
 - (g) $c := listaIS.siguienteNoAdyacente$
 - (h) Mientras ($c \neq NULL$)
 - i. $gradosRecorridos := gradosRecorridos + (c.límiteSuperior - últimoGrado) \bmod 360$
 - ii. $últimoGrado := c.límiteSuperior$
 - iii. $m := N - listaIS.cantidad$
 - iv. $l := gradosRecorridos/360 + 1$
 - v. Si ($m/l > cotaInferior$) entonces $cotaInferior := m/l$
 - vi. $c := listaIS.siguienteNoAdyacente$
4. $cotaSuperior := \infty$
5. Para $i := 1 \dots N$
 - (a) $listaC := Nueva ListaCircular$
 - (b) $\forall j : 1 \leq j \leq N : listaIS.agregar(A_j)$
 - (c) $cantidadVueltas := 0$
 - (d) $c := A_i$
 - (e) $listaC.empezarEn(c)$
 - (f) $gradosRecorridos := (c.límiteSuperior - c.límiteInferior) \bmod 360$
 - (g) $últimoGrado := c.límiteSuperior$
 - (h) $c := listaC.siguienteAdyacente$
 - (i) Mientras ($c \neq NULL$)
 - i. $gradosRecorridos := gradosRecorridos + (c.límiteSuperior - últimoGrado) \bmod 360$
 - ii. $últimoGrado := c.límiteSuperior$
 - iii. Si ($gradosRecorridos \geq 360$) entonces
 - A. $gradosRecorridos := gradosRecorridos - 360$
 - B. $cantidadVueltas := cantidadVueltas + 1$
 - C. $n := N - listaC.cantidad$
 - D. $k := cantidadVueltas$
 - E. Si ($n/k < cotaSuperior$) entonces $cotaSuperior := n/k$
 - iv. $c := listaC.siguienteAdyacente$
6. G no es UCA si y sólo si ($cotaSuperior = cotaInferior$)

A.3 Búsqueda de todos los cliques de un grafo

Variables Globales

$G = (V(G), E(G))$: Grafo.

$CliqueActual$: Conjunto de Vértices

$Cliques$: Conjunto de Conjuntos de Vértices

Algoritmo Principal

1. $Cliques := \emptyset$
2. $CliqueActual := \emptyset$
3. Extender($V(G)$, \emptyset)

Procedimiento Extender($Candidatos$, $Usados$)

1. **Variables Locales:**
 - $Candidatos', Usados'$: Conjunto de Vértices
 - v : Vértice
2. Si ($|Candidatos| = |Usados| = 0$) entonces
 - $Cliques := Cliques \cup \{CliqueActual\}$
3. Para cada $v \in Candidatos$
 - (a) $CliqueActual := CliqueActual \cup \{v\}$
 - (b) $Candidatos' := Candidatos \cap N(v)$
 - (c) $Usados' := Usados \cap N(v)$
 - (d) Extender($Candidatos'$, $Usados'$)
 - (e) $CliqueActual := CliqueActual \setminus \{v\}$
 - (f) $Candidatos := Candidatos \setminus \{v\}$
 - (g) $Usados := Usados \cup \{v\}$

Representamos los conjuntos $CliqueActual$ y $Cliques$ mediante pilas, y el grafo, mediante una matriz de adyacencias. Cada par de conjuntos $Candidatos$ y $Usados$ se guarda en un solo vector, poniendo primero los elementos de $Usados$, y después los de $Candidatos$. Un índice nos indica dónde está esa separación. De esta manera, los dos últimos pasos del procedimiento Extender se realizan simplemente incrementando dicho índice.

Bibliografía

- [1] A. AHO, J. HOPCROFT, & J. ULLMAN, “The Design and Analysis of Computer Algorithms”, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1974.
- [2] J. BANG-JENSEN, & P. HELL, A note on chordal proper circular-arc graphs, *Discrete Mathematic* 128 (1994), 395-398.
- [3] C. BERGE, “Graphs”, North-Holland, 1985.
- [4] K. BOOTH, & G. LUEKER, Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-Tree algorithms, *Journal of Computer and System Sciences* 13 (1976), 335-379.
- [5] A. BOUCHET, Circle graph obstructions, *Journal of Combinatorial Theory* B 60 (1994), 107-144.
- [6] A. BRANDSTÄDT, V. LE, & J. SPINRAD, “Graph Classes: A Survey”, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.
- [7] C. BRON, & J. KERBOSCH, Finding all cliques of an undirected graph, *Communications of the ACM* 16, No. 9 (1973), 575-577.
- [8] H. CZEMERINSKI, Comunicación personal, 2001.
- [9] X. DENG, P. HELL & J. HUANG, Linear time representation algorithms for proper circular-arc graphs and proper interval graphs, *SIAM Journal of Computing* 25 (1996), 390-403.
- [10] G. DURÁN, Sobre grafos intersección de arcos y cuerdas en un círculo, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires, 2000.
- [11] P. VAN EMDE BOAS, Preserving order in a forest in less than logarithmic time, *16th FOCS* (1975), 75-84.
- [12] D. FULKERSON, & O. GROSS, Incidence matrices and interval graphs, *Pacific Journal of Math.* 15 (1965), 835-855.
- [13] M. GAREY, & D. JOHNSON, “Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness”, Freeman and Company, San Francisco, 1979.

- [14] F. GAVRIL, Algorithms for a maximum clique and a maximum independent set of a circle graph, *Networks* 3 (1973), 261-273.
- [15] F. GAVRIL, Algorithms on circular-arc graphs, *Networks* 4 (1974), 357-369.
- [16] M. GROSHAUS, Comunicación personal, 2001.
- [17] M. GOLUBIC, “Algorithm Graph Theory and Perfect Graphs”, Academic Press, New York, 1980.
- [18] F. HARARY, “Graph Theory”, Addison-Wesley, 1969.
- [19] T. KASHIWABARA, S. MASUDA, K. NAKAJIMA, & T. FUJISAWA, Polynomial Time Algorithms on Circular-Arc Overlap Graphs, *Networks* 21 (1991), 195-203.
- [20] C. G. LEKKERKERKER, & J. C. BOLAND, Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, *Fund. Math.* 51 (1962), 45-64.
- [21] T. MCKEE, & F. MCMORRIS, “Topics in Intersection Graph Theory”, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.
- [22] F. PROTTI, Comunicación personal, 2001.
- [23] J. SPINRAD, “Representations of Graphs”, book manuscript (1997).
- [24] A. TUCKER, Matrix characterizations of circular-arc graphs, *Pacific J. Math.* 39, No. 2 (1971), 535-545.
- [25] A. TUCKER, Structure theorems for some circular-arc graphs, *Discrete Mathematics* 7 (1974), 167-195.