

TEORIA DE OPCIONES: UNA SINTESIS¹

Viviana Fernández.²

Profesor Asistente
Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Universidad de Chile

Dirección: Avenida República 701
Santiago-Chile
Correo Electrónico: vfernand@dii.uchile.cl

Abstract

Option pricing dates back to the turn of the century with Bachelier's doctoral dissertation on speculation theory. In 1964 Bonness developed a formula for option pricing similar in nature to that of Black-Scholes's but that relied upon an unknown interest rate. It was not until 9 years later that Black and Scholes came up with a formula to price European options, which would revolutionize financial theory. Unlike most theoretical breakthroughs, Black-Scholes's formula became increasingly popular among practitioners, and nowadays it is widely used in the main exchanges around the world.

In recent years Hull, White and Rubinstein, among many others, have worked on pricing the so-called exotic options. Meanwhile Trigeorgis, Brennan, Schwartz and others have illustrated how option theory can be used in assessing the profitability of investment opportunities—real options. Option theory has been also applied to the pricing of many other financial instruments, such as warrants, callable bonds, and callable-convertibles bonds.

The aim of this paper is to discuss the progress that option theory has made since Black and Scholes developed their seminal formula. We will review the most outstanding models, mention some numerical methods used in option pricing when no analytical solution exist, and discuss the importance of real options as a new technique for assessing investment opportunities.

JEL Classification: G1; Keywords: options, Black and Scholes's formula , real options.

¹ Publicado en *Revista de Análisis Económico*, Vol. 14, No.2, páginas 87-116 (Noviembre 1999).

²Ph.D. en Economía, Universidad de California en Berkeley y Post-Doctorado en Finanzas en la Universidad de Chicago. Este artículo forma parte de mi proyecto de investigación "Valorización de Derivados", financiado por la Vicerrectoría Académica de la Pontificia Universidad Católica de Chile entre junio de 1998 y abril de 1999. Los comentarios de Julio Galvez y demás participantes del seminario realizado en "Termas del Corazón" en enero de 1999 permitieron mejorar dicho proyecto. Asimismo, las valiosas sugerencias de dos árbitros anónimos contribuyeron a mejorar una versión previa de este artículo. Cualquier error u omisión es de mi exclusiva responsabilidad.

I Introducción

La valoración de opciones se remonta a comienzos de este siglo con la tesis doctoral sobre la teoría de la especulación de Bachelier, alumno de la universidad de la Sorbonne (Merton, 1998). En 1964, Bonness sugirió una fórmula de naturaleza similar a la de Black y Scholes (1973) pero que descansaba en una tasa de interés desconocida que incluía una compensación por riesgo asociado al precio de la acción. Sólo nueve años después, Black y Scholes derivaron una fórmula exacta para el precio de una opción de compra europea escrita sobre una acción. Por el año 1975, dicha fórmula ya era ampliamente usada en el *Chicago Board Options Exchange*—la primera bolsa en transar opciones desde 1973—. Posteriormente, Merton (1976) analizó la valoración de derivados suponiendo procesos estocásticos más complejos para el precio del activo subyacente, tales como discontinuidades. El desarrollo de esta teoría les valió a Scholes y Merton el premio Nobel de economía en 1997.

En los últimos años, Hull y White (1987, 1992) y Rubinstein (1991), entre otros, han trabajado en la valoración de las denominadas “opciones exóticas”—derivados diseñados por una institución financiera para satisfacer las necesidades específicas de un cliente—. Asimismo, Trigeorgis (1996) , Brennan, Schwartz (1985) y otros han ilustrado cómo la teoría de opciones puede ser utilizada en la valoración de proyectos de inversión—opciones reales—. Otras aplicaciones de la teoría de opciones encontradas en la literatura son la valoración de *warrants* e instrumentos de renta fija.

El objetivo de este artículo es resumir a grandes rasgos el progreso que ha hecho la teoría de opciones en los veinticinco años desde el descubrimiento de Black y Scholes. Se dará una reseña de los modelos más sobresalientes, y se mencionará brevemente métodos

numéricos utilizados para valorar opciones en aquellos casos en que no existen soluciones analíticas. Además, se discutirá la aparición de la teoría de opciones reales como una herramienta más apropiada que el valor presente neto para evaluar proyectos de inversión que involucran cierto grado de flexibilidad.

El aporte de este artículo radica en exponer de manera clara y sucinta las principales ideas desarrolladas en la literatura de teoría de opciones en los últimos veinticinco años. Tales ideas, a pesar de su mayor difusión en los círculos académicos y en los mercados financieros de países desarrollados, son a la fecha poco conocidas para la mayoría de los economistas en el ámbito latinoamericano. La autora no tiene conocimiento de que se haya escrito un artículo de similares características en el último tiempo. Por ello, este trabajo contribuye a difundir conceptos básicos de una importante área de las finanzas, la cual ha salido a relucir con mayor fuerza desde la entrega del premio Nobel de economía a Scholes y Merton en 1997.

Este artículo está organizado como sigue. En la sección II nos referimos a la célebre fórmula de Black-Scholes y a las distintas maneras propuestas comúnmente en la literatura para su obtención. La sección III discute las consecuencias del relajamiento de los supuestos en que se basa la fórmula de Black-Scholes. La sección IV trata de la aparición de las llamadas opciones exóticas y del uso de métodos numéricos cuando no existen soluciones analíticas para el precio de una opción. La sección V se refiere a otras aplicaciones de la teoría de opciones, tales como la valoración de *warrants*, instrumentos de renta fija y proyectos de inversión (opciones reales). Dada la importancia de esta última área para el diseño de política, presentamos dos ejemplos de la literatura que permiten ilustrar que la regla del valor presente neto no siempre lleva a la elección correcta. Por último, la sección VI presenta algunos comentarios finales.

II Un Hito en la Teoría de Opciones: la Fórmula de Black y Scholes

Una opción de compra (*call*) da a su dueño el derecho de comprar un activo en una cierta fecha preestablecida (vencimiento o expiración). Una opción de venta (*put*), en tanto, da a su dueño el derecho de vender un activo en una cierta fecha preestablecida (vencimiento o expiración). Las opciones más conocidas son las europeas y las americanas. Las opciones europeas sólo pueden ser ejercidas en la fecha de expiración, mientras que las americanas pueden ser ejercidas en cualquier minuto antes de la fecha de expiración. En la actualidad, la mayoría de las opciones transadas en los mercados financieros son americanas.

En 1973, y casi después de cinco años de trabajo, Black y Scholes encontraron una solución analítica para el precio de una *call* europea³. Para ello se basaron en los siguientes supuestos: (1) Los mercados financieros no tienen fricciones. Esto es: i) no hay impuestos o costos de transacción; ii) todos los activos son perfectamente divisibles; y, iii) no hay restricciones a las ventas cortas de activos. (2) Las tasas de interés para prestar y pedir prestado son iguales y constantes entre t (hoy) y T (fecha de vencimiento de la opción). Se asume que la tasa de interés por período, r , es compuesta continuamente. (3) La acción, activo subyacente, no paga dividendos entre t y T . (4) El precio de la acción, $S(t)$, sigue un proceso lognormal. Esto es:

$$\text{Ln}\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) \sim N(\mu(t_2-t_1), \sigma^2(t_2-t_1)) \quad (1)$$

Black y Scholes demostraron que, bajo estos supuestos, uno puede replicar el precio final en T de una *call* europea comprando un portafolio compuesto de acciones y bonos libres de riesgo en t , y transando dinámicamente este portafolio hasta T . A fin de evitar

operaciones de arbitraje, el valor de la *call* en t debe ser igual al del portafolio réplica en t . En base a esta observación, los autores encuentran que el precio en t de una *call* europea en una acción está dado por:

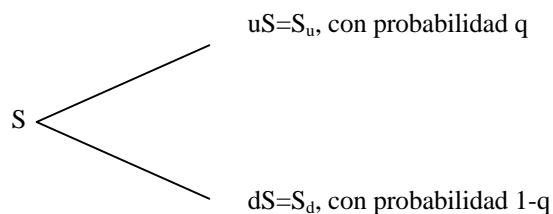
$$C(S, K, t, r, \sigma, T) = S \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (2)$$

donde $\Phi(\cdot)$ representa la función distribución acumulada de una variable normal estándar, d_1 y d_2 están dados por:

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{S}{Ke^{-r(T-t)}}\right] + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (3)$$

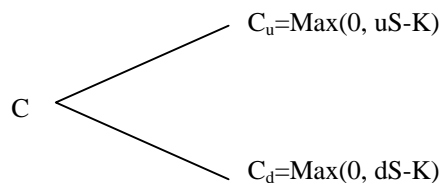
S representa el precio corriente de la acción, K es el precio de ejercicio de la *call*, T es la fecha de vencimiento de la *call*, r es la tasa libre de riesgo por período compuesta continuamente, y σ es la volatilidad instantánea de la acción (esto es, la desviación estándar del precio de la acción por unidad de tiempo).

Existen distintas maneras de obtener la fórmula de Black-Scholes. Una de ellas es a través del árbol binomial en un mundo neutral al riesgo. Este método de valoración es ampliamente utilizado no sólo en la valoración de opciones sino también en una amplia gama de instrumentos derivados. El modelo binomial de un período asume que el precio de la acción sube o baja con probabilidad (efectiva) q y $1-q$, respectivamente:



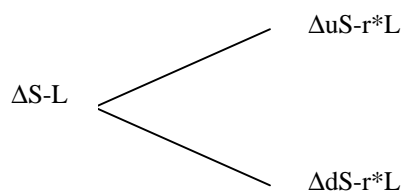
y que el precio de la opción en la fecha de vencimiento está dado por:

³ En virtud de la paridad *put-call* para opciones europeas, a partir del resultado de Black-Scholes para una *call* (europea) se puede obtener una solución analítica para el precio de una *put* (europea).



donde $u \equiv 1 + \text{tasa de retorno si el precio de la acción sube}$; $d \equiv 1 + \text{tasa de retorno si el precio de la acción baja}$; $r^* \equiv 1 + \text{tasa de interés para prestar y pedir prestado}$, tal que $d < r^* < u$.

A fin de encontrar el precio de la opción, se crea un portafolio que contenga Δ acciones y un préstamo de $\$L$ a la tasa libre de riesgo:



Para replicar el precio de la *call* en $t=1$, deben satisfacerse las siguientes dos ecuaciones: i) $\Delta uS - r^*L = C_u$, ii) $\Delta dS - r^*L = C_d$. De ello:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S(u - d)}, \quad L = \frac{dC_u - uC_d}{r^*(u - d)}, \quad (4)$$

Para el caso de una *call*, L es siempre positivo, puesto que la diferencia $dC_u - uC_d$ —igual a $\max(0, duS - dK) - \max(0, udS - uK)$ —es mayor o igual a cero. Esto implica que parte del costo de la acción utilizada para replicar el precio de una *call* es financiada con un préstamo.

El precio de una *call* es expresado en términos de probabilidades ajustadas por riesgo. En particular, sea :

$$p \equiv \frac{r^* - d}{u - d}, (1 - p) \equiv \frac{u - r^*}{u - d}. \quad (5)$$

Dado que $d < r^* < u$, entonces $0 \leq p \leq 1$. Con ello,

$$C = \Delta S - L$$

$$= \frac{pC_u + (1 - p)C_d}{r^*}. \quad (6)$$

Dado que las probabilidades anteriores ya están ajustadas por riesgo, los flujos futuros son descontados a la tasa libre de riesgo. En efecto, las opciones son valoradas como una función de $S(t)$, u , d y r^* . Dado que esta relación es obtenida vía argumentos de arbitraje, la valorización de los derivados es independiente de las preferencias por riesgo de los inversionistas. Tomando ventaja de esta independencia, valoramos estos instrumentos financieros en un mundo neutral al riesgo ficticio, en el cual todos los inversionistas son neutrales al riesgo. Ello, claramente, simplifica el análisis porque en un mundo neutral al riesgo los inversionistas no demandan un premio por riesgo y, por lo tanto, todos los activos tienen un retorno igual a la tasa libre de riesgo.

A fin de resolver un árbol binomial de varios períodos, es necesario resolver el modelo binomial de un período repetidamente. Si n representa el número de períodos; j , el número de movimientos hacia arriba necesarios para alcanzar un punto dado; y, $n - j$, el número de movimientos hacia abajo necesarios para alcanzar un punto dado, entonces el número de trayectorias que conducen a $C_{u^j d^{(n-j)}}$ está dado por $\frac{n!}{j!(n-j)!}$. Con ello la fórmula para n períodos está dada por:

$$C = \frac{1}{r^{*n}} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \max(0, u^j d^{n-j} S - K). \quad (7)$$

(ver Fernández, V., 1999a, para los detalles).

La fórmula anterior se puede expresar como:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{r^{*n}} \sum_{j=a}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} [u^j d^{n-j} S - K], \\ &= S \sum_{j=a}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \frac{u^j d^{n-j}}{r^{*n}} - Kr^{*-n} \sum_{j=a}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde “a” representa el número mínimo de movimientos hacia arriba en el precio de la acción necesarios para que la *call* esté *in-the-money*. Esto es, para que el precio de la acción supere el precio de ejercicio de la opción y, por tanto, resulte atractivo ejercer la opción en la fecha de su vencimiento.

A fin de replicar la dinámica del precio de la acción cuando éste se distribuye lognormal, se debe escoger $u = \exp(\sigma\sqrt{T/n})$ y $d = \exp(-\sigma\sqrt{T/n})$. En virtud del teorema del límite central, Cox, Ross y Rubinstein (1979) demostraron que, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=a}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \frac{u^j d^{n-j}}{r^{*n}} &= \sum_{j=a}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} \left(\frac{up}{r} \right)^j \left(\frac{(1-p)d}{r} \right)^{n-j} \rightarrow \Phi(d_1), \\ \sum_{j=a}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} &\rightarrow \Phi(d_2), \end{aligned}$$

con $r^* = \exp(rT/n)$, $p = (r^* - d)/(u - d)$, y $a \equiv$ el número entero más pequeño mayor o igual a

$\frac{\ln(K/S) - \sigma\sqrt{nT}}{2\sigma\sqrt{T}}$. Con ello la ecuación (8) se reduce a la fórmula de Black-Scholes.

Una segunda vía utilizada en la obtención de la fórmula de Black-Scholes es el método de valoración neutral al riesgo. Este se basa en las siguientes observaciones. Primero, un \$1 invertido hoy a la tasa libre de riesgo ($t=0$) equivaldrá a $\$e^{rT}$ en T . Segundo,

\$1 invertido en acciones alcanzará para $1/S(0)$ acciones hoy día, las cuales valdrán $\tilde{S}(T)/S(0)$ en T . Si nos encontramos en un mundo neutral al riesgo, la retribución esperada en T por invertir en la acción debería ser igual a aquella obtenida en el activo libre de riesgo. Es decir,

$$E\left[\frac{\tilde{S}(T)}{S(0)}\right] = e^{rT} . \quad (9)$$

Si el precio de la acción en T , fecha de vencimiento de la opción, condicional en el precio en $t=0$, se distribuye lognormal, entonces:

$$E\left[\frac{\tilde{S}(T)}{S(0)}\right] = e^{\mu T + 0.5\sigma^2 T} . \quad (10)$$

Por lo tanto, $\mu = r - 0.5\sigma^2$. Si se descuenta el precio de la *call* en T a la tasa libre de riesgo, en un mundo neutral al riesgo se tiene que:

$$C = e^{-r(T-t)} E_t^* [\max(0, \tilde{S}(T) - K)], \quad (11)$$

donde E_t^* denota el valor esperado en un mundo neutral al riesgo, condicional en el valor de

$S(t)$. Bajo el supuesto de lognormalidad $\text{Ln}\left(\frac{\tilde{S}(T)}{S(t)}\right) \sim N([r - 0.5\sigma^2](T-t), \sigma^2(T-t))$. Por ello

$$\begin{aligned} C &= e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} \max[0, \tilde{S}(T) - K] f(\tilde{S}(T)) d\tilde{S}(T), \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} [\tilde{S}(T) - K] f(\tilde{S}(T)) d\tilde{S}(T). \end{aligned} \quad (12)$$

Si se hace el siguiente cambio de variable,

$$Z = \frac{\ln\left(\frac{\tilde{S}(T)}{S(t)}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \sim N(0, 1), \quad (13)$$

con $\tau \equiv T-t$ se llega a la fórmula de Black y Scholes. (Ver Baxter y Rennie, 1996, para los detalles).

Una tercera vía para llegar a la fórmula de Black-Scholes es mediante la obtención de la ecuación diferencial que debe satisfacer el precio de la opción europea, sujeta a ciertas condiciones de borde⁴. Concretamente, dado que el precio de la acción se distribuye lognormal, la dinámica del precio puede ser descrita por un movimiento Browniano geométrico:

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad (14)$$

donde $dW \sim N(0, dt)$, representa el incremento de un proceso Wiener o Browniano estándar.

Por el lema de Ito, la dinámica de C está dada por (ver Hull, 1997 o Fernández, V., 1999a):

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial S} \mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S dW. \quad (15)$$

A fin de encontrar la ecuación diferencial que debe satisfacer C , se forma un portafolio libre de riesgo que contiene una posición corta en la *call* y una posición larga en $\frac{\partial C}{\partial S}$ acciones. Es decir, el valor del portafolio Π está dado por:

$$\Pi = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S. \quad (16)$$

Por lo tanto,

$$d\Pi = -dC + \frac{\partial C}{\partial S} dS. \quad (17)$$

Al reemplazar (15) y (16) en (17), se ve que cambios pequeños en el valor del portafolio no dependen de dW , variable aleatoria. Por lo tanto, el portafolio es libre de riesgo y su rentabilidad debe ser la tasa libre de riesgo. Esto es,

$$d\Pi=r\Pi dt. \quad (18)$$

Por lo tanto, llegamos a que:

$$\frac{\partial C}{\partial S} rS + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rC. \quad (19)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden está sujeta a las siguientes condiciones de borde i) $C = \max(0, S(T)-K)$; ii) $C(0, t)=0$. Mediante un cambio de variable, se concluye que (19) es la llamada “ecuación de calor”. Esta última, utilizada en la física, resulta tener una solución analítica (ecuación (2)). Para los detalles, ver Willmott, Howison y Dewynne (1995).

III Relajamiento de los Supuestos del Modelo de Black-Scholes

Merton (1973) relaja en el modelo de Black-Scholes el supuesto de que la tasa de interés es constante y determinística. En particular, él define $P(t, T)$ como el precio en t de un bono de descuento que paga \$1 en T y asume que la dinámica del precio del bono puede ser descrita como:

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \mu_P dt + \sigma_P dW_p, \quad (20)$$

donde μ_P es la tasa estocástica de crecimiento del precio del bono; σ_P es la volatilidad de $P(t, T)$, la cual se asume una función conocida de t y T ; y dW_p representa el incremento de un proceso Wiener estándar.

Merton demuestra que el precio de una *call* europea está dado por:

$$C(S, K, t, r, \sigma, T) = S \Phi(d_1) - K P(t, T) \Phi(d_2), \quad (21)$$

con

⁴ Esta es una de las demostraciones que discuten Black y Scholes en su artículo de 1973. Los autores también presentan una derivación alternativa que hace uso del modelo de valoración de activos, CAPM, aplicado a los retornos de la acción y de la opción.

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) - \ln P(t, T) + \sigma^2 (T-t)/2}{\sigma \sqrt{T-t}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t} \quad (22)$$

$$y \quad \sigma^2 (T-t) = \int_t^T (\sigma^2 + \sigma_p^2 - 2\rho \sigma \sigma_p) dt.$$

El parámetro σ es la volatilidad instantánea del precio de la acción y ρ es la correlación instantánea entre el precio de la acción y del bono. Este modelo se diferencia del de Black-Scholes en dos aspectos. Primero, la tasa de interés instantánea, r , es reemplazada por $r(t, T) = -\ln[-P(t, T)]/[T-t]$. Segundo, la volatilidad del precio de la acción es reemplazada por σ . Merton argumenta que es más apropiado utilizar $r(t, T)$ en la fórmula de Black-Scholes. Sin embargo, en la práctica no hace mayor diferencia utilizar σ o σ porque, para la mayoría de las opciones que se transan en el mercado, σ es mucho más grande que σ_p (Hull, 1997).

Uno de los supuestos claves en la derivación del precio de una opción europea es la distribución de probabilidad que sigue el precio del activo subyacente al momento del vencimiento de la opción. En el caso del modelo de Black-Scholes, ésta se asume lognormal. Hull, *op. cit.*, discute el sesgo potencial que puede tener sobre el precio de una opción europea el utilizar la fórmula de Black-Scholes cuando la verdadera distribución del precio del activo subyacente, al momento de expiración de la opción, difiere de la lognormal.

A fin de combatir dichos sesgos, se han desarrollado especificaciones alternativas. Por ejemplo, Hull y White (1987) introducen un modelo en que la volatilidad del precio de la acción es estocástica:

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sqrt{v} dW_s, \quad (23)$$

$$dv = \delta(\phi - v) dt + \xi v^\eta S dW_v, \quad (24)$$

donde S es el precio de la acción, r es la tasa de interés libre de riesgo, v es la varianza instantánea del precio de la acción, δ , ϕ , η y ξ son parámetros, y dW_s y dW_v son incrementos de procesos Wiener estándar. La ecuación (23) describe la dinámica del precio de la acción (en un mundo neutral al riesgo), mientras que la ecuación (24) describe la dinámica de la varianza del precio de la acción por unidad de tiempo, v . Esta última ecuación indica que v se revierte al nivel ϕ a una tasa δ .

Hull y White demuestran que cuando la volatilidad es estocástica, pero no está correlacionada con el precio de la acción, el precio de una *call* europea es la fórmula de Black-Scholes integrada sobre la distribución de la varianza promedio durante la vida de la opción, \bar{v} . Esto es, $\int c(\bar{v})f(\bar{v})d\bar{v}$, donde $c(\cdot)$ es la fórmula de Black-Scholes en (2) y $f(\cdot)$ es la distribución de probabilidades de \bar{v} en un mundo neutral al riesgo. Hull y White comparan el precio de su modelo con aquél que daría la fórmula de Black-Scholes si uno reemplazara σ^2 por \bar{v} en la ecuación (2). Los autores concluyen que la ecuación (2) sobreestima el precio de una opción para la cual S es cercano a K , y subestima el precio de una opción para la cual S es sustancialmente menor o mayor que K . Para aquellos casos en que la volatilidad está correlacionada con el precio de la acción, el precio de la opción debe ser obtenido mediante simulaciones de Monte Carlo.

Un método popular en la literatura para modelar volatilidad estocástica es la llamada “Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva Generalizada” (“GARCH”). Un ejemplo simple de tales modelos es el GARCH(1,1), el cual relaciona la varianza de los retornos de una acción (u otro activo) en el instante $i\Delta t$, σ_i^2 , con la varianza del retorno del activo en $(i-$

$1)\Delta t$, σ_{i-1}^2 , y el cuadrado de la diferencia entre el retorno en el instante $(i-1)\Delta t$, r_i , y el retorno promedio, μ :

$$\sigma_i^2 = \theta_1 + \theta_2 \varepsilon_{i-1}^2 + \theta_3 \sigma_{i-1}^2, \quad (25)$$

donde $\varepsilon_i = r_i - \mu$; y θ_1 , θ_2 y θ_3 son constantes. La variable ε_i^2 puede ser interpretada como la información más reciente acerca de la varianza del retorno del activo en el instante $i\Delta t$ (ver, por ejemplo, Engle, 1995; Chu y Freund, 1996).

Sustituyendo σ^2 repetidamente, se llega a que la varianza del retorno en cualquier momento del tiempo es una constante más una suma ponderada de todas las “innovaciones” o información pasada sobre la varianza de los retornos:

$$\sigma_i^2 = \frac{\theta_1}{1 - \theta_3} + \theta_2 \sum_{j=1}^{\infty} \theta_3^{j-1} \varepsilon_{i-j}^2. \quad (26)$$

Si $|\theta_3| < 1$, la importancia de la información pasada decae a medida que pasa el tiempo. Generalizaciones de los modelos GARCH son los GARCH integrados (IGARCH) y los GARCH exponenciales (EGARCH) (ver Hamilton, 1994).

Herzel (1998) ha extendido el modelo de Black-Scholes al asumir que la volatilidad del precio de la acción puede saltar de un valor σ_a a un σ_b en un instante de tiempo aleatorio. El autor encuentra soluciones analíticas para los precios de opciones europeas así como para algunos parámetros de cobertura de riesgo (*hedging*). Asimismo, Herzel encuentra que los precios generados por su modelo producen una curva de volatilidad implícita (*implied volatility*)⁵ que presenta la ya reportada “sonrisa”.

En efecto, la llamada “sonrisa de la volatilidad” es un fenómeno que ha sido observado por diversos autores y agentes que transan activamente en el mercado de

⁵ Aquella que puede ser inferida de los precios de las opciones utilizando la fórmula de Black-Scholes.

opciones. Al graficar la volatilidad implícita de una opción en función de su precio de ejercicio, se observa que las opciones *out-of-the-money* y *in-the-money*⁶ tienden a tener una volatilidad implícita más alta que aquellas opciones para las cuales el precio del activo subyacente es aproximadamente igual al precio de ejercicio (*at-the-money*). Tal comportamiento se traduce en una especie de “sonrisa”, la cual ha hecho cuestionable el supuesto de volatilidad constante del modelo de Black-Scholes.

Derman y Kani (1994a, b), Dupire (1994) y Rubinstein (1994) argumentan que el patrón sistemático de la “sonrisa” se debe a cambios en la volatilidad en los retornos de los activos. Los autores plantean que la volatilidad del retorno de un activo es una función determinística del precio del activo y del tiempo, y desarrollan modelos de valoración binomial y trinomial para tomar en cuenta este fenómeno. En un artículo reciente, Dumas, Fleming y Whaley (1998) examinan el valor predictivo y de cobertura de los modelos planteados por Derman y Kani, Dupire y Rubinstein para una muestra de opciones del S&P 500 para el período 1988-1993. Los autores concluyen que dichos modelos no presentan ventajas sobre un procedimiento ad-hoc que simplemente suaviza las volatilidades implícitas entregadas por la fórmula de Black-Scholes para distintos precios de ejercicio y vencimientos.

Existe una vasta literatura en el área del cálculo de la volatilidad implícita. Otras referencias son Amin y Ng (1997), quienes concluyen que la volatilidad implícita obtenida del modelo de Heath-Jarrow-Morton (1992) para opciones en eurodólares explica mucho de la volatilidad observada en la tasa de interés, e incluso puede brindar un pronóstico superior al de un modelo GARCH; Bharadia, Christofides y Salkin (1995), quienes calculan la

⁶ Se dice que una opción está *out-of-the-money* si el precio del activo subyacente es inferior al precio de ejercicio.

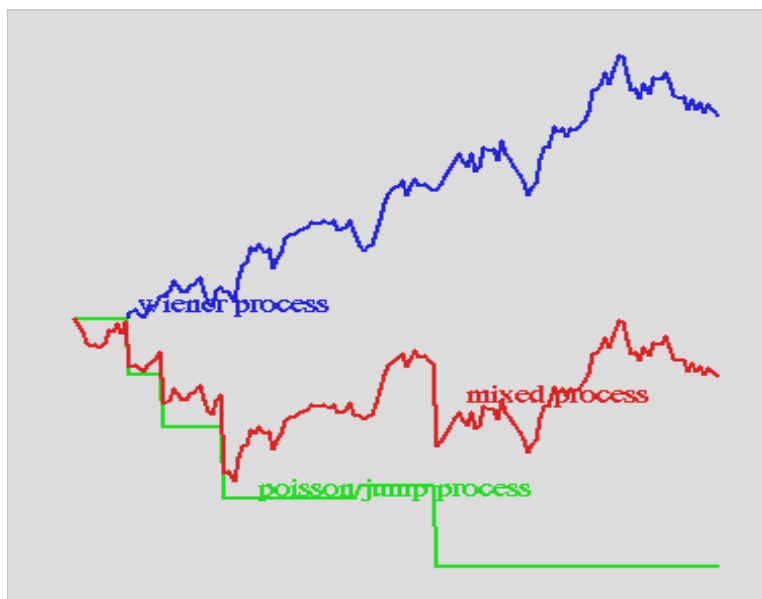
volatilidad implícita mediante una generalización simple del modelo de Black-Scholes; Karolyi (1993), quien desarrolla un enfoque bayesiano para modelar la volatilidad del retorno de una acción para efectos de valoración de opciones; Jarrow y Wiggins (1989), quienes demuestran que las volatilidades implícitas en el modelo de Black-Scholes pueden ser utilizadas para valorar opciones aun en situaciones en que los supuestos de dicho modelo son violados, incluyendo (1) procesos estocásticos alternativos al lognormal para el precio de la acción, (2) tasas de interés estocásticas, y (3) fricciones de mercado.

Otra clase de modelo que relaja el supuesto de lognormalidad es aquella que permite que el precio del activo subyacente presente discontinuidades o “saltos”. La idea es que, en cada intervalo de tiempo, existe una probabilidad positiva de que el precio de la acción salte bruscamente de un nivel S_1 a S_2 —usualmente, en respuesta a algún tipo de anuncio—. Uno de los primeros ejemplos de tales modelos encontrados en la literatura es el de Merton (1976). Bajo el supuesto de que el precio de la acción es lognormal y está sujeto a discontinuidades que siguen un proceso Poisson, el autor demuestra que el precio de una *call* europea está dado por:

$$C(S, K, t, T) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(1+\kappa)(T-t)} [\lambda(1+\kappa)(T-t)]^j}{j!} C_j, \quad (27)$$

donde λ es la tasa a la cual ocurren los saltos, κ es el tamaño del salto medido como un aumento proporcional en el precio de la acción y C_j es el precio de una *call* europea dado por la fórmula de Black-Scholes, donde la volatilidad es $\sqrt{\sigma^2 + j\delta^2}/(T-t)$ y la tasa de interés es un \tilde{r} donde $\tilde{r} = r - \lambda\kappa + [j \text{Ln}(1+\kappa)]/(T-t)$ — r es la tasa libre de riesgo, σ es la volatilidad instantánea del retorno del precio de la acción y δ^2 es un parámetro asociado con la distribución del salto—. Si $\lambda=\kappa=\delta^2=0$, estamos de vuelta en el modelo de Black-Scholes.

Figura 1.-Simulación de un Proceso Wiener con Descontinuidades



La Figura 1 muestra la senda de un proceso Wiener que sufre discontinuidades de acuerdo a un proceso Poisson (en la figura, “*mixed process*”), generada por el programa “XploRe”⁷. Una desventaja de trabajar con modelos que suponen esta clase de dinámica para el precio del activo subyacente—a parte de su complejidad matemática—radica en que, si los saltos son simétricos hacia arriba y abajo, éstos son difíciles de distinguir de cambios en la volatilidad del precio del activo subyacente. Trabajos posteriores al de Merton en esta área son los de Jarrow y Rudd (1982) y Naik y Lee (1990), entre otros.

IV La Aparición de Opciones No Tradicionales: Las Llamadas Opciones Exóticas

Las opciones exóticas son todas aquellas opciones no tradicionales, es decir, aquellas que tienen funciones de pagos más complejas que las de las opciones europeas y americanas estándar (Geske, 1979; Kemna y Vorst, 1990; Rubinstein, 1991; Hull y White,

⁷ Paquete estadístico orientado al manejo matricial y al uso de gráficos interactivos. Una versión beta puede obtenerse del sitio <http://www.xplores-stat.de>.

1992). La mayoría de las opciones exóticas se transa fuera de los mercados financieros establecidos y es diseñada por instituciones financieras para satisfacer requerimientos especiales de sus clientes. La ventaja de estas opciones es que suelen ser más baratas que aquellas transadas en la bolsa. Entre las opciones exóticas más conocidas se cuentan los paquetes, las opciones digitales o binarias, las opciones cuyo precio depende de la trayectoria del precio del activo subyacente—*lookback*, asiáticas, barrera—y opciones sobre opciones u opciones compuestas.

Los paquetes son portafolios compuestos por *calls* europeas estándar, *puts* europeas estándar, contratos *forward*, dinero y el activo subyacente. Ejemplos son los *spreads bull*, *bear* y *butterfly* y los *straddles* (ver Hull, *op cit.*, o Fernández, P., 1996). Las opciones binarias o digitales, en tanto, son opciones con funciones de pago discontinuas. Un tipo de opción digital es la opción pulso. Una *put* pulso europea, por ejemplo, paga al momento del vencimiento un monto $\$D$ si $S(T) \leq K$ —donde K es el precio de ejercicio de la opción, S es el precio del activo subyacente y T es la fecha de vencimiento de la opción—y $\$0$ si $S(T) > K$.

Las opciones *lookback* son aquellas cuyo valor depende de la cotización máxima o mínima alcanzada por el activo subyacente durante la vida de la opción. Las opciones asiáticas, por su parte, son aquellas cuyo valor depende del precio promedio del activo subyacente observado durante la vida de la opción o parte de ella. Las opciones barrera, en tanto, son aquellas cuyo valor depende de si el precio del activo subyacente alcanza un cierto nivel durante un período de tiempo dado.

Las opciones compuestas son opciones sobre opciones. Se caracterizan, además, por tener dos precios de ejercicio y dos fechas de expiración. Ejemplos son una *call* sobre una

call, una *put* sobre una *call* (o una *call* sobre una *put*), y las opciones “*as-you-like-it*” (o “*chooser option*”). Estas últimas permiten que, después de transcurrido un cierto período de tiempo, el dueño de la opción pueda decidir si ésta es una *call* o una *put*.

En muchas oportunidades no es posible obtener fórmulas analíticas para la valoración de opciones. Un claro ejemplo lo constituyen las opciones americanas. Si bien Roll (1977), Geske (1979) y Whaley (1981) encontraron una fórmula analítica para el precio de una *call* americana en una acción que paga dividendos y que sigue un proceso lognormal, se ha demostrado que ello no es posible para el precio de una *put* americana. Por otra parte, en el caso de algunas opciones exóticas, es posible obtener soluciones analíticas sólo bajo los supuestos del modelo de Black-Scholes.

Debido a estas dificultades, se han desarrollado métodos numéricos para valorar opciones. Uno de los más simples y populares es el método del árbol binomial (ver sección II). Este es particularmente útil para valorar opciones americanas en activos que pagan dividendos y opciones cuyo precio depende de la trayectoria del precio del activo subyacente—por ejemplo, asiáticas, *lookback* y de barrera—. Sin embargo, a fin obtener una buena aproximación del precio de la opción, es necesario construir un árbol con muchos nodos. Ello puede ser, en ciertos casos, computacionalmente imposible o extremadamente lento. Métodos alternativos son las simulaciones de Monte Carlo y los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, tales como el de diferencias finitas y el de Crank-Nicholson (ver Wilmott, Howison y Dewynne, 1995).

Investigación reciente en el área ha demostrado que los métodos de cuasi Monte Carlo (por ejemplo, Halton, Sobol, Faure y redes (t, m, s)) para la simulación de precios de opciones pueden ser superiores a los métodos clásicos de Monte Carlo, en términos de

velocidad de convergencia y exactitud (ver, por ejemplo, Li, 1999; Acworth, Broadie y Glasserman, 1996)⁸. En particular, Li, *op. cit*, introduce el uso de redes (t, m, s) para la aproximación de integrales multidimensionales en la valoración de opciones y otros instrumentos⁹. La autora concluye que dichas redes pueden ser superiores a otros métodos de cuasi Monte Carlo, tales como el de Sobol y Faure¹⁰, para ciertas aplicaciones.

V Otras Aplicaciones: Valoración de Warrants e Instrumentos de Renta Fija y Opciones Reales

Instrumentos financieros tales como *warrants*, bonos rescatables (*callable bonds*) y bonos convertibles (*convertible bonds*) pueden ser catalogados como opciones. En particular, un *warrant* equivale a una *call* emitida por una firma con la diferencia de que, si es ejercida, se emiten nuevas acciones. La mayoría de los bonos corporativos de mercados financieros desarrollados son rescatables. Es decir, el emisor puede recomprarlos a un precio preespecificado. Esta opción de compra puede ser ejercida usualmente sólo después de un período de “protección de rescate”. En el caso de un bono convertible, su dueño puede decidir si convertirlo a acciones a una razón predeterminada (ver Figlewski *et al.*, 1990).

Un área que ha recibido mucha atención en la literatura es el desarrollo y estimación de modelos de estructura de tasas de interés, cuya finalidad es la valoración de instrumentos de renta fija. En efecto, en el campo teórico se han desarrollado numerosos modelos en

⁸ Los métodos estándar de Monte Carlo utilizan pseudo secuencias aleatorias cuya velocidad de convergencia es $O(N^{-1/2})$ para N trayectorias. Un método de simulación de cuasi Monte Carlo que utilice secuencias determinísticas más uniformemente distribuidas puede proporcionar velocidades de convergencia mayores, tales como $O(N^{-1})$ y $O(N^{-3/2})$.

⁹ Una red (t, m, s) en base b es un conjunto que comprende b^m puntos en $[0, 1]^s$, tal que cada intervalo elemental E en base b de volumen $1/b^{t-m}$ contiene exactamente b^t puntos. Por ejemplo, la red (0, 2, 2) en base 3 contiene $b^m=3^2=9$ puntos y cada intervalo elemental de volumen $1/b^{m-t}=1/9$ contiene $b^t=1$ punto (ver Li, 1999).

¹⁰ Estos son casos especiales de las llamadas secuencias (t, s) en base b (ver Acworth *et al.*, *op. cit*).

tiempo continuo, particularmente para la tasa corta (“instantánea”), a partir de los cuales se ha podido inferir diversas formas funcionales que describen la estructura temporal de tasas. Estos pueden dividirse en modelos de equilibrio y modelos de no-arbitraje. En los modelos de equilibrio, la estructura de tasas de interés es un producto del modelo, mientras que en los modelos de no-arbitraje es un insumo.

Los modelos de equilibrio usualmente parten de un conjunto de supuestos sobre las variables económicas y obtienen la dinámica para la tasa de interés de corto plazo libre de riesgo, r . Una clase de modelos de equilibrio que ha sido ampliamente utilizada en la literatura empírica es la de los modelos de un factor. Ejemplos clásicos son Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985) (ver Chan, Karolyi, Longstaff y Sanders, 1992, para una generalización de éstos). Estos modelos asumen que la tasa de interés sigue un proceso estocástico en el cual sus parámetros de tendencia y de volatilidad son una función de sí misma pero son independientes del tiempo. Para una aplicación del modelo de Chan *et al.* para Chile, ver Parisi (1998).

La literatura más reciente ha considerado modelos de dos factores en los cuales se asume que tanto la tasa de interés como su volatilidad siguen procesos estocásticos distintos pero correlacionados (ver, por ejemplo, Longstaff y Schwartz, 1992). Ello ha posibilitado no sólo captar un mayor número de las propiedades empíricas de la estructura de tasas, sino, además, valorizar de manera más exacta aquellos activos cuyo precio es contingente al valor de la tasa de interés (*contingent claims*). Trabajos posteriores han considerado un mayor número de factores (ver Gong y Remolona, 1997, para un modelo de tres factores que utiliza el filtro de Kalman).

Una crítica que se ha hecho a los modelos paramétricos es que consideran formas funcionales arbitrarias para describir la evolución de las tasas de interés a través del tiempo.

Åit-Sahalia (1996b) demuestra que todos los modelos paramétricos de un factor existentes pueden ser rechazados estadísticamente. Para superar esta falencia, Åit-Sahalia (1996a, 1996b) utiliza estimación semi paramétrica para inferir qué especificación paramétrica podría describir el verdadero proceso estocástico de la tasa de interés.

Otro artículo en la misma línea es Stanton (1997), quien opta por un enfoque libre de toda parametrización. Esto es, el autor no impone restricciones sobre las formas funcionales del parámetro de tendencia y de volatilidad de la tasa de interés en el contexto de un modelo de un factor. Más recientemente, Jiang (1998) ha realizado una comparación de métodos semi paramétricos y no paramétricos para modelar la tendencia y la volatilidad de la tasa corta, también bajo el contexto de un modelo de un factor. Para una aplicación de la metodología de Stanton y Jiang para Chile, ver Fernández, V. (1999b).

La otra corriente utilizada para modelar la tasa corta es aquella de los modelos de no-arbitraje. Estos modelos han cobrado popularidad entre profesionales abocados a la valorización de derivados en tasas de interés. La dinámica de la tasa corta también es concebida en términos continuos pero, a fin de replicar en forma exacta la estructura de tasas vigente, se permite que algunos de los parámetros del modelo sean una función del tiempo. Dado que la dependencia temporal estipulada es usualmente arbitraria, estos modelos a menudo conducen a un comportamiento de las tasas de interés futuras que está reñido con la realidad. Ejemplos de esta clase de modelo son Ho y Lee (1986) y Heath, Jarrow y Morton (1992)¹¹.

¹¹ Una desventaja del modelo de Heath *et al.* para tasas *forward* es que es no markoviano. Es decir, para conocer el comportamiento de la tasa de interés para un período corto de tiempo en el futuro, necesitamos no sólo conocer el valor de ésta al comienzo del período sino que también su trayectoria hasta llegar a dicho punto. En contraste, el modelo de Ho y Lee es un modelo markoviano que es fácilmente tratable analíticamente. Ello lo hecho popular entre los llamados *practitioners* (ver por ejemplo, Tuckman, 1995).

Otra área en la cual la teoría de opciones ha cobrado gran relevancia en el último tiempo es en la evaluación de proyectos de inversión, tales como la explotación de una mina o pozo petrolífero, contratos de arriendo, el diseño de un nuevo producto y la inversión en investigación y desarrollo (ver Trigeorgis, 1996)—opciones reales—. Se ha demostrado que la evaluación de proyectos que involucran algún grado de flexibilidad futura no puede llevarse a cabo con las técnicas tradicionales del valor presente neto o tasa interna de retorno. En verdad, tales métodos pueden dictar decisiones incorrectas con respecto al momento óptimo de invertir. Debido a la relevancia de esta área para el diseño de política, nos centraremos en ella en lo que resta de este artículo.

5.1 Una Nueva Metodología para la Evaluación de Proyectos: Opciones Reales

La evaluación de proyectos que involucran algún grado de flexibilidad futura—opciones reales—no puede llevarse a cabo con las técnicas tradicionales del valor presente neto o tasa interna de retorno. En verdad, tales métodos pueden llevarnos a tomar decisiones incorrectas con respecto al momento óptimo de invertir en un determinado proyecto. Como sabemos, la regla tradicional del Valor Presente Neto (VPN) establece que debemos llevar a cabo un proyecto si el valor presente neto de los flujos de caja generados por éste es mayor que cero. Esta regla es óptima cuando la oportunidad de inversión es del tipo “ahora o nunca”, o cuando el proyecto de inversión es completamente reversible.

Sin embargo, en la realidad pocas inversiones son del tipo “ahora o nunca”. Los inversionistas no sólo tienen el derecho a decidir si invertir o no, sino que también tienen el derecho a decidir cuándo invertir en un nuevo proyecto. El segundo derecho es una opción a retrasar la inversión. Esta es una opción real a diferencia de una financiera (americana).

Sin embargo, ambas tienen varios elementos en común (Tabla 1). Por otra parte, pocas inversiones son completamente reversibles. La puesta en marcha de un nuevo proyecto involucra costos hundidos, los cuales no son recuperados si el proyecto es abandonado.

Tabla 1 Comparación de una Opción Americana y una Opción de Inversión en una Planta

	Opción Americana	Opción de Inversión
Activo subyacente	Acción	Valor de la planta
Precio de ejercicio	K	Costo de construir la planta
Fuente de incertidumbre	Precio de la acción, $S(t)$	Valor de la planta
Ganancia de esperar	- Derecho a no ejercer	- Derecho a no invertir
	- Postergar el costo de K	- Postergar el costo de la planta
Pérdida de esperar	Dividendo	Pérdida de no producir
Valor de la opción ejercida	$S(t)-K$	VPN
Valor de la opción sin ejercer	$C(t)$	Valor de la opción de invertir

La regla del valor presente neto, no obstante, también se aplica a la valoración de opciones reales si nos damos cuenta que el VPN de una opción real es el VPN de llevar a cabo el proyecto menos el costo de oportunidad de la pérdida asociada con ejercer la opción. La regla tradicional del valor presente para proyectos mutuamente excluyentes establece que deberíamos adoptar el proyecto más valioso. En el contexto de opciones reales, enfrentamos un continuo de proyectos porque siempre podemos retrasar la fecha de la puesta en marcha. La regla tradicional del VPN nos diría, entonces, que seleccionásemos aquella fecha de puesta en marcha que maximice el valor del proyecto. Esto es precisamente de lo que trata la teoría de opciones reales.

Para ilustrar estas ideas, veremos dos ejemplos: la determinación del momento óptimo de destinar un pedazo de tierra de uso agrícola a fines urbanos (Sick ,1995): opción americana perpetua, y el momento óptimo de desarrollar un pozo petrolífero (Siegel, Smith y Paddock, 1987; Paddock, Siegel y Smith, 1988): opción americana con una fecha de vencimiento establecida.

Para ello, partimos de los siguientes supuestos generales. El precio de un activo subyacente, P , sigue el siguiente proceso de difusión:

$$dP_t = \alpha(P_t, t)dt + \sigma(P_t, t) dW_t, \quad (28)$$

donde α es el crecimiento esperado en pesos por unidad de tiempo del precio del activo subyacente, P_t ; σ es la desviación estándar anualizada del retorno del activo subyacente; y, dW_t es el incremento de un proceso Wiener estándar.

Suponemos, además, que $\delta(P_t, t)$ representa una tasa de dividendo instantánea que recibe el dueño del activo subyacente. Después de suprimir subíndices, la tasa de retorno esperada puede expresarse como la suma de ganancia de capital y del dividendo:

$$E[dP + \delta(P, t)dt] = [\alpha(P, t) + \delta(P, t)] dt. \quad (29)$$

Consideremos ahora un derivado sobre el activo subyacente. Sea $f(P, t)$ el precio de una opción real. Esta da, por ejemplo, el derecho a adquirir, intercambiar o abandonar un determinado activo bajo ciertas condiciones preestablecidas. Definamos $D(t)$ como una tasa de dividendo instantánea que recibe el dueño de la opción. Por ejemplo, $D(t)$ es el ingreso neto que genera una propiedad que debe ser intercambiada por el activo subyacente una vez que se ejerce la opción.

Asumiendo que la primera y segunda derivada de la función $f(P, t)$ existen, el lema de Ito permite encontrar la dinámica que describe la evolución del precio del derivado:

$$\begin{aligned} df &= f_p dP + f_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2(P, t) f_{pp} dt \\ &= f_p \alpha(P, t) dt + f_p \sigma(P, t) dW + f_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2(P, t) f_{pp} dt. \end{aligned} \quad (30)$$

El retorno esperado en pesos (ganancias de capital más dividendos) de la opción por unidad de tiempo es:

$$[f_p \alpha(P, t) + f_t + \frac{1}{2} \sigma^2(P, dt) f_{pp} + D(t)] dt. \quad (31)$$

Si formamos un portafolio libre de riesgo con dos derivados sobre el activo subyacente, podemos obtener la llamada “ecuación parcial fundamental para la valoración de opciones”:

$$\frac{1}{2} \sigma^2(P, dt) f_{pp} + f_t + f_p [r P - \delta(P, t)] + D(t) = r f. \quad (32)$$

5.1.1 Un Ejemplo de una Opción Americana Perpetua: Distintos Usos de la Tierra

Consideremos el ejemplo en Sick (1995) de una opción perpetua para convertir un ingreso de \$D por año generado por un pedazo de tierra dedicado a los cultivos agrícolas en un terreno de uso urbano con un valor incierto de \$P, pagando un costo fijo de desarrollo de \$K. De lo anterior, es claro que estamos en presencia de una opción americana con precio de ejercicio \$K que paga un dividendo de \$D a su dueño, y donde el activo subyacente es la tierra de uso urbano. Un elemento clave es determinar el momento óptimo de ejercicio de la opción americana.

Supongamos que la desviación estándar del precio del activo subyacente, $\sigma(P, t)$, es igual a $\sigma_0 P$ por año. El activo subyacente entrega un dividendo igual a la renta anual generada por la tierra urbana. Este se asume igual a $\delta(P, t) = \delta_0 P$ por año. Bajo estos supuestos la ecuación (32) viene dada por:

$$\frac{1}{2} \sigma_0^2(P, dt) f_{pp} + f_t + f_p [r - \delta_0] P + D = r f. \quad (33)$$

El valor de la opción al momento de ejercicio es:

$$f(P^*, t) = \max \left\{ \frac{D}{r}, P^* - K \right\}, \quad (34)$$

donde P^* denota el precio del activo subyacente al momento de ejercicio de la opción. La ecuación (34) es una condición de borde para resolver la ecuación diferencial (33). Dicha condición establece que si la opción no es ejercida, se recibe una perpetuidad de \$D con valor presente de D/r . Por otra parte, si la opción es ejercida, se obtiene un valor neto de conversión de $P^* - K$. El poseedor de la opción escoge el máximo de estos dos valores.

En este caso existen dos variables de estado: el tiempo y el precio del activo subyacente. Sin embargo, dado que la opción es perpetua y que el dividendo, D , y el precio de ejercicio, K , no son función del tiempo, la decisión de ejercicio no depende del tiempo. Bajo estas condiciones, existe una solución única para P^* .

Por ello, $f_t=0$ y la expresión (33) se reduce a:

$$\frac{1}{2} \sigma_0^2(P, dt) f_{pp} + f_p [r - \delta_0] P + D = r f, \quad (35)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. La solución general a la ecuación (35) está dada por (ver, por ejemplo, Dixit y Pindyck, 1994):

$$f(P) = C_1 P^{\lambda_1} + C_2 P^{\lambda_2} + \frac{D}{r}, \quad (36)$$

donde $f(P) = C_1 P^{\lambda_1} + C_2 P^{\lambda_2}$ es la solución a la ecuación homogénea, y $f(P) = D/r$ es una solución particular. Utilizando la metodología para resolver este tipo de ecuaciones, se obtiene que:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} + \frac{d_0 - r}{s_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{d_0 - r}{s_0^2} \right)^2 + \frac{2r}{s_0^2}}, \quad (37)$$

donde λ_1 es positiva y λ_2 es negativa.

Para determinar las constante C_1 y C_2 , se hace uso de las condiciones de borde. Primero, dado que la opción puede ser ejercida en cualquier momento, su valor tiene un piso. En particular, $f(P) \geq D/r$ —el valor presente de la perpetuidad generada por la tierra agrícola—. Por otra parte, la opción no puede valer más que el valor del activo en el cual puede ser convertida—tierra para uso urbano—y el valor presente de la perpetuidad generada por la tierra destinada al uso agrícola. Dado que P^{λ_2} diverge cuando $P \rightarrow 0$, entonces $C_2=0$.

Por otra parte, es razonable esperar que $f(\cdot)$ sea creciente en P . Por lo tanto, $C_1 > 0$. El dueño de la opción la ejercerá sólo si las ganancias de tal acción, $P^* - K$, superan la perpetuidad obtenida al destinar la tierra a fines agrícolas, D/r . Es decir, $P^* - K - D/r \geq 0$. De (34) obtenemos la siguiente condición de borde:

$$f(P^*) = P^* - K. \quad (38)$$

Utilizando (34), (36) y la condición $C_2=0$, se obtiene:

$$C_1 = (P^*)^{-I_2} \left(P^* - K - \frac{D}{r} \right), \quad (39)$$

Dado que $C_2=0$, el máximo global de f puede ser encontrado al maximizar C_1 con respecto a P^* . Haciendo $\partial C_1 / \partial P^* = 0$ en (39), se determina un único valor para P^* :

$$P^* = \frac{I_2}{I_2 - 1} \left(K + \frac{D}{r} \right). \quad (40)$$

La solución para $f(P)$, por lo tanto, está dada por:

$$f(P) = \frac{1}{I_2 - 1} \left(K + \frac{D}{r} \right) \left(\frac{P}{P^*} \right)^{I_2} + \frac{D}{r}, \quad (41)$$

donde P^* está dado por (40).

En la Figura 2, las curvas con línea punteada representan el valor de la opción, $f(P)$ —esto es, soluciones a la ecuación diferencial (35)—. El precio óptimo de ejercicio, P^* , viene dado por el punto de tangencia de la función $f(P)$ con la frontera de pago, $\max(D/r, P-K)$ —condición de borde (34)—. El precio P_1 se encuentra en la frontera de pago, sin embargo, es un subóptimo porque es posible aumentar el valor de la opción escogiendo P^* . La curva denominada “no alcanzable” representa una solución de la ecuación diferencial (35) que no satisface la condición de borde (34).

La condición de tangencia descrita arriba se denomina condición de *smooth-pasting*. Ella establece que en el óptimo o punto de ejercicio, P^* , el valor de la opción es tangente a la frontera—en este caso, $\max(D/r, P-K) \big|_{P=P^*}$ —:

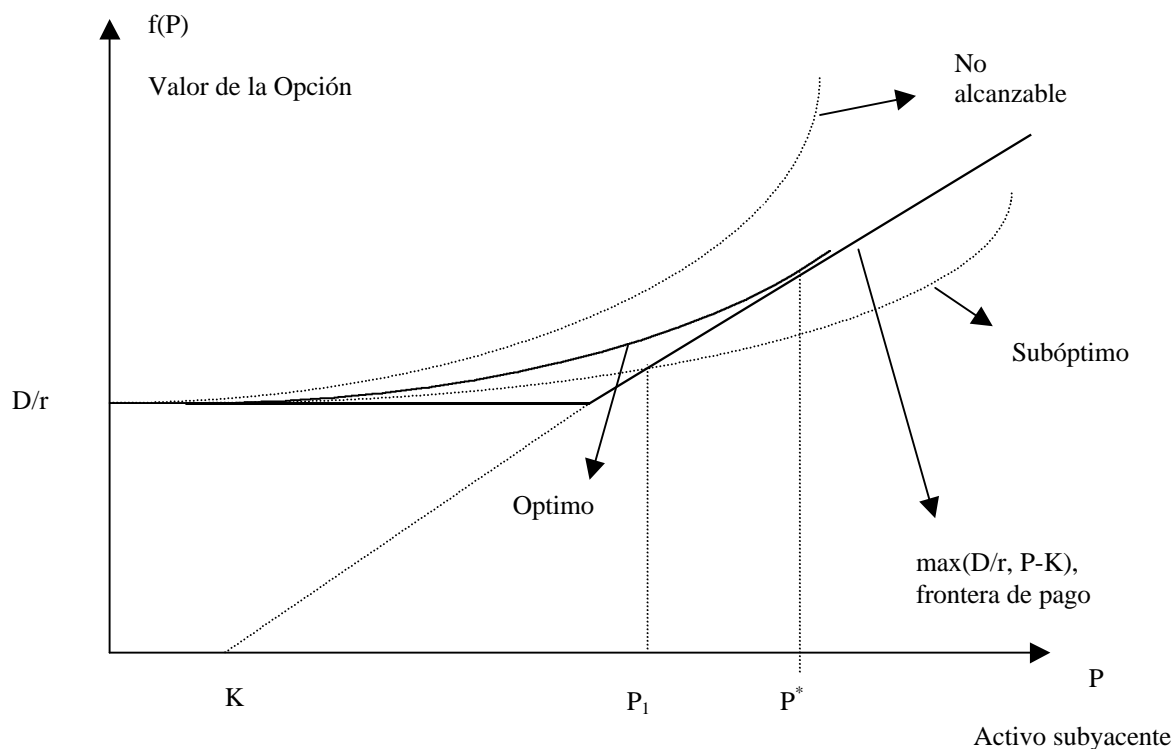
$$f_P(P^*, t) = \frac{\partial (P-K)}{\partial P} \bigg|_{P=P^*} . \quad (42)$$

Es decir,

$$f_P(P^*, t) = 1. \quad (43)$$

Gráficamente,

Figura 2 Determinación del Precio de Ejercicio Optimo



Si el dividendo asociado con la propiedad de la opción, D , es cero, entonces la ecuación (41) se reduce al precio de una opción de compra perpetua sobre un activo subyacente cuyo precio sigue una dinámica lognormal¹²: Esta observación permite interpretar la opción de convertir la tierra de uso agrícola a uso urbano como un portafolio de dos activos: i) una opción a intercambiar la tierra agrícola por tierra urbana con un precio de ejercicio de $K+D/r$, y ii) un pedazo de tierra no convertible con un valor de D/r .

5.1.2 Decisiones de Desarrollar un Pozo Petrolífero: Una Opción Americana con una Fecha de Vencimiento Específica

En esta sección estudiaremos un modelo de inversión en reservas petrolíferas desarrollado por Siegel, Smith y Paddock (1987) y Paddock, Siegel y Smith (1988).

¹² Otro ejemplo de una oportunidad de inversión que se asemeja a una opción de compra americana perpetua es aquel analizado por McDonald y Siegel (1986). En particular, ellos consideran el problema de encontrar el

Veremos que, al ignorar la flexibilidad con que cuenta el dueño de la reserva, esto es, el valor de la opción de dicho recurso, la regla del Valor Presente Neto (VPN) puede conducir a una valoración errónea del recurso en cuestión. La Tabla 2—similar en espíritu a la Tabla 1—ilustra la analogía entre una *call* americana y una reserva petrolífera.

Tabla 2 **Analogía entre una Opción de Compra Americana y una Reserva Petrolífera sin Desarrollar**

Opción de Compra Americana	Reservas sin Desarrollar
Precio de la acción	Valor de las reservas desarrolladas
Precio de ejercicio	Costo de desarrollo
Tiempo restante para la expiración	Expiración del derecho de desarrollar
Volatilidad del precio de la acción	Volatilidad del valor de las reservas desarrolladas
Dividendo de la acción	Ingreso neto de producción de las reservas desarrolladas menos desgaste del recurso

Fuente: Paddock, Siegel y Smith (1988).

La valoración y explotación de un pozo petrolífero es un problema de inversión de múltiples etapas. La primera de ella involucra la exploración, etapa cuyo objetivo es determinar cuánto petróleo existe y cuál es el costo de extraerlo. La segunda etapa—que toma lugar sólo si la primera ha sido exitosa—involucra la etapa de desarrollo. Esto es, la instalación de plataformas y pozos de producción necesarios para extraer el recurso. La última etapa corresponde a la extracción del petróleo en algún horizonte de tiempo.

Dado que la etapa de desarrollo involucra el gasto de capital más cuantioso de este proceso de inversión, es aquí donde el valor de la opción es el más importante. Es por ello que el modelo de Paddock, Siegel y Smith se centra en la valoración de las reservas sin desarrollar y en la decisión de cuándo desarrollar. A diferencia del ejemplo anterior, esta no es una opción americana perpetua porque los derechos de desarrollo generalmente caducan en algún momento del tiempo.

momento óptimo de pagar un costo hundido, I , a cambio de un proyecto con valor V , donde V sigue un proceso browniano geométrico—esto es, una dinámica lognormal—.

Paddock *et al.* parten por caracterizar el valor de una reserva ya desarrollada. El número de barriles de petróleo en la reserva está dado por B_t y V_t es el valor por barril de la reserva ya desarrollada. El retorno instantáneo, R_t , para el dueño de la reserva tiene dos componentes: el flujo de ganancias asociado a la producción y la ganancia de capital del petróleo remanente. A manera de aproximación, se asume que la producción de un pozo en explotación decae en forma exponencial:

$$dB_t = \omega B_t dt, \quad (44)$$

donde ω es la fracción de petróleo producido cada año. Por ello, el retorno R_t puede escribirse como:

$$R_t dt = \omega B_t \Pi_t dt + d(B_t V_t), \quad (45)$$

donde Π_t es la utilidad después de impuestos de producir y vender un barril de petróleo.

Se asume que la tasa de retorno de la reserva en explotación sigue un proceso browniano:

$$\frac{R_t dt}{B_t V_t} = \mu_v dt + \sigma_v dz, \quad (46)$$

donde μ_v es la tasa de retorno ajustada por riesgo exigida en un mercado de capitales competitivo. De las ecuaciones (45) y (46) se puede obtener la dinámica que sigue V_t , el valor por barril de la reserva bajo explotación:

$$dV = (\mu_v - \delta_t) V dt + \sigma_v V dz, \quad (47)$$

donde δ_t representa la tasa de ingreso por unidad de producir la reserva desarrollada, neta del desgaste del recurso (*depletion*), y está dada por:

$$\delta_t = \omega (\Pi_t - V_t) / V_t. \quad (48)$$

Dado que el costo de producción es pequeño—la mayor parte del costo de producción es costo hundido de desarrollo—y dado que el petróleo sólo puede ser extraído lentamente—típicamente, ω es alrededor de 10 por ciento por año—, $\Pi_t > V_t$. Ello implica que $\delta > 0$ y, por tanto, una vez que la reserva ha sido desarrollada, siempre se produce.

Una vez que se ha caracterizado la dinámica del valor de un pozo ya desarrollado, se procede a determinar el valor de una reserva sin desarrollar, así como el momento óptimo para su desarrollo. Sea $F(V, t)$ el valor de un barril de la reserva sin desarrollar. En virtud de (30) y (47), $F(V, t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{1}{2} \sigma_v^2 V^2 F_{VV} + [r - \delta] F_V - r F = -F_t. \quad (49)$$

Dado que la opción de desarrollar la reserva expira en T , su valor depende de la fecha corriente, t . La ecuación (49) debe ser resuelta sujeta a un conjunto de condiciones de borde:

$$F(0, t) = 0, \quad (50)$$

$$F(V, t) = \max [V_t - D, 0], \quad (51)$$

$$F(V^*, t) = V^* - D, \quad (52)$$

$$F_V(V^*, t) = 1, \quad (53)$$

donde D es el costo por barril de desarrollar la reserva—esto es, el precio de ejercicio de la opción—. La condición (51) establece que la opción sólo será ejercida en T si el valor marginal por barril desarrollado es superior a su costo marginal.

Dado que la ecuación (49) contiene el término F_t , ésta no puede ser resuelta analíticamente. Sin embargo, es posible encontrar una solución numérica mediante el método de diferencias finitas. La Figura 3 y la Tabla 3 presentan soluciones obtenidas por Siegel, Smith y Paddock (1987) para $\delta=0,04$ y una tasa libre de riesgo neta de impuestos, r ,

de 0,0125 y distintos valores de σ_v . Se estima que un rango razonable para este último parámetro se ubica entre 0,15 y 0,25 ¹³.

La Figura 3 ilustra el valor crítico V^*/D como una función del número de años restantes para la expiración de la opción de desarrollo para distintos valores de la volatilidad del valor del barril de la reserva ya desarrollada. Por la condición de borde (51), al momento de la expiración de la opción, T , la razón crítica, V^*/D , es igual a 1. Es decir, lo que dictaría la regla del valor presente neto. Sin embargo, esta razón aumenta a 2 ó más cuando la empresa puede esperar algunos años antes de iniciar el proceso de desarrollo. Como se ve en la Figura 3, la razón crítica no es demasiado sensible al número restante de años para la expiración de la opción cuando éste es mayor a 1 ó 2 años. Por lo tanto, una simplificación razonable es ignorar la fecha de vencimiento del derecho de desarrollo y tratar este caso como una opción americana perpetua. Bajo tal simplificación, el término F_t desaparece de la ecuación diferencial (49) y, por tanto, es posible encontrar una solución analítica como en el ejemplo de la sección anterior. En particular, la solución en dicho caso viene dada por:

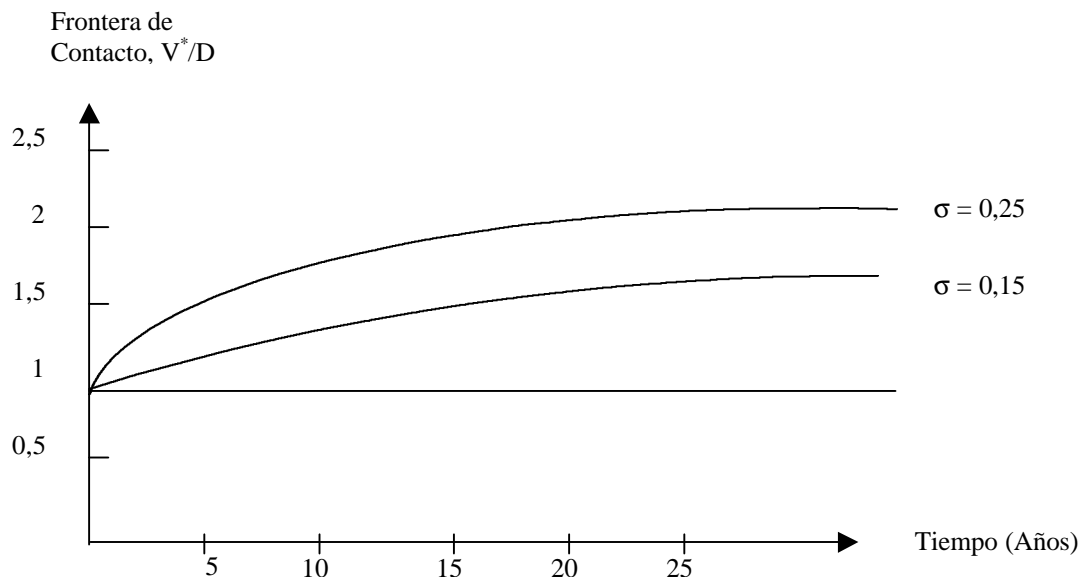
$$F(V) = AV^\beta, \quad (54)$$

donde

$$V^* = \frac{\beta}{\beta-1}D, \quad A = \frac{V^* - D}{V^{*\beta}} = \frac{(\beta-1)^{\beta-1}}{\beta^\beta D^{\beta-1}}, \quad \beta = \frac{1}{2} + \frac{\delta-r}{\sigma_v^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta-r}{\sigma_v^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma_v^2}}.$$

¹³ Este rango de valores ha sido obtenido en base a cifras históricas para un período de treinta años y pronósticos hechos por la industria.

Figura 3 Valor Crítico para el Desarrollo de la Reserva Petrolífera
($\delta=0,04$ y $r=0,0125$)



La Tabla 3 muestra el valor de la reserva sin desarrollar—el valor de la opción de desarrollo—por dólar de costo de desarrollo para $\sigma_v=0,142$ y $0,25$. Cuando $V/D < 1$, no desarrollamos la reserva petrolífera porque el valor de la reserva desarrollada es inferior al costo de desarrollo. Esto es, la opción está *out-of-the-money*. A la misma conclusión llegaríamos si aplicásemos la regla del VPN. Si $V/D > 1$ —la opción está *in-the-money*—la regla del VPN nos diría que debemos desarrollar la reserva. Sin embargo, tal decisión no es la correcta, a menos que V/D sea sustancialmente mayor a 1. Como se ve en la Figura 3, para valores de V/D mayores que 2, postergar la inversión no reporta ganancias significativas.

Tabla 3 Valores de la Opción por US\$1 de Costo de Desarrollo, F(V, t)/D

V/D	$\sigma_v=0,142$			$\sigma_v=0,25$	
	T=5	T=10	T=15	T=5	T=10
0,80	0,01810	0,02812	0,03309	0,07394	0,10392
0,85	0,02761	0,03894	0,04430	0,09174	0,12305
0,90	0,04024	0,05245	0,05803	0,11169	0,14390
0,95	0,05643	0,06899	0,07458	0,13380	0,16646
1,00	0,07661	0,08890	0,09431	0,15804	0,19071
1,05	0,10116	0,11253	0,11754	0,18438	0,21664
1,10	0,13042	0,14025	0,14464	0,21278	0,24424
1,15	0,16472	0,17242	0,17599	0,24321	0,27349

Fuente: Siegel, Smith y Paddock (1987).

La Tabla 3 muestra, además, la razón F(V, t)/D para diferentes valores de V/D. Cuando V/D=1, $\sigma_v=0,142$ y T=15, por ejemplo, el valor de la opción es aproximadamente 9,4 centavos de dólar de costo de desarrollo. A fin de ilustrar el uso de estos resultados, Siegel, Smith y Paddock (1987) consideran una reserva sin desarrollar que, de ser desarrollada, podría producir 100 millones de barriles de petróleo. El plazo para desarrollar dicha reserva es de 10 años. Se asume que el valor de la reserva desarrollada es de US\$12 por barril, δ —la tasa de ingreso por unidad de producir la reserva desarrollada neta del desgaste del recurso—es de 4 por ciento, el desarrollo de la reserva lleva tres años y que el valor presente del costo de desarrollo es de US\$11,79 por barril.

Para calcular el valor presente de la reserva desarrollada, V' , se hace uso de que la tasa de descuento apropiada es $\delta=0,04=\mu-(\mu-\delta)$. Dado que lleva tres años el desarrollo de la reserva, $V'=e^{-0,12} \times \text{US\$}12=\text{US\$}10,64$. De lo anterior, $V'/D=\text{US\$}10,64/\text{US\$}11,79=0,9$. Dado que esta razón es menor que 1, la opción está *out-of-the-money*. Suponiendo $\sigma_v=0,142$ y en base a la Tabla 3, vemos que el valor de la opción por dólar de costo de desarrollo es de 0,05245 (T=10 años). El costo total de desarrollo es de US\$1.179 millones. Por lo tanto, el valor de la reserva sin desarrollar es de $0,05245 \times \text{US\$}1.179$

millones=US\$61,84 millones. En consecuencia, vemos que, aunque actualmente no sea rentable desarrollar la reserva petrolífera, ésta vale aproximadamente US\$62 millones debido a su valor de opción. Dicho valor aumentaría aún más si el mercado percibiera un incremento en la volatilidad del precio del petróleo. Por ejemplo, si σ_v aumentara a 0,25, el valor de la reserva sin desarrollar aumentaría a $0,1439 \times \text{US\$}1.179 \text{ millones} = \text{US\$}169,66 \text{ millones}$.

Otra referencia clásica en el tema de evaluación de proyectos de inversión en recursos naturales mediante la teoría de opciones es el trabajo de Brennan y Schwartz (1985). Asimismo, ejemplos del uso del instrumental de opciones reales para determinar el momento óptimo de explotación de un bosque son Clarke y Reed (1989), Reed y Clarke (1990) y Reed (1993). Trigeorgis (1996) presenta un completo tratamiento del área de opciones reales.

Un área interesante para investigación futura es la aplicación de la teoría de opciones reales a los procesos de concesiones privadas o privatizaciones de empresas de servicio público, particularmente en Latinoamérica. Existe una vasta literatura en el campo de la organización industrial que trata con el tema de las licitaciones (por ejemplo, McAfee, 1998; McAfee y McMillan, 1987). Un fenómeno ampliamente reportado es el de la “maldición” del ganador (*the winner's curse*) (ver, por ejemplo, Neeman y Orosel, 1999). Esto es, es posible que se produzca una sobrevaloración del bien o recurso a ser adjudicado por parte del comprador que gana la licitación. El uso de la teoría de opciones en lugar de reglas de valoración convencionales, tales como el VPN y la tasa interna de retorno (TIR),

podría eliminar dicho efecto. Ello, en todo caso, es un punto que merece mayor elaboración¹⁴.

VI Comentarios Finales

Como hemos visto, el trabajo de Black y Scholes ha dado fruto a todo un campo de investigación en el área de finanzas, en el cual académicos como Merton, Rubinstein, Cox y Hull han participado activamente. La alta complejidad matemática requerida para el desarrollo de estos modelos, no obstante, ha hecho que la gran mayoría de los investigadores en esta área sean físicos, matemáticos y estadísticos¹⁵. En la actualidad, aún fuera del campo académico, la demanda por profesionales con una alta formación matemática es requerida por importantes bancas de inversión de *Wall Street* para trabajar en la confección y valorización de instrumentos derivados.

En Chile aún no contamos con un mercado financiero formal en que se transen derivados. Sin embargo, se anunció hace unos meses atrás que se está trabajando en las modificaciones al reglamento de la Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras necesarias para la puesta en marcha de la cotización de derivados en el mercado financiero local. En principio, las instituciones financieras podrían efectuar transacciones en futuros de tasas de interés. Quizás no esté tan lejano el momento en que la teoría de opciones desarrollada en los últimos 25 años trascienda el campo meramente académico y comience a ser utilizada por profesionales chilenos activamente, no sólo en el ámbito financiero sino también en el área de la evaluación de proyectos de inversión.

¹⁴ Agradezco a uno de los árbitros por sugerirme esta potencial extensión.

Referencias

Acworth, P. y M. Broadie y P. Glasserman (1996), “A Comparison of Some Monte Carlo and Quasi Montecarlo Techniques for Option Pricing”, en *Monte Carlo and Quasi Monte Carlo Methods*, H. Niederreiter, P. Hellekalek, G. Larcher, P. Zinterhof, editores. Lecture Notes in Statistics, Springer, volumen 127, páginas 1-18.

Åt-Sahalia, Y. (1996a), “Non-parametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities” en *Econometrica*, Vol. 64, No. 3 mayo, páginas 527-560.

_____,(1996b), “Testing Continuous-time Models of the Spot Interest Rate” en *The Review of Financial Studies*, Vol. 9, No. 2, páginas 385-426.

Amin, K. y V. Ng (1997), “Inferring Future Volatility from the Information in Implied Volatility in Eurodollar Options: A New Approach” en *The Review of Financial Studies* 10 (2), verano, páginas 333-67.

Bharadia, M., N. Christofides y G. Salkin (1995), “Computing the Black-Scholes Implied Volatility: Generalization of a Simple Formula”, en *Advances in Futures and Options Research*, P. Boyle, F. Longstaff, P. Ritcher, editores. Volumen 8. Greenwich, Conn. y Londres: JAI Press, páginas 15-29.

Baxter, M. y A. Rennie (1996), *Financial Calculus*. Cambridge University Press.

Black, F. y M. Scholes (1973), “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” en *Journal of Political Economy*, 81(3), mayo-junio, páginas 637-54.

Boness, A. J. (1964), “Elements of a Theory of Stock-Option Values” en *Journal of Political Economy* 72, abril, páginas 163-75.

¹⁵ De hecho, Black era un matemático que murió antes de recibir un merecido reconocimiento por su trabajo conjunto con Scholes.

Brennan M. y E. Schwartz (1985), "Evaluating Natural Resource Investments" en *Journal of Business*, vol. 58, No. 2, páginas 135-157.

Clarke, H. y W. Reed (1989), "The Tree-Cutting Problem in a Stochastic Environment" en *Journal of Economic Dynamics and Control* 13, páginas 569-595.

Cox J., S. Ross y M. Rubinstein (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach" en *Journal of Financial Economics* 7, páginas 229-263.

_____, J. Ingersoll, Jr., y S. A. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates" en *Econometrica* 53, páginas 385-467.

Chan, K.C., A. Karolyi, F. A. Longstaff, y A. B. Sanders (1992), "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-term Interest Rate" en *The Journal of Finance*, vol. XLVII, No. 3, julio, páginas 1209-1227.

Chu, S. y S. Freund (1996), "Volatility Estimation for Stock Index Options: A GARCH approach" en *Quarterly Review of Economics and Finance* 36(4), invierno, páginas 431-50.

Derman, E. y I. Kani (1994a), "The Volatility Smile and Its Implied Tree". Quantitative Strategies Research Notes (Goldman Sachs, New York).

_____ (1994b), "Riding on the Smile" en *Risk* 7, páginas 32-39.

Dixit, A. y R. S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Dumas, B., J. Fleming y R. Whaley (1998), "Implied Volatility Functions: Empirical Tests" en *The Journal of Finance* 53(6), páginas 2059-2106.

Dupire, B. (1994), "Pricing with a Smile". *Risk* 7, páginas 18-20.

Engle, R.F. (1995), editor, *ARCH Selected Readings*. Oxford University Press.

Fernández, P. (1996), *Opciones, Futuros e Instrumentos Derivados*. Ediciones Deusto.

Fernández, V. (1999a), Valorización de Derivados. Trabajo Docente No. 64, abril. Instituto de Economía, Pontificia Universidad Católica de Chile.

_____ (1999b), “Estructura de Tasas de Interés en Chile: La Vía No-Paramétrica” en Cuadernos de Economía 36, No. 109, diciembre, por aparecer.

Figlewski, S., W. Silber y M. Subrahmanyam (1990), editores, *Financial Options: From Theory to Practice*. McGraw Hill.

Geske, R. (1979), “The Valuation of Compound Options” en *Journal of Financial Economics* 7, páginas 63-81.

Gong, F. F. and E. M. Remolona (1997), “A Three-factor Econometric Model of the U.S. Term Structure” en *Federal Reserve Bank of New York, Staff Reports*, 19.

Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*. Princeton University Press.

Heath, D., R. Jarrow y A. Morton (1992), “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology” en *Econometrica* 60(1), páginas 77-105.

Herzel, S. (1998), “A Simple Model for Option Pricing with Jumping Stochastic Volatility” en *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 1 (4), octubre, páginas 487-505.

Ho, T. S. and S. B. Lee (1986), “Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims” en *The Journal of Finance* 41, páginas 1011-1029.

Hull, J (1997), *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall, tercera edición.

_____ y A. White (1992), “Extensions of the Binomial Tree Approach for Valuing Path-Dependent Options”, Working Paper. University of Toronto.

_____ (1987), “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities” en *Journal of Finance* 42, junio, páginas 281-300.

Jarrow, R. y A. Rudd (1982), "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes" en *Journal of Financial Economics* 10, páginas 347-369.

_____ y J. Wiggins (1989), "Option Pricing and Implicit Volatilities" en *Journal of Economic Surveys* 3(1), páginas 59-81.

Jiang, G. (1998), "Non-parametric Modeling of U.S. Interest Rate Term Structure Dynamics and Implications on the Prices of Derivative Securities" en *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 33, No. 4, diciembre, páginas 465-497.

Karolyi, G. A. (1993), "A Bayesian Approach to Modeling Stock Return Volatility for Option Valuation" en *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28 (4), diciembre, páginas 579-94.

Kemna, A. y A. Vorst (1990), "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values" en *Journal of Banking and Finance* 14, páginas 113-29.

Li, J. (1999), "Quasi-Monte Carlo Algorithm for Pricing Options". Working paper, Department of Mathematics and Statistics, Pennsylvania State University, University Park.

Longstaff, F. A. y E. S. Schwartz (1992), "The Interest Rate Volatility and the Term Structure: a Two-factor General Equilibrium Model", en *The Journal of Finance*, vol. XLVII, No. 3, julio, páginas 1259-1282.

McAfee, R. (1998), "Four Issues in Auctions and Market Design" en *Revista de Análisis Económico* 13 (1), junio, páginas 7-24.

McAfee R. y J. McMillan (1987) "Auctions and Bidding" en *The Journal of Economic Literature* 25(2), junio, páginas 699-738.

McDonald, R. y D. Siegel (1986), "The Value of Waiting to Invest" en *Quarterly Journal of Economics* 101 (noviembre), páginas 707-728.

Merton, R. (1998), “Applications of Option-Pricing Theory: Twenty-Five Years Later” en *The American Economic Review*, volumen 88 (3), junio, páginas 323-49.

_____ (1976) “Option Pricing when Underlying Returns are Discontinuous” en *Journal of Financial Economics* 3, marzo, páginas 125-144.

_____ (1973), “Theory of Rational Option Pricing” en *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, primavera, 141-83.

Naik, V. y M. Lee (1990), “General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns” en *The Review of Financial Studies* Vol. 3, No. 4, páginas 493-521.

Neeman, Z. y G. Orosel (1999), “Herding and the Winner's Curse in Markets with Sequential Bids” en *The Journal of Economic Theory* 85(1), marzo, páginas 91-121.

Paddock, J., D. Siegel y J. Smith (1988), “Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases” en *Quarterly Journal of Economics* 103, agosto, páginas 479-508.

Parisi, F (1998), “Tasas de Interés Nominal de Corto Plazo en Chile: Una Comparación Empírica de sus Modelos” en *Cuadernos de Economía* 35, No. 105 (agosto), páginas 161-182.

Reed, W. (1993), “The Decision to Conserve or Harvest Old-Growth Forest” en *Ecological Economics* 8, 45-69.

_____ y H. Clarke (1990), Harvest Decisions and Asset Valuation for Biological Resources Exhibiting Size-Dependent Stochastic Growth” en *International Economic Review*, febrero, páginas 147-168.

Roll, R. (1977), “An Analytical Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends” en *Journal of Financial Economics* 5, páginas 251-258.

Rubinstein, M. (1991), “Pay Now, Choose Later” en *Risk*, Febrero.

_____ (1994), “Implied Binomial Trees” en *The Journal of Finance* 49, páginas 771-818.

Sick, G. (1995), “Real Options”, en “*Handbooks in Operational Research and Management Science*”, volumen 9, páginas 631-691. R. Jarrow et al., editores., Elsevier Science.

Siegel, D., J. Smith y J. Paddock (1987), “Valuing Offshore Oil Properties with Option Pricing Models”, en *Midland Corporate Finance Journal* 5, primavera páginas 22-30.

Stanton, R. (1997), “A Non-parametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk” en *The Journal of Finance*, vol. LII, No. 5, diciembre, páginas 1973-2001.

Trigeorgis L. (1996), *Real Options*. The MIT Press.

Tuckman, B. (1995), *Fixed Income Securities: Tools for Today's Market*. John Wiley & Sons, Inc.

Vasicek, O. A. (1977), “An Equilibrium Characterization of the Term Structure” en *Journal of Financial Economics* 5, páginas 177-188.

Whaley, R. (1981), “On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends” en *Journal of Financial Economics* 9, páginas 207-211.

Willmott, P., S. Howison, y J. Dewynne (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives. A Student Introduction*. Cambridge University Press.