

---

# MODELO APLICADO DE TEORÍA DE JUEGOS PARA EL ESTUDIO DEL CRIMEN EN LA VÍA PÚBLICA

---

JOSE L. LOBATO\*  
RICHARD WEBER\*  
NICOLÁS FIGUEROA\*

## Resumen

En este trabajo se plantea un modelo de teoría de juegos que emula la interacción entre criminales y policías en la vía pública. El modelo se basa en teoría de juegos en una red de transporte, en donde las rutas de la red simulan a las opciones de delitos disponibles y los flujos a los criminales, los cuales pueden actuar organizada o desorganizadamente. El juego supone efectos de congestión en las rutas tanto por un aumento de flujo (criminales) o por la asignación de recursos policiales. Adicionalmente, se plantea una metodología genérica de aplicación del modelo. Esta consta de cinco pasos la cual finaliza con una sugerencia de asignación de recursos policiales bajo criterios de optimalidad. Los pasos metodológicos proveen de flexibilidad de modelamiento, lo que permite que la aplicación del modelo pueda ser altamente ajustable a diferentes problemáticas. La metodología fue probada utilizando datos reales de denuncias de delitos de la Región Metropolitana. Además, se realiza un análisis de robustez de la metodología planteando diferentes escenarios de modelación. Los resultados se analizaron en base a los parámetros de calibración del modelo y a los resultados de las asignaciones óptimas de recursos policiales. En todos los escenarios, se muestran mejoras teóricas significativas en la asignación de recursos policiales, lo cual sugiere que es posible incorporar modelos de esta naturaleza en el rol de disuasión del crimen que tengan resultados potencialmente efectivos.

**Palabras Clave:** Crimen, Teoría de Juegos, Selfish Routing

---

\*Departamento Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

---

## 1. Introducción

---

El estudio del crimen visto como un fenómeno social es llamado en las ciencias sociales *criminología*. En general, sus estudios involucran diversas disciplinas como sociología, matemáticas y economía entre otras y por lo tanto, consideran tanto elementos cualitativos como cuantitativos.

En el marco de la criminología cuantitativa, las primeras investigaciones comenzaron desde el ámbito de la estadística. Estos estudios se enfocaron en encontrar patrones de comportamiento de los criminales. En la actualidad, los modelos cuantitativos se han expandido hacia múltiples áreas y han aprovechando los avances teóricos y tecnológicos para el análisis del fenómeno. Destaca el uso de minería de datos y simulación para el descubrimiento complejo de patrones de comportamiento criminal<sup>1</sup> y el uso de teoría de juegos para modelar la interacción de agentes involucrados en el crimen. Sin embargo, estas disciplina mencionadas aportan sólo desde sus propias ópticas de resultados y pocas veces se integran para complementarse.

En el presente artículo, se propone un enfoque innovador del estudio del crimen, visto como un fenómeno de interacción entre individuos criminales y policiales. En particular, se plantea un modelo de teoría de juegos que simula dicha interacción y una metodología de carácter genérica para llevar a la aplicación el modelo. Luego, este trabajo se lleva a la práctica utilizando datos reales de denuncias de delitos.

Gracias al enfoque de modelación, el estudio aporta no solo a un mejor entendimiento del fenómeno del crimen, sino que también provee de sugerencias de accionar policial bajo criterios de optimalidad. Del mismo modo, la metodología de aplicación del modelo permite un alto grado de flexibilidad en las decisiones, lo que permite poder ser adaptado a múltiples escenarios de trabajo.

El artículo se organiza de la siguiente forma: el capítulo 2 presenta una breve revisión bibliográfica de importantes estudios cuantitativos del crimen. El capítulo 3 presenta el modelo teórico de éste trabajo y su metodología de aplicación. El capítulo 4 muestra los resultados obtenidos al utilizar la metodología de aplicación con datos reales. Finalmente, las conclusiones y trabajos futuros son presentados en el capítulo 5.

---

<sup>1</sup>Ver por ejemplo <http://paleo.sscnet.ucla.edu/ucmasc.htm>

---

## 2. Estudios Cuantitativos del Crimen

---

### 2.1. La Economía y el Crimen

Uno de los teóricos más influyentes en la criminología contemporánea es Gary Becker, quien en su ensayo *“Crime and Punishment: An Economic Approach”* [1], rompe con el paradigma que sostenía que el acto criminal era una acción cometida por personas socialmente oprimidas o mentalmente enfermas.

En sus estudios, se asume que los criminales son agentes racionales y que poseen una función de utilidad que desean maximizar. Los factores que influyen en la acción de delinquir son entre otras cosas, la probabilidad de ser atrapado, el castigo potencial que recibirían y las otras opciones de actividades que tienen disponibles.

Según Becker, la principal contribución de su ensayo es la demostración de que las políticas óptimas para combatir el comportamiento ilegal son parte de una decisión eficiente de asignación de recursos. En su estudio utiliza la teoría económica clásica, en donde existen múltiples modelos para la asignación eficiente de recursos, pero agregando a tales modelos, aspectos particulares del fenómeno del crimen (*e.g.* el castigo) los cuales son elementos no monetarios que afectan los costos que enfrenta la sociedad.

### 2.2. Teoría de Juegos y Criminalidad

La teoría de juegos posee un razonamiento analítico altamente aplicable al fenómeno criminal puesto que en todo delito coexisten al menos dos agentes con intereses contrapuestos (*e.g.* el criminal y la víctima). El desarrollo profundo de estos modelos comienza en los años 90 y destacan los juegos de inspección, estudios de relaciones sociales y de comportamiento terrorista [9].

Por ejemplo, el juego de inspección más básico proviene del modelo de George Tsebelis [16], quién plantea que existen infractores en potencia que podrían ser disuadidos mediante la aplicación de una multa. La medida busca aumentar los costos para aquellos quienes infringen la ley, pero al mismo tiempo se generan costos asociados al hecho de aplicar la multa. Paradójicamente, los resultados obtenidos de la interacción (equilibrio de Nash) muestran que la aplicación de una multa no tienen ningún efecto sobre el comportamiento del potencial infractor.

La gran mayoría de los modelos de teoría de juegos no llegan a una aplicación real, puesto que son complejos de manipular y resolver. A pesar de ello, algunos modelos han logrado ser aplicados con éxito en situaciones reales. Un trabajo reciente se llevó a cabo en el aeropuerto de Los Ángeles (LAX) [12],

en donde mediante un sistema computacional en base a un modelo de Stackelberg, se determina eficientemente cuáles puntos de monitoreo del aeropuerto deben ser abiertos cada día y hora de manera de que los criminales no detecten el patrón de comportamiento de seguridad.

### 2.3. Minería de Datos para el Estudio del Crimen

Múltiples técnicas de minería de datos han sido utilizadas en criminología con este fin, incluyéndose tanto modelos supervisados como no supervisados. Los principales han sido modelos de predicción, clustering y clasificación.

La predicción del crimen se ha usado como cualquier problemática en donde se tiene datos en una serie de tiempo. La técnica más utilizada para esto son las redes neuronales [4] en reemplazo de técnicas de series de tiempo tradicionales. Las series de datos que usualmente se manejan en criminología son a nivel de denuncias de delitos. La técnica se basa en la hipótesis de la existencia de patrones de comportamiento de los criminales, como por ejemplo el aumento de robos en la vía pública el día de pago de salarios.

La utilización de clustering en el crimen se ha usado de muchas maneras. La más utilizada es la identificación de *hot-spots* (imagen 1 [3]), la cual se realiza mediante algoritmos de análisis de densidad de puntos para formar los clusters [4]. Otra técnica de clustering que se ha empleado es el análisis del crimen es el algoritmo *k-medias*. En particular, se ha utilizado para identificar distintos tipos de delitos que a simple vista parecen ser los mismos, pero que en realidad pueden ser diferenciados si se agrupan apropiadamente [11].

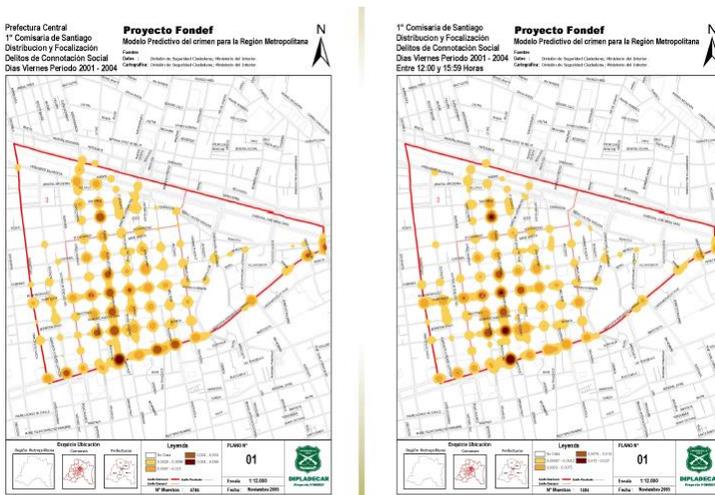


Figura 1: *Hot-spots* en el Centro de Santiago.

Las técnicas de clasificación en general se han utilizado para los crímenes “de cuello blanco”, en donde la expresión se utiliza para los delitos cometidos por personas de nivel socioeconómico alto, en el cuadro de sus actividades

profesionales y con el objetivo de llegar a una ganancia más importante. Ejemplos de estos delitos son el blanqueo de dinero, falsificación de dinero y estafas en general. Su objetivo es identificar de la manera más certera posible cuáles montos de dineros en transacciones son ilícitas.

## 2.4. La Criminalidad y la Computación

La computación cada vez se vuelve más indispensable en el trabajo contra la criminalidad. Su aporte ha sido en el almacenamiento y procesamiento de información entre otras cosas.

Además, la computación ha permitido también el desarrollo de herramientas de simulación, lo que consiste en la emulación de situaciones reales, con el objetivo de observar virtualmente fenómenos y evitar experimentos en la vida real. En la criminología actual, esta técnica se ha convertido en una herramienta crucial, ya que permite crear laboratorios en donde se simulan situaciones de crimen y no se compromete la integridad de las personas y evita cuestiones éticas o morales.

Una de las técnicas de simulación que más se está usando en esta materia son los *agent based models* (modelos basados en agentes) [8]. Estos modelos combinan elementos de teoría de juegos, ecuaciones diferenciales y sistemas complejos. La base de estos modelos es la construcción de agentes definidos por una serie de características, que se relacionan con otros individuos y con el medio. Ejemplos de estos sistemas se han empleado para el estudio dinámico de *hot-spots* bajo distintos escenarios [17] y evoluciones de sistemas reveladores de patrones de crimen [6].

---

## 3. Modelo de Interacción entre Criminales y la Policía

---

### 3.1. Definición del Juego

El modelo que interacción entre criminales y la policía se contextualiza bajo los concepto de teoría de juegos. A continuación se definen los supuestos y elementos que enmarcan este trabajo:

**1. Agentes:** Criminales y la policía. Los criminales se definen como una masa continua de agentes y la policía como un agente que controla un conjunto continuo de recursos.

**2. Estrategias:** Las estrategias de los criminales se definen como las opciones de delitos disponibles. Estas pueden ser por ejemplo, elecciones de delinquir según áreas geográficas, tipos de delitos, momentos del día o combinaciones de

éstas. La estrategia de la policía es distribuir sus recursos sobre las opciones de delito de manera de dificultar a los criminales a que los efectúen.

**3. Utilidades de los agentes:** Los criminales obtienen un beneficio por delinquir en alguna de las opciones. La policía obtiene un beneficio por prevenir el crimen.

**4. Supuestos del Juego:** Congestión, actuar criminal y secuencialidad de las decisiones.

**Congestión:** Las opciones de crimen se tornan menos atractivas a medida que más criminales las escogen. Es decir, se produce un efecto de congestión entre los criminales. Los recursos policiales también provocan un efecto de congestión sobre las opciones de delito. En otras palabras, las estrategias se congestionan ya sea porque más criminales las escogen o porque hay recursos policiales asignados.

**Actuar Criminal:** Se debe definir *a priori* si los criminales actúan como agentes organizados o desorganizados, es decir, si maximizan el bienestar común o cada uno de ellos maximiza su propio bienestar<sup>2</sup>.

**Secuencialidad de las decisiones:** Los agentes no deciden sus estrategias simultáneamente. Primero lo hace la policía enunciando su distribución de recursos sobre las opciones de delito y luego los criminales actúan óptimamente de acuerdo a aquella distribución.

### 3.2. El Modelo Teórico

En base a los elementos planteados anteriormente, el modelo que se plantea es en base a un grafo. En detalle, el modelo está compuesto por un nodo fuente, un nodo demanda y  $E$  arcos que los conectan, con funciones de costos asociadas  $c_e$  con  $e \in E$  (ver figura 2). A continuación, se presenta la relación entre los elementos del crimen definidos anteriormente y el modelo de grafos.

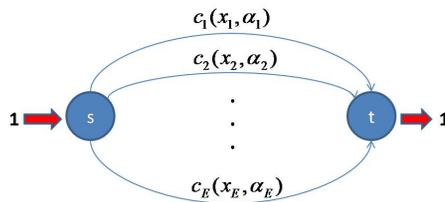


Figura 2: Grafo de elecciones criminales.

1. Los arcos representan las estrategias de los criminales (opciones de crimen).

2. Los flujos factibles a través de la red representan la cantidad de criminales que escogen cada una de las estrategias.

<sup>2</sup>Entiéndase bienestar por la utilidad que reciben los criminales por delinquir

3. La tasa de tráfico es unitaria, lo que se interpreta como que la cantidad de criminales que atraviesan el grafo es 1 (cada criminal representa una parte infinitesimal de flujo).

4. Las utilidades de los criminales son vistas como los costos asociados a cada arco. Es decir, los criminales en vez de maximizar su utilidad, minimizan su costo de viaje a través de la red.

5. La distribución de flujo resultante debido a los efectos de congestión, se supone que es una situación de equilibrio de Wardrop<sup>3</sup> o un flujo a costo mínimo, dependiendo si se considera el comportamiento de los criminales no organizado u organizado respectivamente.

6. Los recursos policiales modifican las funciones de costos aumentando su valor, lo cual afecta en la congestión de cada arco. Se considera que se cuenta con una unidad de recursos policiales que se distribuyen en las estrategias.

Lo cual, matemáticamente se formaliza con una instancia  $(G, d, c)$  que se especifica como sigue:

- **Grafo:**  $G = (V, E)$  es un grafo dirigido donde  $V = \{s, t\}$  representa a los vértices *fuerza* y *demanda* ( $s$  y  $t$  respectivamente).
- **Arcos:** Todos los arcos  $e \in E = \{1, \dots, E\}$  están conectados desde  $s$  a  $t$  y se denotan como  $(s, t)_e \quad \forall e \in E$ .
- **Tasa de tráfico:**  $d = 1$ .
- **Función de costos:**  $c_e \quad \forall e \in E$ , funciones continuas, no negativas y no decrecientes.
- $G$  posee un sólo *commodity*, el cual es representado por los flujos  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_E]^t$ .

Y la secuencia de interacción entre entre los criminales y la policía, en el contexto de la formulación como grafo, se explica en los siguientes pasos:

### 1. Estrategia Policial

La policía distribuye su unidad de recursos sobre las opciones de crimen de manera de modificar el valor de las funciones de costos. Se denota  $\vec{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_E]^t$  a los recursos policiales y  $\sum_{e \in E} \alpha_e = 1$ , donde  $\alpha_e$  es la cantidad de recursos asignados a la estrategia  $e$ .

Se le llama  $\vec{\alpha}^*$  a la asignación de recursos escogida *ex-ante*. Entonces, las funciones de costo quedan definidas por  $c_e(x_e, \alpha_e^*) \quad \forall e \in E$ .

Además, para cumplir con el efecto de congestión provocado por la policía, se debe satisfacer que  $\frac{\partial c(x, \alpha)}{\partial \alpha} \geq 0$ , pues a mayor cantidad de recursos policiales en un arco, mayor es el costo de atravesarlo.

<sup>3</sup>Un flujo es un *Equilibrio de Wardrop* (flujo de Nash) si ningún agente puede mejorar su costo total cambiando su ruta.

## 2. Estrategia Criminal

**Criminales desorganizados:** Dada la distribución de recursos policiales, los criminales escogen individualmente la manera de minimizar su costo del viaje a través del grafo. Esto conlleva a un flujo en equilibrio de Wardrop para  $(G, d, c)$ , el cual se alcanza cuando se iguala el costos de todos los arcos con flujo positivo. Esto se formaliza como sigue:

*Equilibrio de Wardrop en Modelo de Crimen:* Sea la instancia  $(G, d, c)^{crimen}$  con funciones de costos  $c_e(x_e, \alpha_e^*) \quad \forall e \in E$  donde  $\sum_{e \in E} \alpha_e^* = 1$ .

El flujo  $\vec{x}^*$  es un equilibrio de Wardrop si se cumplen los siguientes puntos:

- $c_e(x_e^*, \alpha_e^*) = C \quad \forall e \in E$  tal que  $x_e^* > 0$ .
- $c_e(x_e^*, \alpha_e^*) \geq C \quad \forall e \in E$  tal que  $x_e^* = 0$ .

Para algún  $C > 0$ .

**Criminales organizados:** El flujo resultante se obtiene de la minimización del costo grafo. Es decir,  $\vec{x}^*$  es el flujo a costo mínimo si y sólo si:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} x_e^* \cdot c_e(x_e^*, \alpha_e^*) &= \min_{\vec{x}} \sum_{e \in E} x_e \cdot c_e(x_e, \alpha_e^*) \\ \text{s.a.} \quad \sum_{e \in E} x_e &= 1 \\ x_e &\geq 0 \quad \forall e \in E \end{aligned} \tag{1}$$

### 3.2.1. Estrategia Policial Óptima

Hasta ahora, el modelo planteado no supone que la policía actúa de manera óptima en la distribución de sus recursos. En esta sección se define la formulación matemática que representa la estrategia óptima de la policía tanto en situaciones de criminales organizados o desorganizados.

Para obtener este propósito, se quiere maximizar el costo social de los criminales. Esto se obtiene asignando los recursos de manera de maximizar el costo del grafo a sabiendas de la actuación criminal posterior.

Si los criminales actuaran de forma desorganizada, la estrategia óptima de la policía sería maximizar el costo del grafo sujeto a que los criminales alcanzarán posteriormente el equilibrio de Wardrop, es decir:

$$\begin{aligned}
 & \max_{\vec{\alpha}, \vec{x}, \vec{y}, C} \sum_{e \in E} x_e \cdot c_e(x_e, \alpha_e) \\
 \text{s.a.} \quad & c_e(x_e, \alpha_e) \geq C \quad \forall e \in E \\
 & c_e(x_e, \alpha_e) - (1 - y_e) \cdot M \leq C \quad \forall e \in E \\
 & x_e \leq y_e \quad \forall e \in E \\
 & \sum_{e \in E} x_e = 1 \\
 & \sum_{e \in E} \alpha_e = 1 \\
 & C > 0 \\
 & x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \\
 & \alpha_e \geq 0 \quad \forall e \in E \\
 & y_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E
 \end{aligned} \tag{2}$$

Donde  $M \gg 0$  y las variables binarias  $y_e \quad \forall e \in E$  obligan a que los costos se iguales sólo sobre los arcos ocupados.

Cabe destacar que la formulación anterior puede ser altamente compleja de resolver ya que el problema tiene funciones de costos no lineales y presenta variables del tipo continuas y binarias. No obstante, ésta puede ser simplificada si se agregan condiciones sobre las funciones de costos.

En particular, si  $c_e(0, \alpha_e) = c_1(0, \alpha_1)$  y  $\frac{\partial c_e(x_e, \alpha_e)}{\partial x_e} > 0 \quad \forall e \in E$  (todas las funciones de costos tienen el mismo punto de origen y son estrictamente crecientes), todos los arcos en equilibrio tienen un valor positivo y en consecuencia, la formulación 2 se simplifica al siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 & \max_{\vec{\alpha}, \vec{x}, \vec{y}, C} \sum_{e \in E} x_e \cdot c_e(x_e, \alpha_e) \\
 \text{s.a.} \quad & c_e(x_e, \alpha_e) = C \quad \forall e \in E \\
 & \sum_{e \in E} x_e = 1 \\
 & \sum_{e \in E} \alpha_e = 1 \\
 & C > 0 \\
 & x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \\
 & \alpha_e \geq 0 \quad \forall e \in E
 \end{aligned} \tag{3}$$

Lo que es equivalente a que el resultado de la formulación 2 se cumpla que  $y_e^* = 1 \quad \forall e \in E$ . Es decir, en el óptimo todos los arcos del grafo son utilizados ( $x_e^* > 0 \quad \forall e \in E$ )<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Demostración en [7]

Finalmente, si los criminales actuaran organizadamente, la estrategia óptima de la policía estaría dada por la maximización del costo mínimo del grafo:

$$\begin{aligned}
 & \underset{\vec{\alpha}}{\text{máx}} \underset{\vec{x}}{\text{mín}} \sum_{e \in E} x_e \cdot c_e(x_e, \alpha_e) \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{e \in E} x_e = 1 \\
 & \quad \sum_{e \in E} \alpha_e = 1 \\
 & \quad x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \\
 & \quad \alpha_e \geq 0 \quad \forall e \in E
 \end{aligned} \tag{4}$$

Las tres formulaciones anteriores entregan los valores óptimos  $\vec{\alpha}^*$  de recursos policiales y los flujos de criminales  $\vec{x}^*$  como mejor respuesta a dicha distribución de recursos.

### 3.3. Metodología de Aplicación

Anteriormente se plantea el modelo teórico que explica la interacción entre los criminales y la policía usando un enfoque de redes. En esta sección, se presenta una metodología genérica para aplicar tal modelo a situaciones reales.

A continuación, se describe en detalle la metodología de aplicación del modelo, ésta consta de cinco pasos y son enumerados en lo que sigue:

1. Selección de datos.
2. Construcción de estrategias.
3. Selección de funciones de costos.
4. Calibración del modelo.
5. Cálculo de la estrategia óptima de recursos policiales.

#### 1. Selección de datos

**Datos de información criminal:** El primer paso de la metodología, es establecer una selección de datos relacionados con el comportamiento criminal que se adecúen de la mejor manera posible a los supuestos del modelo teórico. Para ello, se deben considerar elementos del tipo espacial, temporal y del tipo de crímenes seleccionados, de manera de mantener una homogeneidad en los datos y minimizar sesgos de comportamiento de los criminales.

**Datos de información policial:** Los datos de recursos policiales deben ser relacionados con la información de delitos y que proporcionen información respecto a los esfuerzos que se toman para la disuasión del crimen. Esto quiere decir que ésta información debe poder ser asociada a las mismas zonas

geográficas e intervalos temporales que se seleccionaron para la información criminal.

## 2. Construcción de estrategias

Una estrategia de delito puede ser vista como una combinación de múltiples variables que escoge un criminal al momento de delinquir (*e.g.* día de la semana, hora, lugar y tipo de delito). Entonces, luego de realizar una adecuada selección de datos, debe decidirse cómo se utilizarán estos datos para la construcción de las estrategias de manera de incluir al mismo tiempo la multiplicidad de variables.

Para ello, en esta metodología se propone utilizar métodos de clasificación mediante clustering. Así, se asume que existen patrones “escondidos” en los datos de modo que puedan ser clasificados en base a similitudes subyacentes. De esta manera, cada cluster y su magnitud representarán respectivamente, una estrategia de delito y la intensidad (proporción de criminales) con la que fue escogida.

## 3. Selección de funciones de costos

Luego de que se tienen seleccionadas las estrategias, se escogen las funciones de costos para los arcos de manera de modelar el efecto de congestión producido por los criminales y por los recursos policiales. Para esto, se imponen tres condiciones que deben satisfacer las funciones de costos:

**1. Función no decreciente:**  $\frac{\partial c(x,\alpha)}{\partial x} \geq 0$ . A mayor número de criminales, mayor es el costo que paga cada uno de ellos.

**2. Función convexa:**  $\frac{\partial^2 c(x,\alpha)}{\partial x^2} \geq 0$ . Congestión por efecto de mayor cantidad de criminales.

**3. Efecto policial :**  $\frac{\partial c(x,\alpha)}{\partial \alpha} \geq 0$ . Incremento del costo al aumentar los recursos policiales.

## 4. Calibración del modelo

La calibración del modelo consiste en determinar los parámetros de las funciones de costos que mejor se ajusten a los datos. Para este objetivo, se debe utilizar toda la información disponible de los pasos previos: los datos de información criminal y policial, las estrategias definidas y las funciones de costos.

Existen múltiples métodos de calibración de parámetros, sin embargo para ésta problemática, cualquiera sea el escogido, éste debe considerar la unidad de tiempo en la cual se asume la existencia de un equilibrio entre criminales y la policía. Este supuesto debe ser cuidadosamente escogido en base al estudio de los datos y al conocimiento experto.

## 5. Cálculo de la estrategia óptima de recursos policiales

Una vez calibrado el modelo, se quiere calcular la estrategia óptima de recursos policiales, esto es, la mejor asignación de recursos con el fin de encarecer la acción criminal. Específicamente basándose en técnicas de optimización sobre las ecuaciones 2, 3 y 4.

---

## 4. Aplicación

---

La metodología es aplicada utilizando los datos de denuncias de delito en el centro de Santiago (cuadrantes 1, 2 y 3), durante el período junio 2006 a mayo 2007 (51 semanas), ésta área cubre aproximadamente 3 km<sup>2</sup>.

Respecto a la información policial, para este trabajo no se cuenta con información respecto a los recursos que empleó la policía durante el período y lugar en cuestión, por lo que se emplea una simulación semanal de datos basados en una suavización exponencial. El modelo se presenta a continuación.

$$\tilde{P}_e^t = \eta \left( \frac{P_e^{t-1} + P_e^{t-2} + P_e^{t-3}}{3} \right) + (1-\eta)P_e^{t-4} \Rightarrow \alpha_e^t = \frac{\tilde{P}_e^t}{\sum_{e \in E} \tilde{P}_e^t} \quad \forall e \in E. \quad (5)$$

Donde  $\tilde{P}_e^t$  representa el nivel de crimen (cantidad de denuncias) estimado para la estrategia  $e$  en la semana  $t^5$ . Esto se basa en la cantidad de denuncias observadas  $P_e$  de los cuatro períodos previos y  $\eta$  es el ponderador de la serie. Luego, la asignación de recursos policiales  $\alpha_e^t$  se determina normalizando los valores de  $\tilde{P}_e^t$ .

### Construcción de Estrategias

Para la construcción de estrategias, se emplea el método *k-medias* con distancias euclidianas. Para ello, las variables a utilizar son clasificadas según su tipo para luego transformarlas para minimizar los efectos de magnitud. La clasificación de las variables es la siguiente:

**Variable espacial:** Cuadrantes 1, 2 o 3.

**Variables temporales:** Día de la semana y rango horario (6 rangos horarios).

**Variable circunstancial:** Tipos de delito (hurto, robo con fuerza, robo con violencia).

### Funciones de costos

Las funciones de costos que se proponen para asociar a los arcos son las funciones de congestión *BPR* y *CCF* [15], las cuales se modifican para tomar

---

<sup>5</sup>La simulación de datos se realizó posterior a la construcción de las estrategias.

en cuenta el efecto policial<sup>6</sup>:

$$f^{BPR}(x, \alpha) = 1 + x^{(\beta-\alpha)} \quad (6)$$

$$f^{CCF}(x, \alpha) = 2 + \sqrt{(\beta - \alpha)^2 \cdot (1 - x)^2 + \tilde{\gamma}^2} - (\beta - \alpha) \cdot (1 - x) - \tilde{\gamma} \quad (7)$$

Donde  $\tilde{\gamma} = \frac{2(\beta-\alpha)-1}{2(\beta-\alpha)-2}$  y  $\beta \geq 1$ .

Por lo tanto, los parámetros a ajustar en la calibración del modelo son los valores de  $\beta_e$  de estas funciones.

### Calibración del modelo

Se plantea un método que itera sobre una grilla de valores de los parámetros de las funciones de costo, de manera de seleccionar todas las combinaciones posibles que ofrece la grilla. En cada iteración, el algoritmo selecciona un conjunto de parámetros  $\beta$  y la información semanal de recursos policiales  $\alpha$  simulados, para así determinar los parámetros de las funciones de costos en cada arco.

Luego, en base a esos costos parametrizados, se computa el flujo de Nash correspondiente (o de costo mínimo) y se compara con el flujo semanal observado<sup>7</sup>. Luego se registra con alguna medida de error la diferencia entre el valor observado y la del equilibrio computado. Finalmente, entre todas las ejecuciones se selecciona aquel conjunto de parámetros de la grilla que minimiza aquel error.

### Cálculo de la estrategia óptima de recursos policiales

Para el modelo teórico en que los criminales no son organizados (problemas 2 y 3), se realizan los modelos de optimización con el solver de MS Excel 2007 desde diferentes puntos iniciales. Para el modelo teórico en que los criminales están coludidos (problema 4), la maximización se obtiene iterando sobre grillas de valores de los recursos policiales y luego computando el flujo a costo mínimo (de manera análoga al algoritmo de calibración de parámetros) para luego seleccionar los parámetros  $\alpha$  que maximicen el costo mínimo del grafo.

#### 4.1. Análisis de Robustez

Como se observa en los pasos metodológicos, existe una gama de decisiones que deben tomarse para calibrar el modelo teórico. Por ello, se plantea un caso base que considera un conjunto de decisiones fijas y luego, se analizan otros

<sup>6</sup>Esto se hizo considerando un  $\beta$  real ajustado, que incorpora la asignación de recursos policiales  $\alpha$ . Es decir, se plantea  $\beta_{real} = \beta - \alpha$ .

<sup>7</sup>El cual se obtiene según la intensidad semanal (cantidad de delitos normalizada) de cada cluster.

resultados sensibilizando algunas de estas decisiones. Arbitrariamente, el caso base se define como sigue:

**Estrategias de crimen:** Se obtienen utilizando *k-medias* y con un número definido de clases *a priori*.

**Funciones de Costos:** Se considera la función de costos *BPR* modificada.

**Heurística de recursos policiales:** Se utiliza el modelo de suavización exponencial planteado.

**Comportamiento criminal:** Se consideran criminales no organizados.

Y para el análisis de robustez se varían sobre el caso base como lo muestra la tabla 1.

Escenario	Clustering	Func. Costos	Rend. Policial ( $\beta - \alpha^\delta$ )	Org. Criminales
Caso Base (C-base)	Cluster base	<i>BPR</i>	$\delta = 1$	Desorganizados
Caso C-estrategias	Cambio en N° clases	<i>BPR</i>	$\delta = 1$	Desorganizados
Caso C-costos	Cluster base	<i>CCF</i>	$\delta = 1$	Desorganizados
Caso C-rendimientos	Cluster base	<i>BPR</i>	$\delta = 0.95$	Desorganizados
Caso C-mafia	Cluster base	<i>BPR</i>	$\delta = 1$	Organizados

Tabla 1: Notación escenarios investigados.

## 4.2. Resultados

### Resultados Clustering

Las estrategias criminales se determinaron utilizando el algoritmo *k-medias*, en donde se determinó que se utilizarán siete clases (C7), dada la magnitud e interpretación de éstas. La tabla 2 muestra una síntesis de los resultados obtenidos, en donde a cada clase se le bautiza con nombre que intenta explicar su comportamiento. La notaciones del campo *Delito* corresponden a H, V, F a los delitos hurto, robo con violencia y robo con fuerza respectivamente.

Para el escenario C-estrategias, se utiliza el resultado del algoritmo de *k-medias* de ocho clases <sup>8</sup>.

#### 4.2.1. Resultados Caso Base

##### Calibración de Parámetros

El resultado de la calibración de parámetros es el vector de valores del parámetro  $\beta$  de la función *BPR*. La tabla 5 muestra el valor promedio de las preferencias de los criminales en las 51 semanas y el valor de  $\beta$  obtenido y se observa que los parámetros  $\beta$  capturan el efecto de las preferencias de los criminales, en donde los mayores valores de  $\beta$  representan a las preferencias

<sup>8</sup>El detalle del resultado del clustering puede ser visto en [7]

Cluster	Magnitud	Cuadrante	Delito	Momento del día	Día de la Semana	Bautizo
1	8.8%	1-2-3	F-V	Mañana	L-Ma-S-D	Robo temprano
2	14.8%	3	H-V	Tarde	L-Ma-Mi-J-V-S-D	Robo en la Tarde en cuadrante 3
3	26.3%	2	H-V	Tarde	L-Ma-Mi-J	Robo hora de almuerzo o vuelta del trabajo
4	19.9%	2	H-V	Noche	V	Robo en la tarde-noche en cuadrante 2
5	8.6%	1-2-3	H	Día	L-Ma-Mi-J-V	Hurto en horario de trabajo
6	8.3%	3	V	Noche	S-D	Robo en fin de semana nocturno
7	13.3%	1	V	Tarde	S-D	Robo en paseo de fin de semana

Tabla 2: Tabla resultados clustering.

más escogidas (clases 3 y 4). Además, se muestra que entre las clases de menor magnitud (1, 5 y 6), estos parámetros presentan un valor distinto a pesar de la cercanía en magnitud.

Escenario/Cluster	1	2	3	4	5	6	7
Promedio C7	8.8 %	14.8 %	26.3 %	19.9 %	8.6 %	8.3 %	13.3 %
$\beta$ C-base	1.83	2.37	3.36	2.87	1.80	1.79	2.24

Tabla 3: Resultados  $\beta$  Caso Base.

### Optimización de Recursos Policiales

La optimización de recursos policiales se obtiene resolviendo el problema 3, puesto que la función *BPR* modificada cumple con las condiciones requeridas. El resultado se despliega en la tabla 4 y compara entre el escenario actual y el optimizado los valores de la distribución de los recursos policiales ( $\alpha$ ) y de las preferencias criminales ( $x$ ).

Escenario/Cluster	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha$ prom., actual C7	8.9 %	14.7 %	26.0 %	20.3 %	8.6 %	8.2 %	13.3 %
$x$ prom., actual C7	9.0 %	14.5 %	26.3 %	19.8 %	8.7 %	8.3 %	13.4 %
$\alpha$ prom., C-base	1.3 %	56.4 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	42.4 %
$x$ prom., C-base	9.8 %	9.7 %	28.5 %	23.0 %	9.6 %	9.5 %	9.8 %

Tabla 4: Resultados de  $\alpha$  óptimo en Caso Base.

En base a lo anterior, se observa que el caso base muestra las asignaciones óptimas de recursos policiales se distribuyen sólo en las estrategias intermedias

(2 y 7) y en muy pequeña cantidad en la 1, las magnitudes son 56.4 %, 46.4 % y 1.3 % respectivamente. Esta distribución provoca una reacción teórica de los criminales que disminuye los ataques en las estrategias intermedias y aumenta los ataques en todas las demás. Como consecuencia, los ataques en todas las estrategias, a excepción de las mayores (3 y 4), se equiparan en magnitud. (9.6 %±0.1 %).

Finalmente, para medir la efectividad de la optimización, se compara la diferencia relativa del costo del grafo entre la situación actual, la maximización y la minimización, de manera de obtener la posición porcentual en que se encuentra la situación actual de la óptima. Los resultados obtenidos fueron respectivamente 0.01453, 0.01477 y 0.01441, lo que indica que la optimización aumenta en un 65 % el costo variable del grafo respecto a la situación actual, cumpliendo ampliamente el objetivo del modelo en términos de encarecer y dificultar el actuar criminal.

#### 4.2.2. Resultados de Robustez

Los resultados de los parámetros  $\beta$  de los escenarios de robustez se despliegan en la tabla 5. Los análisis se explican comparativamente respecto al caso base.

Escenario/Cluster	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Promedio C7</b>	8.8 %	14.8 %	26.3 %	19.9 %	8.6 %	8.3 %	13.3 %	-
$\beta$ C-base	1.83	2.37	3.36	2.87	1.80	1.79	2.24	-
$\beta$ C-rendimientos	1.88	2.43	3.45	2.95	1.85	1.84	2.30	-
$\beta$ C-mafia	1.64	2.23	3.42	2.80	1.60	1.62	2.08	-
$\beta$ C-costo	1.48	2.29	3.87	3.10	1.43	1.43	2.10	-
<b>Promedio C8</b>	7.6 %	13.7 %	17.2 %	17.1 %	14.1 %	11.7 %	6.0 %	12.7 %
$\beta$ C-estrategias	1.84	2.44	2.73	2.71	2.43	2.27	1.65	2.32

Tabla 5: Resultados  $\beta$  escenarios C7.

En el escenario C-mafia, la brecha entre los parámetros asociados a las estrategias de crimen menos numerosas y las más numerosas se amplifica: las diferencias se dan entre los valores 1.62 y 3.42, mientras que en el caso base los  $\beta$ s toman los valores 1.79 y 3.36 respectivamente. Además, este escenario presenta una leve diferencia entre los parámetros  $\beta$  del cluster 5 y 6, en donde su relación de orden es inversa a las demás. Este fenómeno se debe a la sensibilidad que presenta el algoritmo propuesto, en donde el criterio de minimización de errores absolutos provoca aquel efecto.

El escenario C-costos presenta el mismo efecto de amplificación de C-mafia, pero aun más pronunciado: los  $\beta$  mínimo y máximo son 1.43 y 3.87 respectivamente. Adicionalmente, los valores  $\beta$  mínimos tienen el mismo valor (1.43), lo que se interpreta como que las pequeñas fluctuaciones de valores no son captadas con parámetros de dos dígitos significativos.

En el escenario C-rendimientos, los  $\beta$  se amplifican de manera no lineal en todas las clases, lo que es consistente con el efecto inducido con el exponente  $\gamma$  en la expresión  $\alpha^\gamma$ .

El escenario C-estrategias, es equivalente al caso base en términos de las funciones de costo, rendimientos policiales y organización criminal. Los comportamientos en magnitud de los parámetros en este caso son muy similares a las del caso base.

Respecto a los resultados de la optimización, se presentan los resultados de las estrategias óptimas comparando los valores promedios del escenario actual. Los resultados son presentados en la tabla 6.

Escenario/Cluster	1	2	3	4	5	6	7	8
$\alpha$ prom., C-rend.	8.3 %	56.1 %	0.0 %	3.7 %	3.6 %	3.4 %	24.9 %	-
$x$ prom., C-rend.	8.9 %	9.7 %	28.6 %	22.6 %	9.2 %	9.1 %	11.9 %	-
$\alpha$ prom., C-costos	0.0 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	43.0 %	0.6 %	56.4 %	-
$x$ prom., C-costos	9.5 %	16.0 %	27.2 %	22.1 %	6.1 %	9.1 %	10.0 %	-
$\alpha$ prom., C-mafia	0.0 %	19.3 %	0.0 %	76.3 %	0.0 %	0.0 %	4.3 %	-
$x$ prom., C-mafia	9.8 %	14.4 %	28.2 %	14.4 %	9.3 %	9.6 %	14.4 %	-
$\alpha$ prom., C-estrat.	0.0 %	32.5 %	0.0 %	0.0 %	31.5 %	15.5 %	0.0 %	20.5
$x$ prom., C-estrat.	8.6 %	11.8 %	19.1 %	18.8 %	11.8 %	11.8 %	6.4 %	11.8 %

Tabla 6: Resultados de  $\alpha$  óptimo análisis de robustez C7 y C-estrategias.

El análisis de los resultados es presentado a continuación de la misma manera como fue presentado el caso base.

**C-rendimientos:** Se menciona que el efecto del exponente  $\gamma$  sobre los recursos policiales  $\alpha$  genera una amplificación no lineal de los parámetros  $\beta$ . Esto provoca que los recursos policiales sean menos eficientes a medida que aumentan en una estrategia. En consecuencia, los recursos que antes se repartían en las opciones de crimen de magnitud intermedia, ahora se reparten en todas las estrategias exceptuando en la de mayor tamaño (clase 3). Además, se observa que el efecto de ineficiencia provoca que la reacción criminal no sea equiparada como en el caso base, presentando una mayor varianza de magnitud de las estrategias menores e intermedias (9.8 %  $\pm$  1.3 %).

**C-costos:** Las estrategias óptimas policiales bajo este escenario son distintas a las anteriores. En este caso, se priorizan las estrategias 5 y 7, las cuales son de categoría intermedia y baja. La diferencia también se da en que la clase 1, que es la que en magnitud se ubica entre las clases 5 y 7, no tiene asignado recursos policiales. Esto sugiere la posibilidad de haber obtenido un óptimo local que probablemente se encuentra cercano al global.

**C-mafia:** En el escenario que se modela a los criminales organizados, la asignación óptima de recursos policiales prioriza también a las estrategias de tamaño intermedio (clases 4, 2 y 7). La diferencia está en que este caso, la estrategia más efectiva para asignar recursos policiales es la 4, que es la se-

gunda en tamaño. Esto significa que bajo criminales organizados, los recursos policiales se vuelven más eficientes designándolos a las clases intermedias de mayor tamaño (clases 4 y 2), que en contraste de los dos escenarios anteriores, se priorizan las clases de intermedias pero de menor tamaño (clases 2, 7 y 1).

**C-estrategias:** Este escenario presenta una diferencia de configuración de cluster respecto al caso base. El aporte de este escenario está en observar como cambia la asignación óptima de recursos policiales, cuando sólo se cambia el tamaño y el número de estrategias criminales. El resultado, es equivalente al obtenido en el caso base: se prioriza la asignación de recursos en las estrategias de magnitud intermedia. Sin embargo, al haber más estrategias en dicha categoría, la distribución óptima resultante queda mejor distribuida: 32.5 %, 31.5 %, 20.5 % y 15.5 % en las estrategias 2, 5, 8 y 6 respectivamente.

Finalmente, de manera análoga al caso base se realiza la medición cuantitativa de las efectividades de las asignaciones óptimas de recursos policiales. La tabla 7 muestra las posiciones relativas del caso actual frente al mínimo y máximo estimado.

Escenario	C-base	C-rendimientos	C-mafia	C-costos	C-estrategias
Dif. Actual-Máximo	65.0 %	16.3 %	24.1 %	34.8 %	7.5 %

Tabla 7: Brecha del costo del grafo entre caso original y máximo en cada escenario.

De estos resultados, se observa que en general los resultados de la maximización presentan una gran brecha en el costo del grafo respecto a la situación actual, exceptuando el escenario C-estrategias. Se destacó ya que el caso base presenta una brecha de un 65.0 % entre en costo del grafo actual y el obtenido de la maximización, pero se observa que la variante C-rendimientos presenta una brecha de costos claramente menor (16.3 %). Los escenarios C-costos y C-mafia presentan brechas respectivas de 34.8 % y 24.1 % de mejora respecto a la situación actual. Luego, todos estos casos cumplen con el objetivo de dificultar o encarecer la reacción criminal.

Para concluir, es importante señalar que los resultados de la optimización de recursos policiales obedecen sólo a los criterios planteados e ignoran todo efecto externo al modelo. Además, los resultados pueden no reflejar necesariamente una decisión real y deben entenderse como un resultado teórico que debiese complementarse con un juicio experto.

---

## 5. Conclusiones y Trabajos Futuros

---

En este trabajo se estudia el fenómeno del crimen en la vía pública como una interacción competitiva entre criminales y la policía. Para esto, se presenta un modelo matemático basado en teoría de juegos en grafos, el cual es calibrado

según datos reales de crímenes.

El estudio es realizado sobre cinco escenarios distintos que representan diversos supuestos sobre el modelo teórico. De esta manera se obtiene una comprensión amplia del fenómeno del crimen y se evalúa la robustez del modelo planteado y de su metodología de aplicación. Como resultado, es determinan estrategias óptimas del actuar policial considerando el comportamiento criminal.

El modelo consiste en un grafo que representa a los criminales por un flujo unitario que debe viajar desde un nodo fuente a un nodo demanda. Las diferentes rutas del grafo representan a las opciones de crimen. Las utilidades son vistas como los costos de los caminos incurridos por los criminales al momento de viajar por el grafo. Los recursos policiales son representados como parámetros que alteran las funciones de costos *a priori* y se consideran también unitarios.

Los supuesto del modelo se basan en que las opciones de crimen se saturan, ya sea porque más criminales las escogen o porque hay mayor cantidad de recursos policiales. Este hecho se representa con el flujo de Nash o con el de costo mínimo, dependiendo si se asumen criminales desorganizados u organizados respectivamente.

Para la metodología de aplicación del modelo teórico usando datos reales, se proponen cinco pasos: selección de datos, construcción de las estrategias, selección de las funciones de costo, calibración del modelo y cálculo de la estrategia óptima de recursos policiales. Ésta se testea con datos de denuncias de delitos de la Primera Comisaría de Santiago durante el período de un año.

La construcción de las estrategias se lleva a cabo utilizando el algoritmo *k-medias*. Se definieron para el caso base siete clases que representan siete opciones de delitos potenciales que escogen los criminales. Las funciones de costos de los empleadas se inspiraron en las clásicas utilizadas en ingeniería de transporte. Estas debieron ser modificadas de manera de incluir el efecto de los recursos policiales y al mismo tiempo satisfacer las condiciones que provocan el efecto de congestión. Finalmente las funciones de costos son calibradas sobre el caso baso y cuatro escenarios propuestos, que capturan variantes de la metodología de aplicación.

Los resultados de la asignación óptima de recursos policiales entrega resultados novedosos. Para todos los escenarios, se obtuvo que las asignaciones óptimas estaban en las opciones de crímenes de magnitud intermedia, dejando sin recursos tanto a las estrategias mayores como a las de menor intensidad. Estos resultados son analizados caso a caso en cada escenario y es posible diferenciar los elementos diferenciadores en cada uno de ellos.

De este trabajo se han desprendido potenciales temáticas a investigar tanto en ámbitos teóricos como aplicados. Dentro de las líneas teóricas, destacan principalmente los elementos relacionados con el modelamiento en redes, los

modelos de optimización y los algoritmos de calibración. De las líneas aplicadas, los desafíos aparecen en la ampliación del modelo y en la extrapolación a otros fenómenos de interacción de crimen.

**Agradecimientos:** Un especial agradecimiento al grupo CEAMOS y al Ministerio del Interior por el financiamiento parcial y en la transmisión de experiencia para este estudio.

## Referencias

- [1] Becker, G. Crime and Punishment: An Economic Approach. *Journal of Political Economy* 78: 169-217. 1968.
- [2] Beirne, Piers. Adolphe Quetelet and the Origins of Positivist Criminology. *American Journal of Sociology* 92(5): pp. 1140-1169. 1987.
- [3] Benavente, J. Análisis Espacial de la Criminalidad Basado en Georeferenciación de Denuncias. *Presentación en Taller de Inteligencia de Negocios*. Santiago de Chile. Junio 2008.
- [4] Corcoran, J. J., Wilson, I. D., Ware, J. A. Predicting the Geo-temporal Variations of Crime and Disorder. *International Journal of Forecasting*, 19: 623-634. 2003.
- [5] Guerry, A. *Essai sur la Statistique Morale de la France*. 1833.
- [6] Liu, L., Eck, J. Artificial Crime Analysis Systems: Using Computer Simulations and Geographic Information Systems. Publicado por Idea Group Inc (IGI). Enero 2008.
- [7] Lobato, J. L. Modelo Aplicado de Teoría de Juegos para el Estudio del Crimen en la Vía Pública. Tesis para optar al grado de Magíster en Gestión de Operaciones. Universidad de Chile. Junio 2009.
- [8] Macal, C. M., North, M. J. Tutorial on Agent-Based Model Modeling and Simulation. Proceedings of the 2005 Winter Simulation Conference.
- [9] Molina, E. Aplicaciones de la Teoría de Juegos al Análisis de Comportamientos Criminales. Escuela de verano de la Universidad Complutense “*Matemáticas para la Seguridad Contra la Criminalidad*”. El Escorial, España. Julio 2008.
- [10] Nuño, J. C. Aportación de las Matemáticas a la Lucha Contra la Criminalidad. Escuela de verano de la Universidad Complutense “*Matemáticas para la Seguridad Contra la Criminalidad*”. El Escorial, España. Julio 2008.

- [11] Perversi, I. Aplicación de Minería de Datos para la Exploración y Detección de Patrones Delictivos en Argentina. Tesis de Grado en Ingeniería Industrial, Instituto Tecnológico de Buenos Aires. 2007.
- [12] Pita, J., Jain, M., Marecki, J., Ordóñez, F., Portway, C., Tambe, M., Western, C., Paruchuri, P., Kraus, S. Deployed ARMOR Protection: The Application of a Game Theoretic Model for Security at the Los Angeles International Airport. International Conference on Autonomous Agents. *Proceedings of the 7th international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems: industrial track*. Pág. 125-132. 2008.
- [13] Roughgarden, T. Selfish Routing and the Price of Anarchy. *Department of Computer Science, Stanford University*. 7 de Enero, 2007.
- [14] Schmeidler, D. Equilibrium Points of Nonatomic Games. *Journal of Statistical Physics*. 7(4):259-300. 1973.
- [15] Spiess, H. Conical Volume-Delay Functions. *Transportation Science*, Vol 24. No. 2. 1990.
- [16] Tsebelis, G. Penalty Has No Impact on Crime: A Game Theoretic Analysis. *Rationality and Society* 2, 255-86. Julio 1990.
- [17] UC MaSC Project. Mathematical and Simulation Modeling of Crime. [Página Web] <http://paleo.sscnet.ucla.edu/ucmasc.htm>.
- [18] Wardrop, J. G. Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. En Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Pt. II, vol. 1, páginas 325-378. 1952.