
MODELO DE OPTIMIZACIÓN LINEAL DETERMINÍSTICO PARA LA LOCALIZACIÓN DE COLEGIOS

ISABEL GAC^{*}
FRANCISCO MARTINEZ^{**}
ANDRÉS WEINTRAUB^{*}

Resumen

En el presente trabajo se desarrolla un modelo de optimización lineal determinístico para la localización de colegios, el cual puede ser aplicado como una herramienta de apoyo a la toma de decisiones estratégicas en este ámbito. Este modelo determina la localización óptima de distintos tipos predefinidos de colegios y simultáneamente, la asignación de estudiantes a ellos, maximizando el beneficio social que perciben los agentes que participan en el sistema educacional: los dueños de establecimientos y los estudiantes. A diferencia de modelos anteriores, en este trabajo se abandona el supuesto usual donde los usuarios eligen minimizando sólo los costos de viaje y en cambio se maximiza una función de utilidad multi-atributo, donde se incluyen índices de la calidad del colegio, el costo de la escolaridad y los costos de viaje. Adicionalmente se asume heterogeneidad en la demanda y la oferta. Los estudiantes se clasifican por la ubicación de su residencia y por características socioeconómicas que definen comportamientos diferenciados. Los colegios se clasifican en privados, subvencionados y municipales (gratuitos), además de otros atributos de calidad (tamaño, resultados académicos y calidad de infraestructura). Para evaluar su desempeño el modelo se aplicó a una comuna de la ciudad de Santiago, utilizando supuestos razonables para suplir la información no disponible. Dado que no se calibran estos parámetros, se analizan tres escenarios que cubren casos razonables e interesantes de tipos de comportamiento de los usuarios y oferentes. Los resultados son esperables dados los supuestos aplicados respecto a las preferencias y capacidades de pago. Se observa un alto nivel de segregación: los grupos de mayores ingresos

^{*}Departamento de Ingeniería Civil Industrial, Universidad de Chile

^{**}Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

asisten a colegios privados de mayor precio y calidad, los grupos de ingresos medios a colegios subvencionados y los grupos más pobres asisten a colegios municipales. También se observa que resulta más conveniente operar los colegios a capacidad, aunque esto implique que estudiantes sean asignados a tipos de establecimientos que no corresponden a sus mejores alternativas individuales. Por otra parte, se aprecia la importancia de una calibración adecuada de los parámetros debido a su incidencia en el beneficio de los distintos agentes del sistema, dado que éstos determinan la solución. Adicionalmente, se estudia el efecto de incorporar el gasto de gobierno como una componente del costo social, lo que hace disminuir el número de colegios municipales y el número de estudiantes subvencionados. Finalmente se contrastan los resultados obtenidos con la situación observada actualmente, presentando argumentos para las diferencias encontradas.

Palabras Clave: Localización de Colegios, Programación Matemática.

1. Introducción

Actualmente existen en Santiago aproximadamente dos mil colegios, que atienden a más de un millón doscientos mil estudiantes matriculados para educación básica y media. Al analizar la localización de los establecimientos y la cantidad de matrículas en relación a la población en edad escolar residente en cada comuna, se observa que en ciertos sectores existe un superávit importante mientras en otras comunas existe un déficit significativo. El Plan de Transporte Urbano de Santiago resalta esta situación señalando que la mayor parte de los establecimientos educacionales están concentrados en unas pocas comunas y que ni siquiera las comunas que tienen suficientes matrículas logran retener a sus estudiantes.

En este contexto, el acceso diario a la educación es un responsable importante en la generación de viajes intra-urbanos, debido al volumen de personas involucradas y a las distancias entre los establecimientos y los lugares de residencia. En 1998 estos viajes representaron un costo equivalente al 33 % del gasto que asumió el Ministerio de Educación (MINEDUC) por concepto de subvenciones regulares (entregadas a los colegios) para la Región Metropolitana, sin considerar los costos asociados a congestión vehicular y contaminación, que para el caso de la ciudad de Santiago son especialmente relevantes.

La situación recién descrita se puede explicar por varias razones que se conjugan para generar la actual localización de los colegios y la asistencia de los estudiantes a éstos. En primer lugar, el actual sistema educacional se caracteriza por ser descentralizado, es decir, las decisiones sobre la administración, y en particular la localización, recaen en las municipalidades y en agentes pri-

vados. En segundo lugar, la oferta educacional es heterogénea, en la cual se distinguen tres grupos de colegios: particulares pagados, particulares subvencionados y municipalizados, los que se diferencian por el nivel de subsidio que reciben. A su vez, los establecimientos de estos grupos se diferencian por precio, rendimiento académico, cantidad y calidad de infraestructura, etc. Y en tercer lugar, dadas las características del sistema educacional, los apoderados pueden inscribir a sus hijos en el colegio que deseen; es decir, no existe obligatoriedad de asistir a un establecimiento dentro la misma zona de residencia u otra restricción similar, de modo que los estudiantes pueden viajar tanto como estimen conveniente con tal de asistir a un establecimiento de determinadas características.

En este contexto, el objetivo del modelo que se describe a continuación es determinar la localización óptima de distintos tipos predefinidos de colegios y, simultáneamente, la asignación a éstos de los estudiantes clasificados en categorías socioeconómicas, de forma tal de maximizar el beneficio social del sistema educacional.

Los modelos existentes de localización óptima de instalaciones y asignación de usuarios a éstas, aplicados a la localización de servicios públicos, como hospitales o colegios, se ha caracterizado por el uso de enfoques normativos, en el sentido de que se minimiza la distancia a recorrer por los usuarios o se maximiza la cobertura (enfoques p-median y covering respectivamente), lo que es un supuesto limitado respecto al comportamiento de los agentes ya que no consideran otros atributos además de los costos de transporte. Este es el caso de los trabajos desarrollados por Pizzolato y Silva [5] y Pizzolato et. al. [6] quienes aplican modelos p-median, con y sin capacidades, para determinar la localización óptima de escuelas públicas en ciudades de Brasil. Del mismo modo, en un trabajo realizado para el Ministerio de Educación griego [4] también se basan en el modelo p-median para desarrollar una sistema de apoyo a la toma de decisiones sobre localización de infraestructura educacional. [1] en un trabajo sobre localización de infraestructura educativa para las localidades urbanas de la provincia de Buenos Aires, desarrollan un modelo (lineal) cuyo objetivo es la minimización de los costos totales del sistema (incluidos los de transporte), de modo que, al igual que los trabajos anteriores, se supone que los usuarios asisten al establecimiento más cercano o de menor costo. De manera similar, Marianov y Taborga [2] abordan el problema de localizar óptimamente servicios de salud públicos y privados, bajo el supuesto de que las personas asisten al centro más cercano.

En este contexto, un aporte de modelo presentado corresponde al desarrollo e incorporación en la función objetivo de una medida del beneficio de los oferentes y demandantes. Se considera que el beneficio percibido por los estudiantes depende de otros atributos de calidad del servicio además del tiempo o costo de viaje, lo que se acerca a una realidad en que los estudiantes y sus

familias efectivamente escogen dentro de un conjunto heterogéneo de tipos de colegios y zonas de localización, y no necesariamente asisten al más cercano. De esta forma se eliminan los principales supuestos simplificadorios de los enfoques utilizados en otros modelos respecto a la homogeneidad de las instalaciones y la elección de la alternativa más cercana.

El modelo presentado determina un óptimo social considerando simultáneamente los beneficios de los demandantes y las utilidades de los oferentes. Un modelo de este tipo claramente no corresponde a un equilibrio, pero puede servir de pauta a organismos estatales para apoyar decisiones que acerquen el equilibrio a un óptimo social, a través de subsidios, inversiones o restricciones de localizaciones.

2. Descripción del Modelo

Para describir y modelar el sistema educacional del estudio se considera un espacio discreto con zonas identificadas por el índice $i \in I$ y que la población de estudiantes se clasifica en clusters $h \in H$ según su nivel socioeconómico.

Por otra parte, los establecimientos educacionales se agrupan en alternativas discretas, que se identifican por tipo $k \in K$ y el nivel de precio que cobran $l \in L$. Una de las características que clasifica los colegios es su dependencia administrativa, que define el nivel de subsidio del gobierno al que acceden: los colegios privados son administrados por agentes privados y financiados exclusivamente a través de la matrícula que pagan los alumnos, los colegios subvencionados también son administrados por agentes privados pero reciben un subsidio estatal que cubre parcialmente el valor de la matrícula, mientras los colegios municipales -gratuitos- son administrados por los municipios y son financiados exclusivamente con fondos fiscales, a través del mismo subsidio anterior más un presupuesto operacional B que no debe ser sobrepasado. De esta forma, una partición de la oferta se obtiene definiendo los subconjuntos K_P, K_S, K_G , para referirse a los subconjuntos de colegios privados, subvencionados y municipales, respectivamente. Esta variedad de colegios representa la situación de los colegios en Chile y es lo suficientemente diversa para cubrir otros casos.

El precio que puede cobrar cada tipo de colegio se define como un parámetro - P_{kjl} - cuyo valor varía a través del subíndice l para un colegio tipo k en una zona j . El índice l permite que un colegio decida el nivel del valor de su matrícula entre varios niveles de precios opcionales, los que se definen como un vector de parámetros de entrada del modelo. Al aumentar la cantidad de niveles, el modelo se puede aproximar a un caso de precios continuos. Las variables de decisión del modelo corresponden a:

- $ne_{hi}^{kjl m}$: fracción de estudiantes tipo h que residen en i y que asisten a colegios tipo k en la zona j que cobra un nivel de precio l, usando el medio de transporte m. Esta variable es continua y pertenece al intervalo [0,1].
- NC_{kjl} : número de colegios tipo k con nivel de precio l que se localizan en la zona j.
-

$$x_{kjl} = \begin{cases} 1 & \text{si se localiza al menos un colegio tipo k} \\ & \text{en la zona j con el nivel de precio l} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

La Función Objetivo: dado lo anterior, el modelo busca maximizar el beneficio social, sujeto a restricciones propias de los agentes y del sistema. La función objetivo a maximizar corresponde al beneficio social, el que se modela en forma agregada como el excedente agregado de los consumidores más la utilidad económica que perciben todos los tipos de oferentes:

$$MaxB.S. = \sum_{h_j, k, k, k, m} CS_{hi}^{kjl m} (ne_{hi}^{kjl m} * N_{h_i}) + \sum_{k, j, l} \Pi^{kjl} (ne_{hi}^{kjl m}, NC^{kjl}) \quad (1)$$

donde,

- $CS_{hi}^{kjl m}$: representa el excedente individual percibido por un estudiante tipo h, que reside en i y que asiste a la alternativa de colegio y modo de transporte (k,j,l,m).
- N_{h_i} : representa el número de estudiantes de tipo h que residen en la zona i, por lo que $ne_{hi}^{kjl m} * N_{h_i}$ corresponde al número total de estudiantes tipo h que residen en i y que asisten a los colegios del tipo (k, j, l), usando el medio de transporte m.
- $\Pi^{kjl} (ne_{hi}^{kjl m}, NC^{kjl})$: representa la utilidad económica percibida por los colegios identificados por la opción (k,j,l), que depende de la cantidad de estudiantes que asistan y del número de colegios de ese tipo que se localicen. Como se describe más adelante, esta utilidad se modela como los ingresos percibidos menos los costos operacionales y la inversión requerida.

Es importante observar que en la expresión (1), además de la utilidad de los colegios privados (pagados y subvencionados), también considera la utilidad de los colegios municipales. Esto supone que este tipo de colegios compite

en el mercado junto con los dos tipos anteriores, siendo posible que obtengan utilidades positivas a pesar de ser gratuitos si los ingresos por subsidios recibidos superan los costos de producir el servicio. También se observa que el beneficio total se obtiene agregando en forma simple todos los beneficios de los consumidores y los productores, lo que supone que los beneficios de los agentes tienen igual valor para la sociedad. No obstante, es simple extender el modelo incorporando ponderadores a cada término de la expresión (1) que asigne valoraciones diferenciadas reflejando en ellos un objetivo del planificador.

Excedente de los Consumidores: dado que la utilidad percibida por una persona no puede ser directamente medida en términos absolutos ni en unidades comparables a las utilidades de los productores, utilizamos un enfoque alternativo -pero equivalente- que consiste en representar el comportamiento racional de los consumidores como la maximización de su excedente, definido como la diferencia entre la función de disposición a pagar y el precio, lo que se evalúa en cada alternativa posible y se elige el máximo [3]. Esta, que es una práctica común en economía urbana, permite que todos los términos de la expresión (1) se midan en unidades monetarias y por lo tanto sean comparables entre sí.

De acuerdo con Rosen [7], la función de disposición a pagar WP se puede definir como la inversa en el precio de la función de utilidad indirecta condicional en la elección del colegio (suponiendo que tal inversa existe); en este caso, consideramos la función inversa de la utilidad indirecta en el precio del colegio y el costo de transporte. De este modo se define la función disposición a pagar como:

$$WP_{h_i}(\tilde{Z}_{kjm}, V) = I_h + \frac{f_h(\tilde{Z}_{kjm}) - V_{h_i}^0}{\beta_h^0}, \quad (2)$$

que corresponde a la disposición a pagar de un individuo tipo h que reside en i por consumir una alternativa de colegio y modo de transporte (k,j,m), y donde:

- $\beta_h^0 > 0$: representa la importancia que tiene el dinero en el nivel de utilidad, el que puede ser distinto para cada grupo homogéneo h (utilidad marginal de ingreso).
- $\tilde{Z}_{kjm} = \sum_{n=1}^N \beta_h^n * g(\tilde{Z}_{kjm}^n)$: función que refleja la utilidad que percibe una persona tipo h al escoger un colegio identificado por la alternativa (k,j,m), considerando exclusivamente su vector de cualidades \tilde{Z}_{kjm} (que no incluye el precio), y que en este trabajo asumimos lineal; β_h^n corresponde a la utilidad marginal -diferenciada por grupo h- de los distintos atributos y $g(\tilde{Z}_{kjm}^n)$ es una función de transformación de los atributos.

- V_{hi}^0 : representa la utilidad indirecta en una situación de referencia (por ejemplo el estado inicial del sistema) y que por condición de equilibrio usada en economía urbana y aplicable a este contexto se supone que es igual para consumidores idénticos.

Cabe señalar que al maximizar el excedente monetario la solución es independiente del valor de la utilidad V_{hi}^0 , el que representa un parámetro inocuo en la optimización, pero el valor absoluto del excedente del consumidor sí depende de este parámetro referencial.

De esta forma, para medir el beneficio percibido por los estudiantes, expresado en unidades monetarias, se utiliza el concepto de variación compensatoria [8], definida como la diferencia entre la disposición a pagar WP y el precio pagado por una alternativa. Luego el excedente del consumidor está dado por:

$$CS_{hi}^{kjlm} = WP_{hi}^{ljk m}(\tilde{Z}_{kjm}) - (P_{kjl} + C_{ijm}), \tag{3}$$

donde $P_{kjl} + C_{ijm}$: corresponde al costo total que percibe un estudiante por la alternativa (k,j,l,m), el cual está dado por el precio del colegio P_{kjl} más el costo generalizado de transporte C_{ijm} , que incluye la tarifa más el valor asociado al tiempo de viaje por ir de i a j usando el medio de transporte m.

Utilidad de los Oferentes: la utilidad económica de los colegios se define como los ingresos, dados la demanda y el precio, más el subsidio que reciben, menos los costos asociados, los cuales se modelan como un costo de gestión por alumno CG_k y un costo correspondiente a la inversión en la infraestructura requerida y su mantención, $CInf_{kj} = CInv_{kj} + CM_{kj}$. De este modo, la utilidad de cada tipo de colegio es:

$$\pi^{kjl}(ne_{hi}^{kjlm}, NC^{kjl}) = (P_{kjl} + t_k - CG_k) * \sum_{hjm} (ne_{hi}^{kjlm} * N_{hi}) - CInf_{kj} * NC^{kjl}, \tag{4}$$

donde,

- t_k : parámetro exógeno que corresponde a la subvención por alumno entregada por el Estado, donde $t_k=0 \forall k \in K_p$, ya que los colegios privados no reciben este subsidio.
- P_{kjl} : parámetro que corresponde al precio que cobran los colegios, de modo que $P_{kjl}=0$ para $k \in K_g$, puesto que los colegios municipales son gratuitos.

Reemplazando las expresiones (3) y (4) en (1), se obtiene el Beneficio Social dado por:

$$B.S. = \sum_{hi,k,j,l,m} (WP_{hi}^{kjm}(Z_{kjm}) - C_{ijm} + t_k - CG_k) * (ne_{hi}^{kglm} * N_{hi}) - \sum_{k,j,l} (CInf_{kj} * NC^{kjl}), \quad (5)$$

por lo que la función objetivo es lineal en las variables de optimización ne_{hi}^{kglm} y NC^{kjl} . Como se observa, el precio desaparece de la expresión del beneficio social, debido a que es un traspaso de beneficio desde la demanda hacia la oferta, y dado que los beneficios de los agentes son idénticamente valorados por la sociedad, este traspaso es indiferente para el modelo.

Las Restricciones: las restricciones que definen el espacio de soluciones factibles, son:

1. Total de cobertura de la demanda. Esta restricción establece que todo estudiante deben asistir a algún colegio. Se escribe como:

$$\sum_{k,j,l,m} ne_{hi}^{kglm} = 1 \quad \forall h, i$$

2. Capacidad de pago. Esta restricción asegura que los consumidores cumplen con su restricción de ingreso. Se define como:

$$ne_{hi}^{kglm} \leq s_{hi}^{kglm} \cdot NC^{kjl} \quad \forall h, i, k, j, l, m$$

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } P_{kjl} + C_{ijm} \leq \gamma_h \cdot I_h \\ 0 & \sim \end{cases}$$

3. Capacidad de los colegios. Se definen dos restricciones:

$$(3.1) \sum_{h,j,m} (ne_{hi}^{kglm} \cdot N_{hi} \leq CapSup_{kj}) \cdot NC^{kjl} \quad \forall k, j, l$$

$$(3.2) \sum_{h,j,m} (ne_{hi}^{kglm} \cdot N_{hi} \geq CapInf_{kj}) \cdot NC^{kjl} \quad \forall k, j, l$$

La restricción (3.1) establece que el número de estudiantes que asisten a colegios tipos (k,l) en una zona j, no deben superar la capacidad de la oferta disponible, dada por la capacidad superior de un colegio tipo k ($CapSup_{kj}$) multiplicada por el número de colegios de ese tipo que efectivamente se localice. Del mismo modo, la restricción (3.2) establece que la cantidad de estudiantes asistentes a colegios tipo (k,l) en la zona j debe ser mayor que un número mínimo de matrículas que un tipo de

colegio está dispuesto a aceptar ($CapInf_{kj}$) para pertenecer a la oferta. Ambas restricciones se definen sobre la capacidad agregada para el número total de establecimientos que se localicen, debido a que cada colegio tipo k es homogéneo al interior de ese subconjunto, por lo que el modelo no distingue entre ellos al momento de asignar los estudiantes.

4. Excedentes económicos positivos

$$(4.1) \pi^{kjl} = (P_{kjl} + t_k - CG_k) \cdot \sum_{h,i,m} (ne_{hi}^{kjl} * N_{hi}) - CInf_{kj} \cdot NC^{kjl} \geq 0 \quad \forall k \in \tilde{K}_P, U \tilde{K}_S$$

$$(4.2) (t_k - CG_k) \cdot \sum_{h,i,m} (ne_{hi}^{kjl} * N_{hi}) - CM_{kj} \cdot NC^{kjl} + B \geq 0 \quad \forall k \in \tilde{K}_G$$

La restricción (4.1) establece que los colegios privados y subvencionados deben obtener excedentes económicos positivos, puesto que de lo contrario, éstos no abrirían o cerrarían en el corto plazo. La restricción (4.2) establece que los colegios municipales deben ser financieramente factibles, es decir no deben gastar en gestión y mantención de la infraestructura más de lo que reciben por concepto de subvenciones y presupuesto B . Como se observa, esta restricción no exige a los flujos operacionales de los colegios municipales recuperar el costo de la inversión en infraestructura $CInv_{kj}$.

5. Nivel de precios únicos

$$(5.1) \sum_l x^{kjl} = 1 \quad \forall k, j$$

$$(5.2) NC^{kjl} \leq M \cdot x^{kjl} \quad \forall k, j, l$$

La restricción (5.1) establece que cada tipo de colegio k que se localice en una zona j , debe fijar sólo un nivel de precios, suponiendo que por competencia de mercado servicios idénticos alcanzan un único precio de equilibrio. La restricción (5.2) indica que si no se abren colegios tipo (k,j,l) , esto es ($x^{kjl}=0$), entonces la variable número de colegios de ese tipo debe ser cero; por el contrario, si x^{kjl} vale 1 (si se abre al menos un colegio tipo k en j al nivel de precio l), el número de colegios está acotado por un parámetro auxiliar M , que se puede definir, por ejemplo, igual al número máximo de colegios necesarios para satisfacer toda la demanda. Por otra parte, si alguna variable NC^{kjl} debe ser mayor o igual a 1 (para por ejemplo satisfacer la restricción (4), a través de (5.2)) se obliga a x_{kjl} a ser igual a 1. Como se observa, las variables NC^{kjl} y x^{kjl} se relacionan de forma tal que una fija el valor de la otra.

En el modelo no se han considerado restricciones relativas a la asignación de los estudiantes a algún colegio dentro o cerca de su zona de residencia, ni

sobre el precio máximo que pueden cobrar los colegios privados, puesto que al menos en el sistema educacional en estudio no existe este tipo de regulaciones. Por otro lado, existe una restricción al precio máximo que pueden cobrar los establecimientos subvencionados, que es incorporada directamente al asignar valores del parámetro P_{kjl} para este tipo de colegios, de modo que se cumpla la condición.

3. Aplicación

El modelo se aplica a cuatro escenarios, los tres primeros incorporan supuestos diferentes respecto al comportamiento de la demanda y la oferta. En el cuarto se prueba una modificación de la función objetivo que consiste en eliminar la utilidad de los colegios municipales de ella y agregar el gasto de gobierno como un costo social. Esto último toma en cuenta que los recursos del Estado tienen un uso alternativo que no se está considerando en la modelación dado que solamente se considera el sector educación de la economía.

3.1. Descripción general de los escenarios

Para aplicar el modelo se construyó un escenario base utilizando la información disponible para una comuna de la ciudad de Santiago, la que fue complementada con supuestos razonables para suplir la información no disponible. A este escenario se le agregan supuestos adicionales para representar el comportamiento de los estudiantes y dueños de los colegios generando los tres escenarios siguientes. De esta forma, los escenarios se construyen en forma realista por lo que se espera obtener soluciones que sean interpretables intuitivamente.

El área de estudio se dividió en seis zonas $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y se tomó en cuenta que es posible clasificar la población de acuerdo a ciertos criterios socioeconómicos, en cinco grupos $h \in \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$, los que se supuso difieren principalmente en el nivel de ingreso, en las preferencias respecto a cada tipo de colegio y la distribución de su población en cada una de las zonas i ; los grupos se ordenan decrecientemente según ingreso de I_1 a I_5 .

Por otra parte, se supone que cada tipo de colegio k se puede describir, en forma aproximada, por un vector de atributos discretos, los que definen las categorías de colegios. Los atributos y valores considerados son:

- Nivel de subsidio (t) : Privado, Subvencionado o Municipal ($t \in K_p, K_s, K_g$),
- Capacidad (C): alta o baja ($g \in C_A, C_B$),

- Calidad académica (Q) : Alta o Baja ($Q \in Q_A, Q_B$), la cual puede ser medida a través de los resultados en pruebas académicas nacionales estandarizadas, y
- Calidad de infraestructura (I): Buena o Mala ($I \in I_B, I_M$). Estas categorías se pueden distinguir definiendo como Buena aquella que corresponda a un número de m²/alumno mayor al mínimo establecido por el MINEDUC y definiendo como Mala a la que corresponda un número de m²/alumno menor (o igual) a este mínimo.

Sobre la base de la combinación de los valores de estos atributos, se consideraron 17 tipos de colegios: 8 tipos de colegios privados, 8 tipos de colegios subvencionados y un tipo de colegio municipal. En el caso del tipo de colegio municipal se consideró un solo tipo: de capacidad alta, con resultados académicos bajos y calidad de infraestructura mala ((K_g, C_A, Q_B, I_M)). Esto se basa en el supuesto que no tiene sentido que agentes que representan al Estado, como las municipalidades, construyan colegios pequeños (desaprovechando las economías de escala) y colegios con diferencias en infraestructura o resultados, ya que éste no puede discriminar a sus demandantes y porque el presupuesto disponible no permite mejor infraestructura. Respecto a la calidad académica, ésta se define como baja ya que históricamente este tipo de colegios muestran esta característica.

El costo de inversión, asociado a cada tipo de colegio en cada zona, se modeló como un costo relacionado con el área (m^2) de construcción más un costo relacionado con el valor del m^2 del suelo en cada zona, requeridos por cada tipo de colegio. El costo de mantención CM_{kj} se consideró como un porcentaje del costo de inversión, siendo mayor para colegios con calidad de infraestructura buena con lo cual se incorporaron economías de escala para los colegios grandes. Del mismo modo, el costo de gestión CG_k [\$/alumno], se consideró relacionado con la dependencia administrativa y con la calidad académica del colegio: establecimientos Privados gastan más que los Subvencionados, y a su vez éstos gastan más que los Municipales; dentro de cada uno de estos conjuntos, los tipos de colegios con calidad académica alta gastan más que los de baja. Adicionalmente, a través de este parámetro se incorporaron economías de escala para los colegios grandes (colegio de tamaño C_A tienen un costo de gestión unitario menor que colegios de tamaño C_B).

Respecto al medio de transporte, se consideraron dos alternativas posibles: transporte privado (automóvil) y transporte público (bus), estimando los costos C_{ijm} en proporción a la distancia entre las zonas (i,j).

En el escenario base los atributos considerados para la estimación de la WP son: nivel de subsidio, capacidad, calidad académica y calidad de infraestructura, más un atributo relacionado con la comodidad del modo de transporte (independiente del costo C_{ijm}). En el segundo escenario se incluye segregación,

donde se consideran los mismos atributos anteriores, pero se agrega un factor de atracción zonal bajo el supuesto que los grupos valoran más aquellas zonas donde se concentran grupos de mayor o igual nivel socioeconómico.

Para estos dos primeros escenarios se define sólo un nivel de precios P_{kjl} para $k \in K_p \cup K_i$, es decir $l \in L = \{1\}$. Este nivel se estimó de manera tal que cada colegio particular pagado, operando a un 90% de su capacidad, obtenga utilidades anuales $-\pi^{kjl}$ - equivalentes al 10% de la inversión total, y que cada colegio particular subvencionado obtenga flujos equivalentes al 5%. Cabe observar que esta construcción genera precios más altos para los tipos de colegios privados y para los colegios que se localicen en zonas donde el suelo es más caro. En el tercer escenario los precios son una decisión del modelo. Es idéntico al anterior (segregación), pero a los colegios privados y subvencionados se les da la opción de elegir el nivel de precio que cobran entre tres niveles posibles:

- $l=1$ nivel de precios considerado en los escenarios anteriores.
- $l=2$ corresponde al 85% de los precios anteriores, y
- $l=3$ corresponde al 115% de los precios anteriores.

En el cuarto escenario los agentes proveedores de colegios municipales son parte del gobierno, luego no maximizan utilidades sino que minimizan el gasto social. Para esto se modifica la función objetivo, se elimina la utilidad económica de los colegios municipales como parte del beneficio social y se incorpora el gasto de gobierno; en lo demás se mantiene el escenario base. En la modificación, la función objetivo queda de la siguiente manera:

$$\text{máx } B.S. = \sum_{h,i,k,j,l,m} CS_{hi}^{kjl m} (ne_{hi}^{kjl m} * N_{hi}) + \sum_{k \in K_s \cup K_p, j, l} \pi^{kjl} (ne_{hi}^{kjl m}, NC^{kjl}) - G.G. \quad (6)$$

donde GG se compone del gasto en subsidios a los estudiantes que asisten a establecimientos, subvencionados y municipales, y el gasto en inversión y operación de este último tipo de establecimientos. De esta forma:

$$G.G. = \sum_{h,i,j,l,m} (\sum_{k \in K_G \cup K_G} t_k + \sum_{k \in K_G} (CG_k - P_{kjl} * (ne_{hi}^{kjl m} * N_{hi}))) + \sum_{k \in K_g, j, l} CIn f_{kj} * NC^{kjl} \quad (7)$$

Por lo tanto el Beneficio Social ahora queda definido de la siguiente forma:

$$B.S. =$$

$$\sum_{h,i,k,j,l,m} (WP_{hi}^{kijlm}(Z_{kjm})) * (ne_{hi}^{kijlm} * N_{hi}) - \sum_{k \in K_G} t_k * \sum_{h,i,j,l,m} (ne_{hi}^{kijlm} * N_{hi}) - \sum_{k \in K,j,l} (CInf_{kj} * NC^{kjl}) \tag{8}$$

El tamaño de los escenarios se muestra en la tabla 1.

	Escenarios 1, 2 y 4 (1 nivel de precios)	Escenario 3 (3 niveles de precios)
	$l \in \{1\}$	$l \in \{1,2,3\}$
Número de Variables		
Continuas ne_{hi}^{kijlm}	6.120	17.640
Enteras NC^{kjl}	102	294
Binarias x^{kjl}	102	294
Total	6.324	18.228
Número de Restricciones		
a.- Nivel de Cobertura de la Demanda $\forall h,i$	30	30
b.- Capacidad de Pago $\forall h,i,m,k,j,l$	204	588
c.- Capacidad de los colegios $\forall k,j,l$	6.120	17.640
d.- Excedentes Económicos positivos $\forall k,j,l$	102	102
e.- Nivel de precios únicos $\forall k,j,l$ y $\forall k,j$	204	204
Total	6.660	18.360

Cuadro 1: Dimensión del problema de optimización para cada escenario resuelto.

El modelo se programó en GAMS y se resolvió con CPLEX 7.0, en un notebook con procesador Pentium 4 de 2 GHz y memoria Ram de 512 mb. Los tiempos de resolución requeridos fueron 28 mins, 17 mins., 80 mins y 60 mins para los escenarios 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

3.2. Resultados Numéricos

Entre los resultados principales se describe la oferta obtenida en la solución óptima para los diversos escenarios. Casi todos los escenarios producen la misma cantidad total de 18 colegios, con una distribución por tipo que no varía entre escenarios: 7 colegios particulares, 9 subvencionados y 2 municipales. La excepción es el escenario que minimiza el gasto gubernamental (Escenario 4) en que el total de colegios municipales disminuye en una unidad. Sin embargo, se observan cambios en la distribución espacial de colegios que muestra el cuadro 2 entre los distintos escenarios.

En este cuadro se describe el nivel socioeconómico de cada zona mediante el porcentaje de población en los niveles altos, medios y bajos de ingresos, respec-

tivamente; además se entrega un índice del valor del suelo, que se correlaciona con el nivel de ingreso, aunque no exactamente debido a otros factores.

Escenario	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Zona 6
1	1 (K _p C _B O _A I _B)	2 (K _p C _A O _A I _B)	1 (K _p C _A O _A I _B)	1 (K _p C _B O _A I _B)	1 (K _p C _B O _A I _B)	1 (K _p C _B O _B I _M)
Base	2 (K _p C _A O _A I _B)				1 (K _p C _A O _A I _B)	6 (K _p C _A O _A I _B)
Total	3		1	1	1 Municipal	1 Municipal
2	1 (K _p C _B O _A I _B)	2 (K _p C _A O _A I _B)		1 (K _p C _B O _A I _B)	1 Municipal	1 (K _p C _B O _B I _M)
Esc. 1+ Segregación	3 (K _p C _A O _A I _B)	1 (K _p C _A O _A I _B)		5 (K _p C _A O _A I _B)		1 Municipal
Total	4	5	0	6	1	2
3	1 (K _p C _B O _A I _B) I=1	2 (K _p C _A O _A I _B) I=2		1 (K _p C _B O _A I _B) I=3	1 Municipal	1 Municipal
Esc. 2+ Precios Libres	3 (K _p C _A O _A I _B) I=3	1 (K _s C _B O _A I _B) I=3				
		5 (K _s C _A O _A I _B) I=1		1 (K _s C _B O _B I _M) I=2		
				2 (K _s C _A O _A I _B) I=2		
Total	4	8	0	4	1	1
4	1 (K _p C _B O _A I _B)	2 (K _p C _A O _A I _B)	1 (K _p C _A O _A I _B)	1 (K _p C _A O _A I _B)	2 (K _s C _A O _A I _B)	2 (K _p C _B O _B I _M)
Esc. 1+ Gasto Gov.	2 (K _p C _A O _A I _B)				1 Municipal	5 (K _p C _A O _A I _B)
Total	3	2	1	1	3	7
Nivel Socio-económico de las Zonas	High	High-Medium	Medium-High	Medium	Medium-Low	Low
% Población de ingresos	87%	65%	35%	10%	2%	1%
High-Medium y Low	12%	34%	64%	89%	77%	45%
	1%	1%	1%	1%	21%	54%
Valor Suelo [UF/m ²]	12,3	9,0	10,0	7,4	8,5	6,5

Cuadro 2: Distribución espacial de la oferta

La alta concentración de colegios en la zona 6 de la situación base se reduce drásticamente en los escenarios siguientes para aumentar nuevamente en el escenario 4, lo que muestra un significativo efecto de la segregación introducida en los escenarios 2 y 3. En todos los escenarios se observa que los tipos de colegios están segregados espacialmente según el nivel socioeconómico de las zonas, que actúan como factores de atracción: los particulares se concentran en las zonas de mayor ingreso (1 y 2), los subvencionados se dispersan en las zonas de nivel medio y los municipales se concentran en las zonas más pobres (5 y 6).

Los datos obtenidos también indican una alta segregación de la población en todos los escenarios, con los estudiantes de ingresos altos concentrados en los colegios privados, los de ingreso medio en los colegios subvencionados y los de ingreso bajo en los municipales. La única variación a esta regla ocurre en el escenario 4 en que los estudiantes de ingreso bajo se desplazan en un significativo número a colegios subvencionados. Cabe destacar que esta distribución no es siempre la que representa la mejor alternativa para los consumidores,

porque el óptimo está influenciado por la conveniencia de los productores.

La libertad en la elección de los precios introducida en el escenario 3 induce un aumento en el precio promedio del sistema educacional que se traduce en un incremento del 9 % en las utilidades de los oferentes; además hay un aumento en el total de estudiantes que viajan, llegando al 53 %. Ambos efectos reducen los excedentes de los consumidores en un 27 % respecto del escenario anterior.

En los escenarios 1, 2 y 3 se mantiene constante la oferta de 2 colegios municipales, a pesar de que en los dos últimos existe el factor de segregación; el escenario 4, en que se minimiza el gasto del gobierno pero también elimina los efectos de segregación y elección de precios, es decir vuelve a compararse con la situación base, ofrece sólo 1 colegio municipal.

Otro análisis interesante es la variación en la distribución de los beneficios entre consumidores y oferentes en cada escenario, que se resume en el cuadro 3. En todos los casos el beneficio total de la oferta resulta mayor que el excedente total de la demanda.

	Escenario 1 Base	Escenario 2 Esc.1+ Segregación	Escenario 3 Esc.2+ Precio libre	Escenario 4 Esc.1+ Gasto gobierno
Oferta	3.426	3.493	3.809	3.626
Demanda	1.149	1.204	882	845
I₁	282	409	59	266
I₂	322	257	216	85
I₃	140	130	199	117
I₄	356	358	358	327
I₅	51	51	51	50
Gasto de Gobierno	5.293	5.293	5.293	4.752
Función Objetivo	4.574	4.696	4.690	-282

Cuadro 3: Distribución de los beneficios (Valores en millones de pesos)

En efecto, el beneficio percibido por la demanda es alrededor de un 30 % del obtenido por la oferta. Esta relación se explica por la construcción de los parámetros que definen ambas expresiones, que al ser definidos arbitrariamente (especialmente el valor de referencia de la utilidad de los consumidores) adolecen de una falta de interpretación; para obtener una comparación realista se requiere una calibración de los parámetros de la función de utilidad de los consumidores. Por otra parte, de darse una relación como esta, el planificador puede adoptar una política de introducir mayor equidad entre los agentes mediante la ponderación de los beneficios de los consumidores, de forma tal que en el agregado, el beneficio de la demanda resulte del mismo orden de magnitud que el de la oferta.

Otro resultado es la reducción del 10 % en el gasto del gobierno obtenido por el hecho de introducir esta política en la función objetivo (escenario 4). Esta solución implica la eliminación de un colegio municipal y la disminución de la cantidad de alumnos subvencionados. Cabe aclarar que en ese escenario la función objetivo cambia, lo que explica la drástica variación de su valor comparado con los anteriores escenarios.

Por otra parte, se aprecia que los resultados presentan fuertes diferencias con la situación real; el modelo indica la conveniencia de abrir 17 o 18 colegios, cuando en realidad hay 60 en la zona. Sin embargo, antes de concluir es necesario hacer explícito algunos supuestos usados:

1. El modelo asume un óptimo de largo plazo. Es posible que existan externalidades, inercias históricas o resistencias culturales no incorporadas en el modelo, que pueden desviar la situación observada de la configuración óptima. Entre tales factores se debe destacar la infraestructura disponible cuya relocalización requiere considerar un costo no contemplado. El modelo prescribe la conveniencia de abrir un número de colegios de alta capacidad, por lo que la realidad requiere un número mucho mayor de colegios que los señalados por el modelo.
2. El ámbito de estudio define un mercado cerrado, lo que no se cumple ya que el modelo se aplicó sólo a una municipalidad de Santiago y los datos indican que esta área recibe demanda de otras municipalidades, que corresponden al 20 % de su propia población en edad escolar, así como también existe una cantidad no conocida de estudiantes que asisten a colegios en otras comunas. De este modo la demanda real que enfrenta la comuna es distinta a su población residente pero estos flujos de entrada y salida no han sido incluidos en la población total considerada en los escenarios resueltos. Sin embargo, este aspecto es posible mejorarlo con la aplicación del modelo al sistema o ciudad completa, de forma de incluir todos los flujos inter-comunales.
3. Los parámetros utilizados no fueron calibrados sino que se usaron valores arbitrarios considerados razonables pero susceptibles de introducir errores cuya magnitud se desconoce; este supuesto se puede levantar si se cuenta con suficiente información de la demanda. También se han esquematizado los tipos de colegios en pocas categorías, cuando en realidad el rango de dimensiones puede ser mucho más amplio, pero se optó por no aumentar la dimensionalidad del problema.

Si el modelo incorporara las rigideces y condiciones de estos puntos y a la vez se dispusiera de información correcta, el modelo indicaría un óptimo social aproximado, el que debiera ser contrastado con la situación de equilibrio existente actualmente.

Las principales causas de diferencias entre un óptimo social y un equilibrio estarían dadas por externalidades e inercias culturales o históricas. En la medida que estos factores no sean fuertes, ambas configuraciones debieran ser similares. Un elemento de externalidad está en el alto valor para los oferentes de llenar sus colegios, que capta el modelo de óptimo social.

El corolario de esta comparación es que para una aplicación real el modelo debe ser calibrado usando los mejores datos posibles y que conviene utilizarlo considerando los costos de cualquier cambio de la situación real.

4. Conclusiones

En el presente trabajo se ha desarrollado un modelo de optimización lineal para la localización de colegios, que puede ser aplicado como una herramienta de apoyo a la toma de decisiones estratégicas en este ámbito.

A la fecha, el desarrollo de modelos de localización óptima de servicios públicos, como los colegios, se caracteriza por el uso de enfoques o supuestos limitados respecto al comportamiento de los individuos, aspecto en que este trabajo innova al incorporar en la función objetivo una medida del beneficio que perciben los agentes del sistema, oferentes y demandantes, que se basa en diversos atributos de la oferta y no sólo en la distancia (o tiempos de viaje) a los colegios desde la residencia. De este modo se supera el supuesto de homogeneidad en la oferta introduciendo factores de calidad que diferencian las opciones.

El modelo determina la localización de distintos tipos predefinidos de colegios y simultáneamente, la asignación de los diferentes tipos de estudiantes a ellos, maximizando el beneficio total que perciben los agentes económicos. Los agentes considerados son los estudiantes, quienes demandan educación, y los oferentes son los dueños de los colegios.

En nuestra aplicación los colegios se diferencian por el nivel de subsidio que reciben, y por el tamaño, calidad académica, calidad de infraestructura y precio que cobran, además de la zona donde se localizan. Los estudiantes se clasifican por nivel socioeconómico y la zona donde residen. Los precios son dados exógenamente para cada tipo de colegio y localización, o bien se obtienen de un conjunto de valores exógenos. La dimensión del problema de optimización está definida por el número de categorías de colegios y estudiantes que se define.

El excedente del consumidor se utiliza como medida del bienestar percibido por los estudiantes en unidades monetarias, definido por la diferencia entre la disposición a pagar y lo que realmente pagan. Este excedente se ha modelado en forma determinística como una función lineal en el precio, el costo de

transporte y atributos del colegio y del modo de transporte que se consideran relevantes.

El excedente económico de los distintos tipos de colegios se ha modelado como la suma de los ingresos percibidos menos los costos operacionales (gestión y mantención) y el costo anualizado de la inversión requerida, de forma tal que a través de los parámetros que definen los costos de gestión y mantención se han incorporado economías (o deseconomías) de escala en estos ámbitos.

El beneficio total se obtiene agregando en forma simple los beneficios de los demandantes (estudiantes) y los oferentes (dueños de los colegios). En este proceso de agregación se ignora el tema de la distribución de beneficios, asumiendo que los beneficios de todos los agentes tienen igual valor para la sociedad. Sin embargo, también es posible aplicar el modelo bajo políticas que asignen un valor social diferente a los distintos agentes para la sociedad mediante un conjunto de parámetros que ponderen las utilidades individuales de manera diferenciada; esta aplicación no altera la forma del problema de optimización.

Dado que el precio no participa en la función objetivo (se anula como parámetro explícito), pero si actúa en las restricciones, pequeñas variaciones sobre el precio, que no activen las restricciones relacionadas (restricción de presupuesto de las personas y restricción de utilidades positivas para los colegios), no alteran el valor de la solución óptima, pero sí generan soluciones diferentes para el sistema en términos del precio que cobran los colegios localizados, lo que incide sobre la distribución del beneficio total entre la oferta y la demanda.

La solución del modelo supone que existen agentes que eligen alternativas que no representan aquellas de máximo beneficio, ya que de esta manera se favorece al beneficio total del sistema, al permitir que otros agentes sí elijan una alternativa que aporta más bienestar al sistema. Por esta razón, las soluciones encontradas por el modelo de optimización no implican equilibrio en términos de las preferencias de los agentes, ya que quienes no son asignados a la alternativa que les reporta la máxima utilidad tienen incentivos a desviarse de la asignación propuesta por la solución. Así resulta altamente relevante para la aplicación del modelo la escala relativa entre los parámetros asociados al beneficio de los grupos que componen la demanda y la oferta, puesto que éstos determinan quienes aportan más beneficio al sistema lo que determina las características de la solución.

Al modificar la función objetivo incorporando el gasto del gobierno como una componente del beneficio social, se observa que resulta más conveniente instalar menos colegios municipales y disminuir la cantidad de estudiantes que asisten a establecimientos que reciben subvención. Por otra parte, debido a la forma como se ha planteado el modelo, es posible parametrizarlo para distintas funciones objetivos, priorizando determinados atributos dentro de la función

objetivo.

Como ya se observó en la sección anterior, hay diversas causas relacionadas con falta de información, aproximaciones realizadas, la modelación de la comuna en estudio como un sistema cerrado, ignorando los flujos de entrada y salida, que alejan nuestro modelo de una representación real; también la existencia de externalidades e inercias históricas o culturales que desvíen a la situación observada de las soluciones en los escenarios estudiados, serían otra fuente posible de distorsión seria. Sin embargo, se puede desarrollar un modelo que levante estas limitaciones y lleve a un resultado de óptimo social aproximado. Este resultado serviría como guía para contrastar con la realidad existente y tomar medidas que acerquen este equilibrio a un óptimo social.

Referencias

- [1] Cohen E, Martínez F, Donoso P y Aguirre F (2003). *Localización de infraestructura educativa para localidades urbanas de la Provincia de Buenos Aires*. Serie Políticas Sociales N°79. Naciones Unidas-CEPAL.
- [2] Marianov V y Toborga P (2001). *Optimal Location of Public health Centres which Provide Free and Paid Services*. J Opl Res Soc 52: 391-400.
- [3] Martínez F (2001). *Measuring land use benefits in auction markets*. En: *Versión 2 European Transport Conference*. Inglaterra, Homerton College Cambridge.
- [4] Photis YN y Koutsopoulos KC (2003). *Supporting Locational decision making: regionalization of service delivery system*. Atenas, Grecia. National Technical University of Athens.
- [5] Pizzolato ND y Silva HBF (1997). *The Location of Public Schools: Evaluation of Practical Experiences*. Int Trns Oper Res 4 (1):13-22.
- [6] Pizzolato ND, Broseghini F y Nogueira L (2004). *School location methodology in urban areas of developing countries*. Int Trns Oper Res 11 (6): 667-681.
- [7] Rosen S. (1974). *Hedonic prices and implicit markets: Product differentiation in pure competition*. J Polit Econ 82 (1): 34-55.
- [8] Varian H.R. 1992 *Análisis Microeconómico, 3era edición*. Antoni Bosch.

