

R E V I S T A

# INGENIERIA DE SISTEMAS

---

Volumen XIX

Octubre 2005

- El Modelo CAPM Para Distintos Horizontes de Tiempo 7  
*Viviana Fernández*
- Gestión de Operaciones de Refino y Moldeo en la Producción de Cobre 19  
*Víctor Parada, Lorena Pradenas, Gino Núñez, Víctor Parada, Jacques Ferland*
- Programación Matemática Aplicada al Fixture de la Primera División del Fútbol Chileno 29  
*Guillermo Durán, Mario Guajardo, Jaime Miranda, Denis Sauré, Sebastián Souyris, Andrés Weintraub, Alejandro Carmash, Felipe Chaigneau*
- Predicción de Fugas de Clientes para una Institución Financiera mediante Support Vector Machines 49  
*Jaime Miranda, Pablo Rey, Richard Weber*
- Preprocesamiento Efectivo de un Problema de Minimización de Combustible en Sistemas de Transporte de Gas Natural 69  
*Yanet Villalobos Morales, Roger Z. Ríos Mercado*

Publicada por el  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

R E V I S T A  
**INGENIERIA DE SISTEMAS**

ISSN 0716 - 1174

EDITOR

**Rafael Epstein**

*Departamento de Ingeniería Industrial,  
Universidad de Chile*

EDITOR ASOCIADO

**Guillermo Durán**

*Departamento de Ingeniería Industrial,  
Universidad de Chile*

AYUDANTE DE EDICIÓN

**Sebastián Souyris**

*Departamento de Ingeniería Industrial,  
Universidad de Chile*

COMITÉ EDITORIAL

**Sergio Maturana**

*Universidad Católica de Chile*

**Lorena Pradenas**

*Universidad de Concepción*

**Tomislav Mandakovic**

*Universidad de Chile*

**Juan Carlos Sáez**

*JCSáez Editor*

**Susana Mondschein**

*Universidad de Chile*

**Ernesto Santibáñez**

*Universidad Católica de Valparaíso*

**Luis Llanos**

*CMPC Celulosa*

**Mario Tala**

*Ministerio de Obras Públicas*

**Miguel Nussbaum**

*Universidad Católica de Chile*

**Jorge Vera**

*Universidad Católica de Chile*

**Víctor Parada**

*Universidad de Santiago de Chile*

**Jorge Yutronic**

*KYBER*

Financiado parcialmente por el Proyecto Núcleo Milenio "Sistemas Complejos de Ingeniería", como reconocimiento a la difusión de las materias abordadas y de sus participantes.

Las opiniones y afirmaciones expuestas representan los puntos de vista de sus autores y no necesariamente coinciden con los del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile.

Instrucciones a los autores:

Los autores deben enviar 2 copias del manuscrito que desean someter a referato a: Comité Editorial, Revista Ingeniería de Sistemas, Av. República 701, Santiago, Chile. Los manuscritos deben estar impresos en hojas tamaño carta, a doble espacio, deben incluir un resumen de no más de 150 palabras, y su extensión no debe exceder las 30 hojas. Detalles en [www.dii.uchile.cl/](http://www.dii.uchile.cl/) ris

Los artículos sólo pueden ser reproducidos previa autorización del Comité Editorial y de los autores.

Correo electrónico: [ris@dii.uchile.cl](mailto:ris@dii.uchile.cl)

Web URL: [www.dii.uchile.cl/](http://www.dii.uchile.cl/) ris

Representante legal: Rafael Epstein

Dirección: República 701, Santiago, Chile.

Diagramación: Sebastián Souyris

Impresión: K2 Diseño e impresión

Mail: [contacto@ka2.cl](mailto:contacto@ka2.cl)

---

## Carta Editorial Volumen XIX

---

Nos es muy grato editar este nuevo número de la Revista de Ingeniería de Sistemas (RIS) dedicado a temas de frontera en Gestión y Tecnología. Queremos agradecer al Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile y al Núcleo Milenio "Sistemas Complejos de Ingeniería" por su colaboración para hacer posible esta publicación.

Este número contiene artículos sobre temas de gran importancia en la gestión de las empresas modernas. La revista incluye trabajos sobre la aplicación de técnicas modernas de Gestión de Operaciones, Finanzas y *Data Mining*.

El gran interés por publicar en la RIS nos demuestra la vigencia de un proyecto que lleva más de 25 años. Nuestro objetivo es contribuir a la generación y difusión de las tecnologías modernas de administración. La revista pretende destacar la importancia de generar conocimiento en tecnología y administración para nuestras problemáticas, junto con adaptar las tecnologías foráneas a las realidades de nuestro país y de otros similares.

Estamos seguros de que los artículos publicados en esta oportunidad muestran formas de trabajo innovadoras que serán de gran utilidad e inspiración para todos los lectores, ya sean académicos o profesionales, por lo que esperamos que esta iniciativa tenga la recepción que se merece.

Rafael Epstein  
Guillermo Durán  
*Editores*

---

# EL MODELO CAPM PARA DISTINTOS HORIZONTES DE TIEMPO

---

VIVIANA FERNÁNDEZ\*

## Resumen

*En este trabajo nos centramos en la estimación del modelo CAPM, para distintos horizontes de tiempo, con información de la Bolsa de Comercio de Santiago. Nuestra muestra comprende 24 acciones que fueron activamente transadas en el período 1997-2002. Concluimos que el CAPM tiene un mayor valor de predicción en el mediano plazo. Por otra parte, analizamos el efecto de la dimensional temporal sobre el cálculo del valor en riesgo (VaR) de un portafolio de activos. Concluimos que el VaR depende del horizonte temporal del inversionista. En efecto, en el corto plazo, las pérdidas potenciales son mayores que en el largo plazo. Nuestros resultados están en la línea de investigación reciente en el área de valoración de activos que resalta la importancia de la heterogeneidad de los inversionistas.*

**Palabras Clave:** Wavelets; CAPM; valor en riesgo.

---

## 1. Introducción

---

El modelo de valoración de activos (CAPM) establece que el premio por riesgo de un activo es igual a su beta multiplicado por el premio por riesgo del portafolio de mercado. El beta mide el grado de co-movimiento entre el retorno del activo y el retorno del portafolio de mercado (el IPSA, por ejemplo). Sin embargo, en los últimos años, el CAPM ha sido cuestionado por varios estudios empíricos. Por ejemplo, Fama y French (2002) anunciaron la "muerte" del beta. Sobre la base de una muestra para 1963-1990, los autores concluyeron que el beta tiene un bajo valor de predicción del retorno de una acción. Otros

---

\*Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile. La autora pertenece al Centro de Gestión (CEGES) y al Centro de Economía Aplicada (CEA), ambos del DII. E-mail: vfernand@dii.uchile.cl. Dirección postal: Avenida República 701. Santiago-Chile.

factores, tales como la razón bolsa/libro y el tamaño de la firma, resultaron ser más relevantes a la hora de explicar los retornos accionarios.

Kothari y Shanken (1998) concluyen, sin embargo, que los resultados de Fama y French dependen, en gran medida, de la utilización de datos mensuales. Kothari y Shanken argumentan que el uso de retornos anuales para la estimación de los betas ayuda a soslayar problemas de medición causados por transacciones asincrónicas, estacionalidad en los retornos y fricciones de mercado. Sobre la base de retornos anuales para el período 1927-1990, Kothari y Shanken concluyen que los betas son estadísticamente significativos y que otras variables, tal como el tamaño de la empresa, son marginales al momento de explicar los retornos accionarios.

Simultáneamente, otros autores han trabajado en extensiones teóricas del CAPM: el CAPM con impuestos, que toma en consideración el hecho de que los inversionistas tienen que pagar mayores impuestos por aquellas acciones que entregan una alta rentabilidad en dividendos y, por tanto, exigen rentabilidades, antes de impuestos, mayores; el CAPM inter-temporal, que considera un escenario de múltiples períodos; el CAPM de consumo, que establece que los retornos de los activos financieros están altamente correlacionados con el producto agregado, en la medida que los inversionistas se preocupan de suavizar su patrón de consumo durante las contracciones económicas; el modelo de precios de activos internacionales (IAPM), que establece las condiciones bajo las cuales los mercados de capitales estarán en equilibrio (véase Megginson, 1997, para una discusión acabada).

Otro tópico que ha cobrado interés en la literatura empírica del CAPM, y que se relaciona con este trabajo, es el de betas y premios por riesgo cambiantes en el tiempo. Típicamente, los modelos utilizados para tales efectos son aquellos de volatilidad autorregresiva condicionada (GARCH y GARCH-en-media). Un enfoque alternativo, pero prometedor, es el de las “ondas cortas” (wavelets). Las ondas cortas posibilitan descomponer las series históricas en componentes ortogonales, cuyas frecuencias tienen una dimensión temporal. Ello permite cuantificar el grado de correlación entre series financieras, para distintos horizontes de tiempo.

Investigación reciente en el área de valoración de activos toma en consideración la heterogeneidad de los horizontes de tiempo en los mercados financieros. Tal como lo señalan Connor y Rossiter (2005) para el mercado de commodities, los inversores de largo plazo se concentrarán en los fundamentos de los precios, mientras que los inversores de corto plazo reaccionarán a nueva información en un lapso de tiempo corto. Por lo tanto, la dinámica del mercado será el resultado de la interacción de los agentes con distintos horizontes temporales. Es por ello que el enfoque de ondas cortas es una herramienta poderosa para modelar dicha interacción.

En este trabajo, calculamos el beta para una muestra de 24 acciones activamente transadas en la Bolsa de Comercio de Santiago en el período 1997-2002. Definimos dichas acciones como aquellas con una presencia bursátil, promedio del período, mayor o igual a un 87 por ciento. Para un horizonte de 16-32 días, encontramos que el beta promedio fue de 0.75, mientras que para un horizonte de 64-128 días el beta promedio alcanzó a 0.97. Estos cálculos sugieren que el CAPM tiene un mayor valor de predicción en el mediano plazo.

La técnica de ondas cortas también permite relacionar el valor en riesgo de un portafolio y el horizonte de tiempo. La variación de corto plazo de una serie corresponde al componente de detalle (alta frecuencia), mientras que el componente de más largo plazo, al de más baja frecuencia. De acuerdo a ello, el valor en riesgo es mayor para el componente de corto plazo porque éste presenta una mayor volatilidad. A modo de ejemplo, si construimos un portafolio con las 24 acciones antes mencionadas, y con iguales ponderaciones, la mayor parte del riesgo proviene de la variación de corto plazo en el valor del portafolio (30 por ciento).

---

## 2. Conceptos preliminares

---

### 2.1. El modelo CAPM

El modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) establece que la tasa de retorno de equilibrio de todos los activos riesgosos es una función de su covarianza (co-movimiento) con el portafolio de mercado (aquel que reúne a todos los activos riesgosos de la economía). En términos matemáticos, el CAPM dice que el retorno esperado, que se exige a cualquier activo riesgoso, viene dado por:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i E(R_m - R_f) \quad (1)$$

donde  $R_i$  es el retorno del activo  $i$ ,  $R_f$  es la tasa libre de riesgo,  $R_m$  es el retorno del portafolio de mercado, y  $\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$  es el beta del activo. ( $Cov$  y  $Var$  denotan covarianza y varianza, respectivamente).

El término  $(E(R_m) - R_f)$  se denomina premio por riesgo de mercado. Ello, porque representa el retorno, por sobre la tasa libre de riesgo, que demandan los inversionistas para mantener el portafolio de mercado.

La ecuación (1) se puede re-escribir como sigue:

$$E(R_i) - R_f = \beta_i E(R_m - R_f) \quad (2)$$

Esta representación nos dice que el premio por riesgo de un activo es igual a su beta, multiplicado por el premio por riesgo del mercado.

La versión contrastable empíricamente de la ecuación 2 viene dada por:

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i (R_m - R_f) + \varepsilon_i \quad (3)$$

en donde  $\varepsilon_i$  captura aquella porción del riesgo de un activo individual que es diversificable. Esto es, aquel que se puede eliminar cuando se cuenta con una cartera con un número suficientemente grande de activos.

## 2.2. Ondas cortas (wavelets)

El análisis de wavelets es un refinamiento del análisis de Fourier, que se desarrolló hacia el final de la década de 1980. Este ofrece la posibilidad de descomponer señales, imágenes y otro tipo de datos. Las ondas cortas son funciones similares a las funciones seno y coseno, en cuanto a que también oscilan en torno a cero. Sin embargo, tal como su nombre lo indica, las oscilaciones de una onda corta se desvanecen rápidamente en la proximidad de cero, y tienen una localización temporal.

En el área de finanzas, las ondas cortas se han utilizado para cuantificar la correlación existente entre los precios de los activos financieros, para distintos horizontes de tiempo. Referencias recientes en esta área son Gençay, Whitcher y Selçuk (2005), Connor y Rossiter (2005), Lin y Stevenson (2001), Ramsey y Lampart (1998) y Ramsey (2002).

### 3. Descripción de los datos y estimaciones

En esta sección, nos centramos en la estimación del CAPM para distintos horizontes de tiempo, para aquellos activos que se transaron regularmente en la Bolsa de Comercio de Santiago. En particular, escogimos aquellas acciones que se transaron, al menos, el 85 por ciento de los días hábiles comprendidos en la muestra (enero 1997-septiembre 2002). El Cuadro 1 presenta estadígrafos descriptivos para las 24 acciones escogidas. Utilizamos el Índice de Precios Selectivo de Acciones (IPSA) y la tasa nominal a 30 días, como una aproximación del portafolio de mercado y de la tasa libre de riesgo, respectivamente.

Acción	Días transados	Promedio	Mediana	Dev. Std	1 <sup>er</sup> cuartil	3 <sup>er</sup> cuartil	Exceso de curtosis
BESALCO	89 %	-0.001	0.000	0.023	-0.007	0.000	16.8
CAP	95 %	-0.001	0.000	0.020	-0.011	0.008	3.9
CERVEZAS	88 %	0.000	0.000	0.022	-0.007	0.007	13.0
CGE	93 %	-0.001	0.000	0.029	-0.015	0.010	2.8
CMPC	100 %	0.000	0.000	0.015	-0.008	0.006	2.3
COLBUN	99 %	0.000	0.000	0.022	-0.001	0.000	3.0
COPEC	100 %	0.000	0.000	0.018	-0.009	0.009	2.8
CTC-A	100 %	-0.001	0.000	0.021	-0.012	0.009	5.7
CUPRUM	96 %	0.000	0.000	0.019	-0.006	0.006	7.2
CHILECTRA	92 %	-0.001	0.000	0.017	-0.008	0.005	7.0
D&S	98 %	0.000	0.000	0.024	-0.010	0.010	12.7
ENDESA	100 %	-0.001	0.000	0.019	-0.010	0.009	8.5
ENERSIS	100 %	-0.001	0.000	0.021	-0.011	0.009	4.1
ENTEL	100 %	0.000	0.000	0.020	-0.011	0.009	3.1
FALABELLA	99 %	0.000	0.000	0.019	-0.010	0.009	4.9
GASCO	89 %	0.000	0.000	0.017	-0.002	0.003	5.1
IANSA	99 %	-0.001	0.000	0.025	-0.015	0.003	3.5
LAN	86 %	0.000	-0.001	0.014	-0.007	0.006	6.3
MASISA	94 %	-0.001	0.000	0.022	-0.010	0.009	3.9
ORO BLANCO	93 %	-0.001	0.000	0.029	-0.015	0.010	2.8
PARIS	93 %	0.000	0.000	0.019	-0.010	0.007	6.4
SAN PEDRO	98 %	0.000	0.000	0.016	-0.006	0.007	5.1
SM-CHILE B	97 %	0.000	0.000	0.022	-0.001	0.000	14.1
SQM-B	89 %	-0.001	0.000	0.023	-0.010	0.009	34.8
IPSA (Mercado)	100 %	0.000	-0.001	0.013	-0.007	0.006	6.2

Cuadro 1: Estadígrafos descriptivos de los retornos por sobre la tasa libre de riesgo

Dado que trabajamos con información diaria, las escalas de las wavelets son tales que: la escala 1 se asocia con las fluctuaciones de 2-4 días de una serie de datos, la escala 2 con las fluctuaciones de 4-8 días, la escala 3 con las fluctuaciones de 8-16 días, la escala 4 con las fluctuaciones de 16-32 días, la escala 5 con las fluctuaciones de 32-64 días, y la escala 6 con las fluctuaciones de 64-128 días. La escala 7 corresponde a la dinámica de 128-256 días, esto es,

aproximadamente, un año.

Para fines ilustrativos, el gráfico 1 muestra la variación del retorno del portafolio de mercado, por sobre la tasa libre de riesgo, en las escalas 1 y 6. D1 y D6—que, en el lenguaje de las wavelets, se denominan cristales reconstruidos—describen los movimientos de alta frecuencia (corto plazo) y de más baja frecuencia (más largo plazo)

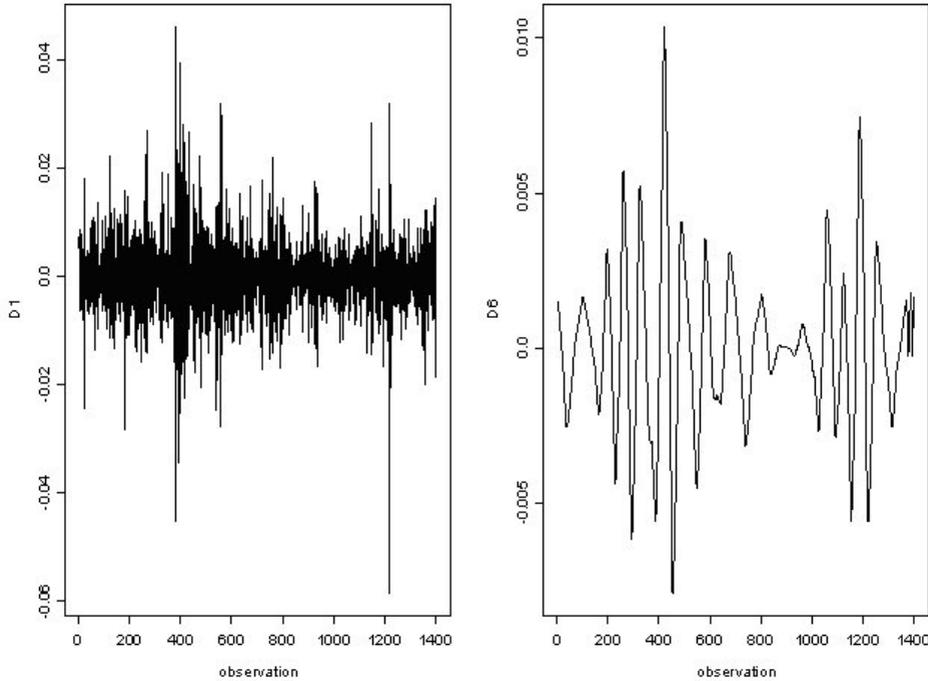


Figura 1: Cristales reconstruidos D1 y D6 del portafolio de mercado, IPSA

El Cuadro 2 muestra nuestros cálculos de los betas para cada acción, para cada una de las escalas temporales ya definidas. Como vemos, la relación entre el retorno del activo y del IPSA se vuelve más fuerte entre mayor sea el horizonte de tiempo.

Esto se ilustra en el Gráfico 2, en donde el cristal reconstruido de CAP se grafica con respecto al cristal reconstruido correspondiente del IPSA: La asociación lineal entre las dos variables es particularmente fuerte en las escalas 2 y 3. Ello evidencia que la fracción de riesgo sistemático, contenido en un activo individual, tiene una mayor asociación con las frecuencias menores del portafolio de mercado (esto es, con la variación de mediano plazo del mercado).

Una aplicación de nuestros resultados es el cálculo del premio por riesgo del portafolio de mercado. Es decir, cuánto más rentó el IPSA que la tasa libre de riesgo. Para el período de la muestra, el premio por riesgo fue nega-

Acción	Beta para cada escala temporal						$R^2$ para cada escala temporal					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
BESALCO	0.281	0.230	0.400	0.535	0.684	1.494	0.036	0.025	0.049	0.075	0.200	0.364
CAP	0.554	0.607	0.773	0.736	0.577	0.721	0.121	0.170	0.316	0.277	0.284	0.296
CERVEZAS	0.283	0.628	0.931	1.074	0.926	1.058	0.032	0.151	0.328	0.346	0.553	0.565
CGE	0.116	0.222	0.231	0.282	0.612	0.486	0.012	0.058	0.077	0.080	0.354	0.288
CMPC	0.516	0.577	0.733	0.549	0.754	0.841	0.168	0.246	0.356	0.246	0.400	0.560
COLBUN	0.600	0.480	0.574	0.459	0.471	0.508	0.087	0.089	0.182	0.147	0.185	0.464
COPEC	0.894	0.846	0.937	0.779	0.872	1.037	0.354	0.388	0.423	0.392	0.513	0.670
CTC-A	1.259	1.358	1.355	1.209	1.330	1.084	0.551	0.613	0.649	0.663	0.802	0.781
CUPRUM	0.298	0.417	0.562	0.893	0.914	1.019	0.038	0.105	0.151	0.264	0.373	0.566
CHILECTRA	0.739	0.726	0.925	0.837	0.803	1.031	0.307	0.339	0.513	0.503	0.488	0.661
D&S	0.899	0.913	0.945	1.335	1.208	1.331	0.204	0.265	0.295	0.498	0.667	0.741
ENDESA	1.192	1.197	1.097	1.060	0.987	1.095	0.533	0.655	0.553	0.593	0.625	0.857
ENERSIS	1.223	1.218	1.180	1.177	1.022	0.937	0.527	0.572	0.586	0.636	0.601	0.579
ENTEL	0.734	0.763	0.744	0.780	0.750	0.936	0.209	0.263	0.223	0.295	0.352	0.618
FALABELLA	0.701	0.845	0.761	0.792	0.904	1.106	0.187	0.319	0.331	0.350	0.476	0.680
GASCO	0.142	0.311	0.313	0.232	0.649	0.674	0.012	0.062	0.093	0.036	0.281	0.385
IANSA	0.914	0.988	0.968	0.848	0.856	0.956	0.170	0.275	0.292	0.249	0.288	0.563
LAN	0.151	0.325	0.553	1.023	0.963	1.347	0.006	0.031	0.064	0.250	0.275	0.434
MASISA	0.466	0.560	0.707	0.944	0.975	1.317	0.074	0.144	0.192	0.352	0.476	0.673
ORO BLANCO	0.572	0.750	0.813	0.626	0.534	0.760	0.054	0.120	0.161	0.148	0.163	0.386
PARIS	0.522	0.699	0.757	0.795	1.032	1.202	0.122	0.242	0.312	0.366	0.571	0.587
SAN PEDRO	0.203	0.486	0.540	0.408	0.675	0.871	0.023	0.168	0.243	0.182	0.450	0.671
SM-CHILE B	0.314	0.194	0.201	0.327	0.380	0.333	0.027	0.016	0.021	0.064	0.121	0.156
SQM-B	0.860	0.988	0.992	0.920	1.179	1.088	0.211	0.339	0.339	0.370	0.549	0.589
<b>Promedio</b>	<b>0.601</b>	<b>0.680</b>	<b>0.750</b>	<b>0.776</b>	<b>0.836</b>	<b>0.968</b>	<b>0.169</b>	<b>0.236</b>	<b>0.281</b>	<b>0.308</b>	<b>0.419</b>	<b>0.547</b>
<b>Dev. Std</b>	<b>0.347</b>	<b>0.324</b>	<b>0.291</b>	<b>0.300</b>	<b>0.238</b>	<b>0.286</b>	<b>0.171</b>	<b>0.182</b>	<b>0.173</b>	<b>0.178</b>	<b>0.175</b>	<b>0.170</b>

Cuadro 2: Beta calculado a partir de los cristales reconstruidos de cada acción y del IPSA

tivo, en promedio, e igual a -9.06 por ciento (base anual). En otras palabras, resultó más rentable invertir en papeles del Banco Central a 30 días o en depósitos bancarios a igual plazo, al menos en promedio. Los resultados se muestran a continuación:

Horizonte de tiempo	Premio por ciento (% anual)
2-4 días	-0,126*
4-8 días	-0,115**
8-16 días	-0,126**
16-32 días	-0,075
32-64 días	-0,002
64-128 días	-0,046

Cuadro 3: Premio por riesgo de mercado para distintos horizontes

Nota: \*: significativo al 5 por ciento; \*\*: significativo al 10%.

De las estimaciones, el premio por riesgo calculado que resulta más próximo al observado y que es estadísticamente significativo, según nuestros cálculos es

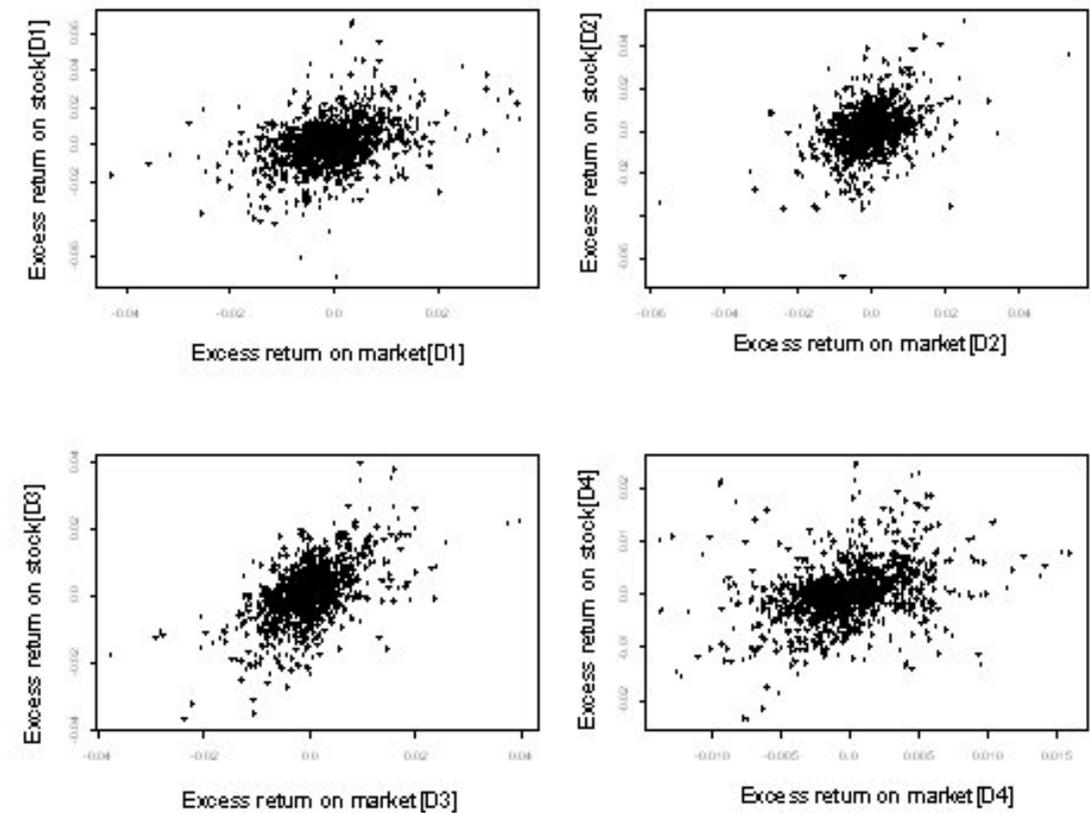


Figura 2: Cristales reconstruidos de CAP y del IPSA

el obtenido por la escala 2 (4-8 días).

---

#### 4. Una aplicación al cálculo del valor en riesgo (VaR)

---

El valor en riesgo (VaR) se define como la máxima pérdida esperada, dado un horizonte de tiempo y un intervalo de confianza. Intenta proporcionar una cantidad, en dinero, que resuma el riesgo total de un portafolio de activos. Se ha convertido en una herramienta popular entre los administradores de fondos de inversiones e instituciones financieras. Aunque se utiliza comúnmente en los mercados financieros desarrollados, ha cobrado mayor relevancia en Chile sólo en los últimos años.

Utilizamos la ecuación (6), descrita en el apéndice, para obtener el valor en riesgo para cada escala de tiempo. Específicamente, el VaR en cada escala

temporal se puede obtener al evaluar la ecuación (6) en la varianza del retorno del mercado, los betas de las  $k$  acciones y las varianzas de los términos de error que capturan el riesgo diversificable, para cada escala correspondiente.

El Cuadro 4 muestra nuestros cálculos. Primero, como habríamos esperado, el valor en riesgo decrece, en general, a medida que la escala temporal aumenta (frecuencias más bajas). Segundo, la contribución al riesgo total es mayor en las escalas menores (alta frecuencia). Esto quiere decir que la pérdida potencial, para un horizonte de un día, es mayor cuando nos centramos en las fluctuaciones de más corto plazo de los retornos. En términos simples, tenemos más oportunidades de ganar dinero, al invertir en acciones, en el mediano y largo plazo.

Horizonte de tiempo	VaR al 95 % (pesos)	Contribución al VaR (%)
2-4 días	0.010	30.04
4-8 días	0.009	25.73
8-16 días	0.008	17.89
16-32 días	0.006	10.68
32-64 días	0.005	7.20
64-128 días	0.005	8.45
Total		99.99

Cuadro 4: Valor en riesgo (VaR) para diferentes horizontes de tiempo

Nota: El VaR representa la pérdida potencial, a un horizonte de un día y a un 95 por ciento de confianza, para una inversión de \$1.

$$\text{minimizar } \sum_{\{(i,j) \in Ac\}} g_{ij}(x_{ij}, p_i, p_j)$$

---

## 5. Conclusiones

---

El modelo CAPM establece que el premio por riesgo de un activo es igual a su beta multiplicado por el premio por riesgo del portafolio de mercado. El beta mide el grado de co-movimiento entre el retorno del activo financiero y el retorno del portafolio de mercado. En los últimos años, el modelo CAPM, en su versión original, ha sido cuestionado por varios estudios empíricos.

Una corriente de la literatura ha permitido que el beta, el premio por riesgo del mercado, o ambos, varíen en el tiempo. Típicamente, los modelos utilizados por esta vertiente son los de volatilidad condicional (GARCH y GARCH en media). Una corriente alternativa y que es la utilizada en este estudio es el análisis de wavelets u ondas cortas. Este constituye una herramienta poderosa

para descomponer series temporales en componentes ortogonales, con distintas frecuencias. Cada una de ellas tiene una locación en el tiempo, lo cual posibilita cuantificar las correlaciones entre series financieras para distintos plazos.

En este trabajo nos centramos en la estimación del modelo CAPM, para distintos horizontes de tiempo, con información de la Bolsa de Comercio de Santiago. Nuestra muestra comprende 24 acciones que fueron activamente transadas en el período 1997-2002. Concluimos que el CAPM tiene un mayor valor predictivo en el mediano plazo. Por otra parte, analizamos el efecto de la dimensional temporal sobre el cálculo del valor en riesgo (VaR) de un portafolio de activos. Concluimos que el riesgo se concentra, en una mayor proporción, en el más corto plazo.

## Referencias

- [1] Connor, J. y R. Rossiter (2005): "Wavelet Transforms and Commodity Prices," *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 9(1), Artículo 6.
- [2] Fama, E. y K. French (1992), "The Cross-section of Expected Returns." *Journal of Finance* 47, páginas 427-465.
- [3] Gençay R., B. Whitcher y F. Selçuk ((2005): "Multiscale Systematic Risk," *Journal of International Money and Finance* 24(1), páginas 55-70.
- [4] Kothari, S. y J. Shanken (1998), "On defense of beta." *The Revolution in Corporate Finance*. J. Stern y D. Chew, editores. Tercera edición, páginas 52-57.
- [5] Megginson, W. (1997), *Corporate Finance Theory*. Addison-Wesley Educational Publishers Inc.
- [6] Lin, Shinn-Juh y M. Stevenson (2001), "Wavelet Analysis of the Cost-of-Carry Model", *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 5(1), páginas 87-102.
- [7] Ramsey J. y C. Lampart (1998), "The Decomposition of Economic Relationships by Time Scale Using Wavelets: Expenditure and Income," *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 3(1), páginas 23-42.
- [8] Ramsey, J. (2002), "Wavelets in Economics and Finance: Past and Future." *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 6(3), 1-29.

---

## Apéndice: Derivación de la fórmula de VaR

---

Sabemos de la ecuación 3 que:

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i(R_m - R_f) + \varepsilon_i \quad i = 1 \dots k \tag{4}$$

Por lo tanto, la varianza del retorno del activo i, por sobre la tasa libre de riesgo, y la covarianza de dicho retorno con el del activo j vienen dados, respectivamente por:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2 \quad i = 1 \dots k$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

donde  $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_\varepsilon^2$  y  $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \forall i \neq j$  ("E" indica valor esperado).

En consecuencia, la matriz que reúne a las varianzas y covarianzas de los retornos de los activos, por sobre la tasa libre riesgo, viene dada por:

$$\Omega = \beta \beta' \sigma_m^2 + E \tag{5}$$

en donde  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{\varepsilon_k}^2 \end{pmatrix}$

En particular, el VaR al  $(1 - \alpha)$  por ciento de confianza de un portafolio de k activos viene dado por:

$$VaR(\alpha) = V_0 l(\alpha) \sqrt{\omega' (\beta \beta' \sigma_m^2 + \mathbf{E}) \omega} \tag{6}$$

donde  $\omega$  es un vector  $k \times 1$  que reúne a las ponderaciones de los activos en el portafolio,  $V_0$  es el valor inicial del portafolio, y  $l(\alpha) = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ , donde  $\Phi(\cdot)$  es la densidad acumulada de una distribución normal estándar.

Para un portafolio conformado por activos en iguales proporciones, esto es,  $\omega_i = 1/k$ , el VaR se reduce a:

$$VaR(\alpha) = V_0 l(\alpha) \sqrt{\sigma_m^2 \left( \sum_{i=1}^k \beta_i/k \right)^2 + \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \sigma_{\varepsilon_i}^2} \tag{7}$$

A medida que el número de activos en el portafolio crece, se tiene que  $VaR(\alpha) \approx Vol(\alpha) \sqrt{\sigma_m^2 \left( \sum_{i=1}^k \beta_i/k \right)^2}$ . Esto es, para un portafolio bien diversificado, el valor en riesgo depende exclusivamente del riesgo sistemático de los activos.

---

# GESTIÓN DE OPERACIONES DE REFINO Y MOLDEO EN LA PRODUCCIÓN DE COBRE

---

LORENA PRADENAS\*  
GINO NÚÑEZ\*  
VÍCTOR PARADA\*\*  
JACQUES FERLAND\*\*\*

## Resumen

*En este estudio se aborda el problema de programación de tareas en equipos de refinado y moldeo, que surge típicamente en una fundición de concentrados de cobre. Para resolver el problema se propone un método heurístico y se implementa un sistema computacional que, mediante una interfaz simple y fácil de usar, permite programar las operaciones con bajo tiempo computacional.*

**Palabras Clave:** Refinado y moldeo; Programación de tareas; Método heurístico.

---

## 1. Introducción

---

Una fundición de concentrados de cobre recibe un flujo de mineral húmedo proveniente de una etapa previa y presenta diversas operaciones típicas, tales como: almacenamiento y preparación de carga, fusión, conversión, refinado y moldeo, limpieza de escorias y absorción de gases (en planta de ácido). En la primera operación, el flujo de mineral húmedo es secado en hornos rotatorios. En la fusión, el flujo de mineral seco es alimentado a reactores donde es sometido a altas temperaturas para su purificación, como resultado se obtiene un producto intermedio que contiene de 62 a 75 % de cobre, el cual es ingresado a la etapa de conversión, donde se realiza una nueva purificación, generando un

---

\*Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Concepción.

\*\*Departamento de Ingeniería Informática, Universidad de Santiago de Chile y Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile.

\*\*\*Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal.

producto, que contiene alrededor de 99 % de cobre. En la operación de refino y moldeo, el concentrado proveniente de conversión es nuevamente purificado en reactores rotatorios y luego vaciado en las ruedas de moldeo generando así los ánodos de cobre que constituyen el producto final. La pureza alcanzada en esta etapa es de aproximadamente 99,6 a 99,7 %. Las escorias remanentes generadas en los procesos de fusión y conversión son también purificadas con el fin de recuperar el cobre disponible; otros remanentes no purificados son considerados subproductos. Paralelamente, los gases ricos en azufre son, en general, absorbidos en una planta de producción de ácido sulfúrico.

En particular, el concentrado de cobre fundido proveniente desde la etapa de conversión es transportado y luego se alimenta a los reactores de refino con cucharas de grandes dimensiones y desplazadas por medio de un puente-grúa. La operación de refino es realizada en un conjunto de reactores con diferentes capacidades.

Para el carguío de un determinado reactor (horno) de refino, éste debe estar en operación, no encontrarse procesando otra carga y debe haber transcurrido al menos un tiempo predefinido desde que se descargó en el último moldeo.

Una vez cargado el horno, y según las indicaciones metalúrgicas, se realiza el proceso de refino que básicamente consiste, por un lado, en remover el azufre y arsénico aún presentes en el concentrado y, por otro, eliminar el oxígeno mediante un proceso de reducción. El tiempo de duración de esta operación, depende de la composición del concentrado y puede ser previamente definido.

El moldeo de ánodos de cobre se realiza en moldes fijos, insertos en ruedas giratorias e instalados adecuadamente para facilitar su llenado y vaciado. Los moldes de una rueda pueden ser cargados desde un horno de refino anexo a la rueda pero, al momento de su carga, sólo puede recibir desde un único horno.

Al descargar un horno, el cobre es vertido en los moldes de la rueda, la cual gira periódicamente y dispone de otros moldes para ser llenados. Durante el giro de la rueda con moldes llenos, éstos son refrigerados con agua hasta alcanzar el sector donde son descargados automáticamente. Antes de volver a llenar los moldes, éstos son rociados con antiadherentes. Esta forma de operar configura un proceso batch tanto para los hornos como para las ruedas de moldeo.

Suponemos que en promedio los ánodos moldeados tienen una masa aproximada de 400 kilogramos y que, la velocidad de la rueda y las condiciones tecnológicas permiten moldear a un flujo aproximado de 50 toneladas por hora. Antes de moldear, una rueda es sometida a una operación de preparación, algunas de estas preparaciones pueden ser evitadas realizando lo que se conoce como “encadenamiento”, donde se programan las descargas de los hornos de manera de hacer coincidir el inicio de uno con el término del horno adyacente. De esta forma, al finalizar con el cobre proveniente de un horno se comienza

el moldeo del otro, sin detener la rueda y por lo tanto sin realizar una nueva preparación.

En ocasiones cuando los equipos de conversión deben ser descargados y no existe disponibilidad de equipos de refinado y moldeo, y priorizando las operaciones de conversión que tiene características de “cuello de botella” se realiza una operación denominada “levantamiento de carga”. Ésta consiste en la detención del refinado, ingresando el cobre proveniente de conversión; de esta forma se inicia un nuevo refinado y a continuación, el moldeo correspondiente.

Un diagrama de operaciones con una unidad de refinado y moldeo es presentado en la figura 1. Anexados a cada rueda de moldeo existen dos hornos de refinado, proporcionando descargas independientes.

Para obtener el máximo rendimiento de los equipos involucrados en el refinado y moldeo, es necesario que las operaciones se realicen coordinadamente durante un periodo de planificación, es decir, debe sintonizarse simultáneamente: el manejo del puente-grúa, el carguío de los hornos, los ciclos de refinado, el carguío de los moldes, la definición sobre la relación horno-molde, etc. La complejidad de esta coordinación hace que, en general, exista una tendencia a tratar la actividad manualmente, o sea, dejando a cargo de los diferentes turnos laborales la programación de las actividades en tiempo real, usando incluso radios o teléfonos para la comunicación entre los operadores. Como resultado, se generan una serie de dificultades que se traducen en ineficiencias en las operaciones, como por ejemplo no disponibilidad de: puente-grúa, horno de refinado a ser cargado, rueda de moldeo, etc. A partir de esto, surge el problema de la Programación automática de Operaciones en el Refinado y Moldeo de una fundición de concentrados de cobre (PORYM). La resolución eficiente de este problema requiere de un adecuado modelo para el problema, de la selección y diseño del algoritmo, de la definición de la captura y almacenamiento de datos y resultados y de la construcción de una herramienta computacional orientada al tipo de usuario.

En una primera aproximación, el PORYM puede ser visto como un problema de programación de tareas en máquinas paralelas, que ha sido ampliamente estudiado en la literatura (Blazewicz 1991 y 1993; Pinedo, 1995). Sin embargo, las características propias de los procesos involucrados en las operaciones nos conducen a un modelo matemático mixto (Núñez, 2004), con función objetivo no lineal. El modelo resultante es del tipo:  $P|prec, rj| \sum Cj$  perteneciendo, a la familia de problemas NP-hard (Gram. et al., 1979).

En general, los problemas de máquinas paralelas presentan dos dimensiones: localización y secuenciamiento o sea, no sólo se debe conocer el orden de las tareas a procesar sino también en la máquina en la cual se realiza cada operación. La medida de desempeño, minimizar el *makespan* ha sido ampliamente utilizada, como por ejemplo, cuando las tareas son dependientes o independientes (Baker, 1974, Bank y Werner, 2001; Chekuri et al., 2001).

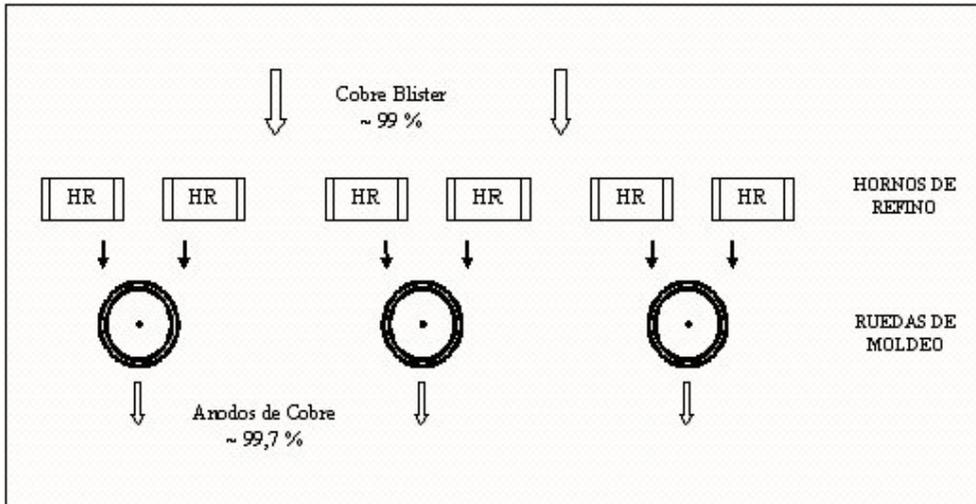


Figura 1: Equipos de refinado y moldeo

En la sección 2 se establece una heurística de solución que utiliza un enfoque de búsqueda basada en restricciones, implementada en el lenguaje de programación C++. La interfaz gráfica diseñada permite obtener como resultado final una *carta gantt*, en la cual se dibuja la solución presentada por la heurística. En la sección 3 se presentan los resultados y algunos diagramas del sistema implementado y finalmente en la sección 4 se presentan las principales conclusiones del estudio.

## 2. Procedimiento de solución

Dado que el problema en estudio pertenece a la clase NP-Hard y una formulación basada en programación entera no-lineal exige varios centenares de variables (Núñez, 2004), en este artículo se presenta un método heurístico que genera una solución de buena calidad en un bajo tiempo computacional. Esta heurística es la que debe ser incrustada en la herramienta computacional para resolver el problema planteado.

Siguiendo la analogía con los problemas de asignación de tareas en máquinas paralelas, se considera que una tarea es un ciclo que contiene el carguío de un horno y las correspondientes etapas de refinado y moldeo. Además, se considera que tales ciclos deben ser asignados a máquinas, en este caso, hornos de refinado.

**Algoritmo 1.**

Inicio

Ordenar tareas  $J_i$  por tiempos de operación  $a_i$  en forma no - creciente,  
 Sub - ordenar tareas  $J_i$ , con igual  $a_i$ , por tiempo de arribo  $r_i$  en forma  
 no - decreciente,

Mientras exista alguna tarea  $J_i$  sin asignar

Si el tiempo  $a_i$  es suficiente para ser asignada a  $M_n$

$q = 0$

Mientras  $J_i$  no ha sido asignada y  $q \leq b$

Si  $M_{n-q}$  está disponible, asignar a  $M_{n-q}$  en  $t = r_i$

Si no hacer  $q = q + 1$

Fin Mientras

Hacer  $G = M_1, M_2, \dots, M_n$

Mientras  $J_i$  no ha sido asignada y  $G \neq \emptyset$

Buscar en  $G$  la máquina  $M_k$  que sea liberada más temprano

Si  $J_i$  tiene el tiempo  $a_i$  para ser asignada a  $M_k$

Asignar  $J_i$  a  $M_k$  en el  $t = \text{máx}\{\text{liberación de } M_k, r_i\}$

Si no hacer  $G = G - \{M_k\}$

Fin mientras

Fin Mientras

Fin

El algoritmo 1 describe el procedimiento de solución en pseudo-código. Primero las tareas son ordenadas con respecto a su flexibilidad para ser asignadas a las máquinas, o sea, las tareas con mayor tiempo de operación (menor flexibilidad), es decir, las cargas con mayor número de ollas, tienen mayor prioridad y deben ser asignadas a hornos de mayor capacidad, mientras que las de tamaño medio pueden ser cargadas en cualquiera de los hornos. En un segundo ordenamiento, los trabajos con igual tiempo de operación son ordenados en forma no-decreciente con respecto a su tiempo de arribo. Ambos ordenamientos se reflejan en la inicialización del algoritmo.

El algoritmo tiene un ciclo principal (Mientras) dentro del cual se realizan dos etapas. En la primera, reflejada en la instrucción Si y el ciclo anidado Mientras, se analiza la factibilidad de asignar la primera tarea de la lista a alguna de las  $b$  máquinas (hornos) con mayor capacidad. Con este fin, se verifica que la máquina se encuentre libre para asignar el trabajo en su tiempo de arribo, o sea, que no se interrumpa con otra tarea ya asignada a la misma máquina, o con la actividad de preparación del horno o finalmente, con una posible utilización de la rueda de moldeo por alguna tarea en el horno adyacente. Siendo posible, se debe realizar la asignación.

En la segunda etapa de búsqueda (ciclo anidado Mientras), se determina la máquina que queda disponible más temprano, en función de las asignaciones que ya se han realizado y considerando todas las restricciones de interrupción de las tareas. Si por tamaño es factible procesar el trabajo en esa máquina, la asignación es realizada en el tiempo mayor entre la liberación de la máquina y el tiempo de arribo de la tarea. Si por tamaño no es posible asignarla se busca la máquina restante, que presente el menor tiempo de liberación. El proceso se repite hasta que todas las tareas son asignadas.

La propagación de restricciones que dificulta la asignación de las tareas en las máquinas es analizada cada vez que se busca el tiempo de liberación de una máquina, considerando tanto las tareas que ya han sido programadas como las que todavía se deben asignar.

El algoritmo propuesto es polinomial, específicamente de orden  $m(n \log n + \log m + n)$ , donde  $m$  es el número de tareas a asignar y  $n$  es el número de máquinas disponibles.

---

### 3. Resultados

---

Los resultados de la heurística son evaluados, comparándolos con la situación que realmente ocurre en una planta típica para un periodo de 30 días (Tabla 1). En la primera columna se indica el día del registro, en la segunda, la producción diaria (tons), en la tercera, se indica el número de hornos que participaron en la producción diaria, mientras que en la cuarta columna, se presenta el número de hornos programados por la heurística para el mismo día, bajo las mismas condiciones operacionales. En las dos últimas columnas se muestra el tiempo total de procesamiento sumado para todas las tareas realizadas o programadas. Se observa que en todos los casos la programación generada por el algoritmo es más eficiente que lo que realmente ocurrió en esos días. Con un tiempo de flujo menor o igual, se utilizan menos hornos.

Las figuras 3 y 4 presentan imágenes de algunas de las pantallas del sistema computacional desarrollado. Específicamente, en la figura 3 se muestra el ingreso de algunos parámetros operacionales tales como la capacidad y tiempos de preparación para los hornos de refino, así como, la velocidad y tiempos de preparación de las ruedas de moldeo. Adicionalmente, se muestra los campos diseñados para la entrada de datos que indica las detenciones programadas de los hornos que deben ser consideradas en el período de programación.

La figura 4 presenta una *Carta Gantt* con la programación resultante para un día de operación. En ésta se observa la operación de los hornos de refino n° 2, 6 y 8 con sus correspondientes ciclos de proceso. Se observa que los hornos 1 y 7 se encuentran fuera de operación; en el borde superior se muestra un diseño

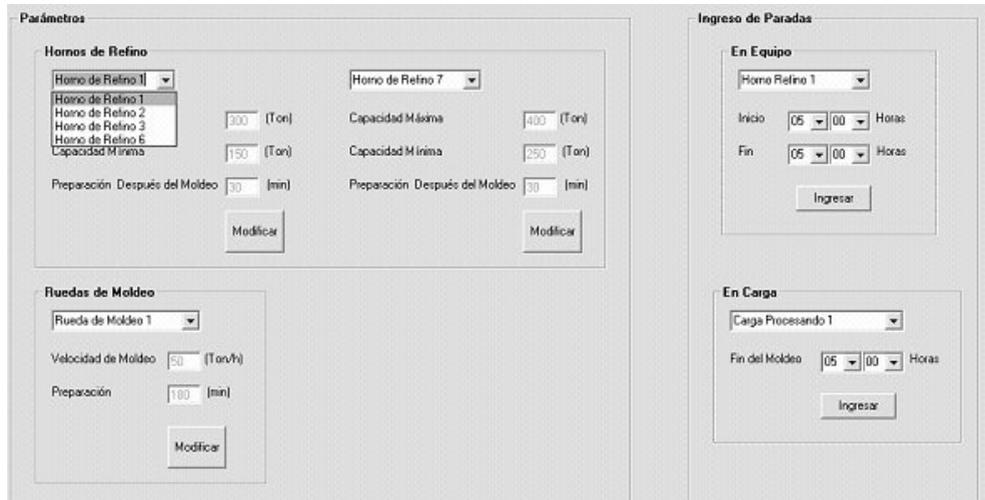


Figura 2: Pantalla de ingreso de parámetros al sistema

que corresponde al instante en que las ollas con concentrado proveniente de los convertidores hacen su arribo a la unidad de refino y moldeo. En cada ciclo se describen las tres etapas con colores diferentes. El ciclo es localizado en correspondencia con la hora de inicio y término del procesamiento.

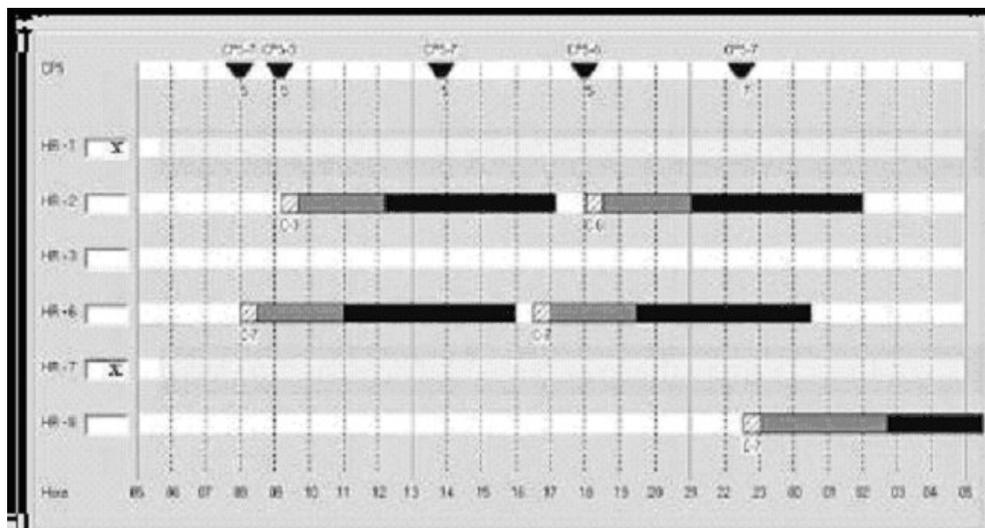


Figura 3: Carta Gantt de programa

Día	Producción (Ton)	N° Hornos utilizados	N° Hornos Programación	Tiempo flujo Real (min)	Tiempo flujo Programado (min)
1	1400	4	3	2640	2610
2	1350	4	3	2700	2460
3	1000	4	4	2280	1860
4	900	4	3	2040	1848
5	1500	5	3	2880	2880
6	2000	5	3	4020	3840
7	2250	5	5	4440	4350
8	2000	5	4	3950	3930
9	2250	5	4	4430	4410
10	1500	4	2	2900	2880
11	1750	3	3	3360	3360
12	1750	4	3	3690	3360
13	2000	5	4	4010	3840
14	2050	4	3	4090	4036
15	1950	4	2	5680	5484
16	1350	4	3	2630	2450
17	2000	4	3	4000	3840
18	1500	6	3	2890	2880
19	2250	6	5	4460	4350
20	900	5	3	2010	1848
21	2000	5	4	3950	3930
22	2000	4	3	4050	3880
23	1500	4	3	2910	2900
24	2250	4	4	4430	4410
25	1350	4	3	2700	2460
26	2000	5	4	4030	3840
27	2000	5	3	4000	3900
28	2400	5	4	6500	6178
29	1000	5	4	2160	1880
30	2000	5	4	3940	3930

Cuadro 1: Comparación de resultados alcanzados con algoritmo y con datos de operación

---

## 4. Conclusiones

---

En este estudio se propone un algoritmo para resolver el problema de asignación de tareas en el proceso de refinado y moldeo de una fundición de concentrados de cobre. Además, se describe una herramienta computacional que permite programar las actividades diarias de la planta. El problema teórico resultante tiene características adicionales a los típicamente tratados en la literatura de scheduling, debido a las características propias del proceso

metalúrgico involucrado.

El algoritmo propuesto mejora la gestión de las operaciones en la producción de cobre, para el periodo en estudio. No tan sólo obtiene la misma producción en un menor tiempo de flujo sino que, utilizando menos hornos. El sistema computacional desarrollado permite un manejo fácil de las operaciones desde un computador personal. No es necesario que el usuario tenga un conocimiento sobre métodos o técnicas de optimización combinatoria para poder simular escenarios de producción bajo cualquier conjunto de condiciones operacionales.

**Agradecimientos** Este trabajo se realizó con el apoyo parcial del Proyecto Fundación Andes-Chile, C- 13955/18 y del Proyecto DIUC - 204.097.007-1.0. El tercer autor recibió financiamiento del “Núcleo Milenio Sistemas Complejos de Ingeniería”P04-066-F.

## Referencias

- [1] Baker, K. R. Introduction to Sequencing and Scheduling, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [2] Bank, J. y Werner, F. Heuristic Algorithms for Unrelated Parallel Machine Scheduling with a Common Due Date, Release Dates, and Linear Earliness and Tardiness Penalties, *Mathematical and Computer Modeling*. 33, 2001, 363 - 383.
- [3] Blazewicz, J., Dror, M. y Weglarz, J. Mathematical Programming Formulations for Machine Scheduling: A Survey. *European Journal of Operational Research*. 51. 1991, 283 - 300.
- [4] Blazewicz, J., Ecker, K. H., Schmidt, G. y Weglarz, J. Scheduling in Computer and Manufacturing System,. Springer-Verlag, 2ª edición, Berlin, 1993.
- [5] Chekuri, C., Motwani, R., Natarajan, B. y Stein, C. Approximation techniques for average completion time scheduling, *SIAM Journal on Computing*, 31, 2001, 146 - 166.
- [6] Graham, R.L., Lawler, E.L., Lenstra, J.K. y Rinnooy Kan, A.H.G. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling theory: a survey, *Annals of Discrete Mathematics*, 5, 1979.
- [7] Nuñez, G. Optimización en la Programación de las Operaciones de Refino y Moldeo en la Fundición de Concentrados de Cobre de Chuquicamata. Memoria de Título para optar al Título de Ingeniero Civil Industrial, Universidad de Concepción, Chile, Enero 2004.

- [8] Pinedo, M. Scheduling: Theory, Algorithms and Systems. Prentice Hall, New Jersey, 1995.

---

# PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA APLICADA AL FIXTURE DE LA PRIMERA DIVISIÓN DEL FÚTBOL CHILENO

---

GUILLERMO DURÁN\*

MARIO GUAJARDO\*

JAIME MIRANDA\*

DENIS SAURÉ\*

SEBASTIÁN SOUYRIS\*

ANDRÉS WEINTRAUB\*

ALEJANDRO CARMASH\*\*

FELIPE CHAIGNEAU\*\*

## Resumen

*El campeonato de la primera división del fútbol chileno consta de 20 equipos que deben enfrentarse todos contra todos a lo largo de 19 fechas. La construcción de un fixture para la programación de cada fecha no es una tarea fácil, dado que las múltiples condiciones que necesita satisfacer lo convierten en un problema combinatorial de difícil resolución. Estas condiciones tienen que ver con lograr mayores beneficios económicos para los clubes, establecer mecanismos de equilibrio deportivo, hacer el torneo más atractivo para el público y cumplir con las exigencias de la Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP), institución que dirige y organiza el campeonato. En este artículo mostramos cómo se confeccionó el fixture utilizado en el Campeonato Apertura 2005, modelado usando un enfoque de programación matemática entera.*

**Palabras Clave:** fixture; programación entera, *sports scheduling*.

---

\*Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile.

\*\*Asociación Nacional de Fútbol Profesional, Chile.

---

## 1. Introducción

---

La Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP) es la institución que administra, organiza y dirige al fútbol chileno. Dentro de las responsabilidades de esta asociación está la confección del fixture de la Primera División.

En el fútbol chileno se juegan dos campeonatos al año, los cuales son llamados Apertura y Clausura. Cada campeonato se realiza en dos etapas: fase clasificatoria y fase de *playoffs*.

Los 20 equipos de Primera División están divididos en 4 grupos de 5 equipos cada uno, pero a pesar de ello en la fase clasificatoria deben enfrentarse todos contra todos a lo largo de 19 fechas, sumando cada uno sus puntos para su respectivo grupo. Al finalizar esta fase, los dos primeros de cada grupo se clasifican para la fase de *playoffs*, que es donde se define el campeonato.

Un buen fixture puede ser un significativo aporte al campeonato chileno, haciéndolo más rentable para los clubes, más atractivo para el público y deportivamente más equilibrado. Algunos ejemplos pueden ser: aprovechar fechas programadas con pocos días de separación para que un equipo juegue dos partidos de visita consecutivos en zonas cercanas entre sí, pero alejadas de su lugar de origen; elegir lugares turísticos en fechas de verano para partidos atractivos; ubicar los clásicos en fechas apropiadas; intentar que los partidos entre equipos del mismo grupo se jueguen hacia el final del campeonato; conseguir que cada equipo juegue en forma balanceada de local o visita frente a los equipos más poderosos, etc.

Hasta el año 2004 la construcción del fixture se hacía mediante el sorteo de los lugares en una plantilla establecida de antemano, como se hace prácticamente en todos los torneos de fútbol de Sudamérica y Europa. Al analizar los fixtures de campeonatos pasados se observa numerosas deficiencias en su programación, haciendo los torneos menos atractivos para el público, menos rentables para los clubes y desbalanceados deportivamente.

Las deficiencias más notables fueron las siguientes: partidos *clásicos* en fechas inconvenientes; no consideración de la participación de clubes chilenos en competencias internacionales; equipos denominados *chicos* enfrentando siempre de visita en un mismo campeonato a los equipos más poderosos; desbalance en las localías en días miércoles (los clubes prefieren no jugar de local en días de semana, porque la recaudación suele ser menor); no aprovechamiento de lugares turísticos para partidos atractivos; no aprovechamiento de fechas entre-semana para jugar en lugares alejados dos partidos consecutivos, ahorrando un viaje, etc.

A partir de este análisis y teniendo en cuenta el amplio desarrollo que el *sports scheduling* está teniendo a nivel mundial, es que se acordó que el Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile realizaría el fixture de la Primera División del fútbol chileno con el objetivo final de tener un mejor fixture.

En este trabajo se describe la experiencia puesta en práctica y las técnicas matemáticas utilizadas en la confección del fixture.

La estructura del trabajo es la siguiente: el Capítulo 2 da una visión general del estado del arte mostrando los principales enfoques utilizados en este ámbito; el Capítulo 3 muestra los distintos requerimientos de los clubes; el Capítulo 4 describe la metodología utilizada para la creación del fixture y los resultados obtenidos y, por último, el Capítulo 5 da las principales conclusiones y las líneas para futuros desarrollos.

---

## 2. Estado del Arte

---

La generación de fixtures para campeonatos es un problema difícil de resolver debido a la gran cantidad de requerimientos que se deben satisfacer. En su forma más básica el problema consiste en  $n$  equipos (con  $n$  par) que deben enfrentarse unos contra otros  $k$  veces. Para organizar estos  $\frac{n}{2}(n-1)k$  partidos, hay  $(n-1)k$  fechas disponibles. En cada una de estas fechas, todos los equipos deben jugar un partido. Entonces, para cada fecha  $t = 1, \dots, (n-1)k$ , hay que determinar qué equipos juegan entre sí y quién juega de local. A este problema se le conoce como *Round Robin Tournament Problem* (RRTP). Si  $k = 1$  entonces se trata de un *Single RRTP* y si  $k = 2$  se le llama *Double RRTP*. En este último caso el campeonato puede ser espejado (es decir, se mantiene el orden de los partidos invirtiendo las localías) o no espejado.

Henz et al. [17, 19, 20] utilizan diversas técnicas de *Constraint Programming* (CP) para resolver este problema, Trick [25] propone una combinación entre Programación Entera y CP, Urban y Russell [26] incorporan diferentes funciones objetivos a cumplir, aplicando *goal programming*, de Werra [8, 9, 10] modela el problema con teoría de grafos inspirado en el problema de un liga de basketball. Schaerf [23] utiliza CP con una aproximación de dos etapas: la primera, la creación de patrones del torneo y la segunda, un problema de asignación.

Como casos aplicados de estos problemas están los de Della Croce et al. [7] que resuelve el fixture para un torneo de tenis utilizando *Tabu Search*, Nemhauser y Trick [21], para la liga de basketball universitaria de la Conferencia de la Costa Atlántica de Estados Unidos resolviéndolo con una aproximación de tres etapas: en la primera se genera una colección de patrones local/visita,

en la segunda se agrupan los patrones en un fixture factible, y en la tercera se asignan los equipos al fixture, todo bajo un esquema de Programación Entera. Luego Henz [18] propone una mejora en la performance de este esquema resolviendo cada una de las etapas con *CP*.

Entre las variantes de este tipo de problemas se encuentra el diseño de un torneo balanceado, *Balanced tournament design problem* (BTDP), donde hay estadios comunes en que deben ser jugados los encuentros. El BTDP es similar al SR RTP, cada equipo debe jugar contra otro exactamente una sola vez, pero se requiere que los partidos jugados por cada equipo sean igualmente distribuidos entre todos los estadios disponibles. Aggoun y Vazacopoulos [1] resuelven este problema con *CP*. Anderson en su libro [3] estudia aspectos teóricos del problema y propone métodos constructivos para resolver el problema. Dinitz et al. [11] estudia la complejidad del problema, enumerando la cantidad de torneos posibles para ligas con hasta 10 equipos. Hamiez et al. [15] resuelve el problema para grandes ligas, con hasta 40 equipos, usando *Tabu Search* y en [16] se resuelve el problema usando un algoritmo de mejoramiento para ligas con  $T$  equipos, tal que  $(T - 1)$  no es múltiplo de 3.

Otra variante del problema muy estudiada en la literatura es el de minimizar las distancias viajadas por los equipos. Bean y Birge [4] resolvieron el problema de la NBA de los Estados Unidos, donde las principales restricciones tienen que ver con el tiempo de descanso y la disponibilidad de los estadios. Costa [6] consideró el problema de la minimización de la suma de las distancias viajadas por los equipos en la NHL de los Estados Unidos y lo resolvió con una metaheurística que combina ideas de algoritmos genéticos y *Tabu Search*.

El interés en esta área creció notablemente a partir de la formulación del *Traveling Tournament Problem* (TTP) por parte de Easton et al. [12]. El TTP consiste en diseñar un fixture que minimice las distancias recorridas por los equipos participantes de una liga deportiva norteamericana. Anagnostopoulos et al. [2] proponen una heurística basada en *Simulated Annealing* y Cardemil et al. [5], una heurística basada en *Tabu Search* para resolver el TTP. Easton et al. [13] proponen una combinación entre Programación Entera y *CP* para encontrar la solución óptima del problema en ligas de hasta 8 equipos. Ribero et al. [22] desarrollan heurísticas para el caso espejado del TTP.

En aplicaciones reales a torneos de fútbol se encuentra la realizada por Schreuder [24] quien mediante teoría de grafos resuelve el problema del campeonato holandés en dos etapas: primero resuelve la minimización del número de patrones con locales o visitas seguidos y luego asigna los equipos.

---

### 3. Requerimientos para el problema del fútbol chileno

---

La literatura de *sports scheduling* muestra diferentes tipos de enfoques de solución ante una gran variedad de requerimientos y objetivos. Nemhauser y Trick [21] analizan la MLB (Major League Baseball) y discuten sus requerimientos (por ejemplo, que cada equipo debe jugar dos veces por semana, o que cada equipo juega 8 veces de local y 8 de visita contra cada uno de los equipos restantes). Ferland y Fleurent [14] analizan la NHL (National Hockey League) y discuten requerimientos como la disponibilidad de estadios, distancias recorridas por los equipos o condiciones como que un equipo no juegue más de dos partidos en tres días.

El campeonato chileno se podría clasificar como un *Double RRTP* si consideramos en conjunto Apertura y Clausura de cada año, o como un *RRTP* si consideramos los torneos por separado (aunque en este último caso, las localías del segundo campeonato quedan fijadas invirtiendo las del primero). En estos torneos cada uno de los 20 equipos juega entonces en 19 ocasiones, 10 veces de local y 9 veces de visita, o viceversa. Esta información nos da la base para la confección del fixture del campeonato.

Junto con estas restricciones generales se incorporan una serie de requerimientos que hacen más compleja la búsqueda de una solución factible. Los requerimientos impuestos se dividen en restricciones duras, que deben cumplirse obligatoriamente, y condiciones blandas, que se espera sean satisfechas para hacer más atractivo y rentable al torneo.

Los requerimientos de los clubes están relacionados con distintos objetivos (intereses económicos, aprovechamiento de lugares turísticos para partidos importantes o evitar muchas visitas seguidas para cada equipo).

También se incorporan al modelo requerimientos específicos sugeridos por la ANFP o por los clubes, como contemplar las fechas de las copas internacionales a fin de programar convenientemente los partidos de los representantes locales; programar algún partido en alguna fecha predeterminada de antemano (como ser, que los finalistas del torneo anterior se enfrenten en la primera fecha para que se suspenda sólo un partido y ambos tengan una semana más de descanso); o, por ejemplo, no hacer jugar a Coquimbo de local contra un equipo grande el día de la fiesta de la Pampilla, porque no habría contingente policial suficiente para cubrir ambos eventos.

Un punto importante es darle el mayor atractivo posible a las fechas del final del campeonato, debido a que en ellas se define la clasificación a los *playoffs* (recordemos que pasan los dos mejores por grupo). Con esa idea se

decide privilegiar los encuentros entre los equipos del mismo grupo para el final del campeonato, los que suelen llamarse “partidos de 6 puntos”.

Cabe destacar que el calendario, o sea los días en que se juega cada fecha, es fijado de antemano por la ANFP, por lo que es un dato de entrada del problema.

### 3.1. Restricciones duras

#### 3.1.1. Restricciones de patrones de localías y visitas

Un patrón corresponde a una combinación particular de fechas de local y visita para un club determinado. Por ejemplo, para 4 fechas cualesquiera un patrón podría ser L-L-V-V o también podría ser V-L-V-L. Cabe destacar que en general el segundo patrón es preferido frente al primero, debido a que las localías/visitas seguidas afectan en forma negativa al campeonato tanto por cuestiones económicas como deportivas.

Las restricciones utilizadas en el modelo son:

- Cada equipo juega 10 fechas de local y 9 fechas de visita en el torneo, o viceversa.
- En las fechas 1–2 cada equipo juega una vez de local y una vez de visita. Esta condición también es impuesta para las fechas 16 – 17 y 18 – 19.
- Cada equipo juega una vez de local y una vez de visita contra los equipos “populares”<sup>1</sup> del campeonato.
- Ningún equipo puede jugar más de dos fechas consecutivas de local ni de visita.
- En cinco fechas consecutivas un equipo no puede jugar cuatro como local.
- Cada equipo no puede jugar en más de una oportunidad dos fechas seguidas como visita durante el campeonato.

#### 3.1.2. Restricciones sobre los equipos

Otro conjunto de requerimientos son los asociados a las características propias de cada equipo, debido a su importancia dentro del campeonato y popularidad. Las restricciones utilizadas son:

- Si un equipo juega de local contra Colo Colo, deberá jugar como visita contra la Universidad de Chile, y viceversa. El mismo criterio será usado para los encuentros con la Universidad Católica y Cobreloa.

---

<sup>1</sup>Universidad de Chile y Colo Colo

- Los partidos entre Colo Colo, Universidad de Chile y Universidad Católica son llamados “clásicos” debido a que son rivales históricos dentro del fútbol chileno. Estos encuentros se jugarán entre las fechas 8 y 17, ya que la idea es no disputarlos al principio del campeonato donde el público aún no entra en clima, ni al final, donde quizás ya no tienen tanta trascendencia.
- Los tres equipos grandes<sup>2</sup> juegan un clásico de local y un clásico de visita.
- No se puede jugar en fechas consecutivas contra los equipos “populares”.
- No se puede jugar en tres fechas consecutivas contra tres de los cuatro equipos “fuertes”.<sup>3</sup>

### 3.1.3. Restricciones geográficas

Las características geográficas y demográficas de Chile hacen necesario considerar los efectos de las distancias y de las zonas con alta afluencia de público en algunas épocas del año. Por ejemplo, deseamos evitar viajes seguidos demasiado largos o aprovechar un partido atractivo usando una localía de alguna zona turística importante en época estival.

Las restricciones utilizadas en el modelo son:

- En cada fecha no pueden haber más de 4 encuentros en Santiago (hay 6 equipos<sup>4</sup> que residen en esta ciudad).
- Se creó un subconjunto de pares de equipos llamados “cruzados”<sup>5</sup>. Los equipos que integran un mismo par de cruzados cumplen la restricción de que cuando uno de ellos es local, el otro deberá ser visita para una fecha en particular, y viceversa. Este criterio apunta a que los equipos en un mismo par de cruzados pertenecen a una misma zona geográfica e incluso a veces comparten el mismo estadio.
- Aprovechamiento de los lugares turísticos para fechas de alta convocatoria de público. Esta condición implica que los equipos de Viña, Valparaíso, Coquimbo y La Serena deberán jugar al menos una vez de local con los 3 equipos “grandes” del país en los meses de enero o febrero. Cabe destacar que un equipo “popular” no puede jugar en la misma semana con equipos de la misma región turística.

<sup>2</sup>Colo Colo, Universidad de Chile y Universidad Católica

<sup>3</sup>Colo Colo, Universidad de Chile, Universidad Católica y Cobreloa

<sup>4</sup>Universidad de Chile, Colo Colo, Universidad Católica, Unión Española, Audax Italiano, Palestino

<sup>5</sup>Colo Colo-Universidad de Chile; Coquimbo Unido-La Serena; Everton-Wanderers; Universidad de Concepción-Deportes Concepción

- Un equipo de la zona centro del país no puede jugar de visita en partidos consecutivos domingo-miércoles o miércoles-domingo, uno en la zona norte y otro en la zona sur. El objetivo es no realizar viajes largos consecutivos para evitar el desgaste de los jugadores.

### 3.2. Condiciones blandas

Se imponen dos condiciones blandas: en un caso, para disminuir costos operativos y en el otro, para tener partidos atractivos hacia el final del torneo, con la intención de aumentar las recaudaciones e incentivar el interés del público por el campeonato.

- A lo largo del torneo debe haber aprovechamientos de viajes en visitas a lugares alejados, involucrando las fechas de los miércoles. Esto significa que un equipo juegue dos partidos consecutivos de visita en lugares alejados de su ciudad y cercanos entre sí, a fin de ahorrarse un viaje en el campeonato.
- Privilegiar los encuentros entre los equipos del mismo grupo en las fechas finales del campeonato.

---

## 4. Metodología y resultados del modelo

---

El problema de hallar un fixture para el campeonato puede clasificarse como un problema de factibilidad, puesto que buscamos una asignación de partidos que cumpla con todos los requerimientos impuestos. En este contexto, nuestro primer paso para confeccionar este fixture consiste en lograr una representación matemática del mismo y, posteriormente, de los requerimientos impuestos, de forma de testear rápidamente la factibilidad de un potencial fixture.

En este contexto consideremos la siguiente variable de decisión:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local contra el equipo } j \text{ en la fecha } k \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Cualquier fixture puede ser representado mediante estas variables, y lo que es más importante, dados los valores para estas variables podemos corroborar si se trata o no de un fixture factible. Para esto debemos representar matemáticamente cada una de las restricciones listadas en la sección anterior. Considerando tan sólo la familia de variables  $x$  podemos representar las siguientes restricciones:

1. Cada equipo juega contra cada uno de los otros equipos exactamente una vez:

$$\sum_k [x_{ijk} + x_{jik}] = 1 \quad \forall i, j \quad i \neq j \quad (1)$$

2. En cada fecha los equipos juegan ya sea de local o de visita:

$$\sum_{j \neq i} [x_{ijk} + x_{jik}] = 1 \quad \forall i, k \quad (2)$$

3. De las 19 fechas, cada equipo juega al menos 9 de local:

$$\sum_{j \neq i} \sum_k x_{ijk} \geq 9 \quad \forall i \quad (3)$$

4. Ningún equipo puede jugar más de dos fechas consecutivas de local:

$$\sum_{j \neq i} [x_{ij(k-1)} + x_{ijk} + x_{ij(k+1)}] \leq 2 \quad \forall i, \quad 1 < k < 19 \quad (4)$$

5. Ningún equipo puede jugar más de dos fechas consecutivas de visita:

$$\sum_{j \neq i} [x_{ji(k-1)} + x_{jik} + x_{ji(k+1)}] \leq 2 \quad \forall i, \quad 1 < k < 19 \quad (5)$$

6. Ningún equipo puede jugar más de tres partidos como local en cinco fechas consecutivas:

$$\sum_{j \neq i} [x_{ij(k-2)} + x_{ij(k-1)} + x_{ijk} + x_{ij(k+1)} + x_{ij(k+2)}] \leq 3 \quad \forall i, \quad 2 < k < 18 \quad (6)$$

Para plantear requerimientos adicionales necesitamos primero definir una serie de conjuntos:

- $g(i)$  : equipos “grandes”
- $a(k)$  : fechas de ajuste (1, 16 y 18)
- $cr(i, j)$  : pares de equipos que deben jugar cruzados
- $cl(i, j)$  : encuentros considerados clásicos
- $ex(i, j)$  : equipos “excluyentes”
- $st(i)$  : equipos que juegan de local en Santiago
- $fr(i)$  : equipos “fuertes”
- $m(k)$  : fechas jugadas a mitad de la semana
- $p(i)$  : equipos “populares”

Con estos conjuntos podemos definir los siguientes requerimientos:

7. Equipos que deben jugar cruzados: Si el equipo  $i$  juega de local en la fecha  $k$ , el equipo  $j$  debe hacerlo de visita (y viceversa).

$$\sum_{h \neq i \neq j} [x_{ihk} + x_{jhk}] = \sum_{h \neq i \neq j} [x_{hik} + x_{hjk}] \quad \forall cr(i, j), k \quad (7)$$

8. Equipos excluyentes: Si el equipo  $h$  juega de local contra el equipo  $i$ , deberá jugar de visita contra el equipo  $j$  (y viceversa):

$$\sum_k [x_{hik} + x_{hjk}] = 1 \quad \forall h \neq i \neq j, ex(i, j) \quad (8)$$

9. Los clásicos se juegan entre la fecha 8 y la 17:

$$\sum_{cl(i,j)} \sum_{(8 > k \vee k > 17)} x_{ijk} = 0 \quad (9)$$

10. Cada equipo grande juega exactamente un clásico de local:

$$\sum_k [x_{hik} + x_{jik}] = \sum_k [x_{hjk} + x_{ijk}] \quad \begin{array}{l} h = \text{U. Católica} \\ i = \text{Colo-Colo} \\ j = \text{U. de Chile} \end{array} \quad (10)$$

11. En cada fecha no se puede jugar más de 4 partidos en Santiago:

$$\sum_{i \in st} \sum_{j \neq i} x_{ijk} \leq 4 \quad \forall k \quad (11)$$

12. Para cada fecha de ajuste, cada equipo debe jugar de local o en esa fecha o en la siguiente:

$$\sum_{j \neq i} [x_{ijk} + x_{ij(k+1)}] = 1 \quad \forall i, k \in a \quad (12)$$

13. Distancia mínima entre partidos versus equipos populares:

$$\sum_{j \in p, j \neq i} [x_{ijk} + x_{jik} + x_{ij(k+1)} + x_{ji(k+1)}] \leq 1 \quad \forall i, k < 19 \quad (13)$$

14. Distancia mínima entre partidos versus equipos fuertes:

$$\sum_{j \in fr, j \neq i} [x_{ijk} + x_{jik} + x_{ij(k+1)} + x_{ji(k+1)} + x_{ij(k+2)} + x_{ji(k+2)}] \leq 2 \quad \forall i, k < 18 \quad (14)$$

Para modelar los requerimientos referentes a los partidos ante equipos populares a jugarse durante el verano, debemos definir previamente los siguientes conjuntos:

- $r$  : regiones turísticas
- $t(i)$  : equipos pertenecientes a regiones turísticas
- $f(k)$  : fechas de verano
- $m(k)$  : fechas jugadas a mitad de la semana
- $rt(r, t)$  : relación entre regiones y equipos turísticos

Así, los requerimientos planteados en la sección anterior pueden escribirse de la siguiente forma:

15. Los equipos turísticos juegan por lo menos una vez con algún equipo grande durante las fechas turísticas:

$$\sum_{k \in f} \sum_{j \in g, j \neq i} x_{ijk} \geq 1 \quad \forall i \in t \quad (15)$$

16. Ningún equipo grande juega en la misma semana dos veces en una misma region turística.

$$\sum_{i \in t, i \in rt(r, i), i \neq j} [x_{ij(k-1)} + 2 \cdot x_{ijk} + x_{ij(k+1)}] \leq 2 \quad \forall j \in g, r, k \in m \quad (16)$$

Consideremos ahora el requerimiento referente a que cada equipo no puede jugar dos partidos consecutivos como visita en más de una ocasión. A priori no es tan directo representar esta restricción usando sólo la familia de variables  $x$ . Por esto, declaramos una nueva variable de decisión.

Sea:

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega la fecha } k \text{ y la } k + 1 \text{ de visita} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Con esta variable podemos representar más fácilmente el requerimiento en cuestión:

17. Cada equipo juega a lo más una vez dos partidos de visita consecutivos.

$$\sum_{k < 19} y_{i,k} \leq 1 \quad \forall i \quad (17)$$

Sin embargo, debemos establecer explícitamente la relación entre las variables  $x$  y las variables  $y$ .

18. Cálculo de la variable  $y$ :

$$\sum_{j \neq i} [x_{ijk} + x_{ij(k+1)}] \leq 1 + y_{ik} \quad \forall i, k < 19 \quad (18)$$

En el mismo contexto, consideremos que los equipos cuando juegan dos partidos consecutivos de visita, preferirán que los lugares a visitar se encuentren relativamente cercanos, sobre todo si se trata de fechas a mitad de semana. Para incorporar esta preferencia debemos aportar más información a nuestra formulación. Consideremos los siguientes conjuntos:

- $c$  : zonas (agrupaciones geográficas de equipos)
- $ci(c, i)$  : relación entre zonas y equipos

Con estos conjuntos podemos modelar las siguientes restricciones geográficas:

19. Evitar partidos “malos” (equipos de zona centro jugando de visita a mitad de semana en el norte (sur) y jugando la fecha anterior o posterior en el sur (norte)):

$$\sum_{j \in ci(Sur, j) \neq i} [x_{ji(k+1)} + x_{ji(k-1)}] + \sum_{h \in ci(Norte, h) \neq i} 2 \cdot x_{hik} \leq 2 \quad \begin{array}{l} \forall i \in ci(Centro, i) \\ \forall k \in m \end{array} \quad (19)$$

$$\sum_{j \in ci(Norte, j) \neq i} [x_{ji(k+1)} + x_{ji(k-1)}] + \sum_{h \in ci(Sur, h) \neq i} 2 \cdot x_{hik} \leq 2 \quad \begin{array}{l} \forall i \in ci(Centro, i) \\ \forall k \in m \end{array} \quad (20)$$

Ahora podemos plantear el problema de encontrar un fixture factible y resolverlo utilizando técnicas de programación lineal entera. En este contexto, debemos presentar una función objetivo que dirija la búsqueda de las soluciones, para lo cual consideramos una de las condiciones blandas. Planteamos un fixture que contenga la mayor cantidad de viajes de equipos que jueguen en forma consecutiva partidos de visita en regiones apartadas de su lugar de

localía. Para esto se introdujo una nueva variable que indica precisamente cuando ocurre esta particularidad.

$$w_{cik} = \begin{cases} 1 & \text{Equipo } i \text{ (del centro) juega fecha } k \text{ y una adyacente de visita} \\ & \text{frente a equipos de zona } c \\ 1 & \text{Equipo } i \text{ de la zona } c \text{ (no del centro) juega fecha } k \text{ y una} \\ & \text{adyacente de visita frente a equipos de otras zonas} \\ 0 & \sim \end{cases} \quad (21)$$

Debemos incorporar restricciones que ligen estas variables al contexto del problema:

20. Cálculo de variables  $w$  (partidos consecutivos de visita de un equipo del centro contra equipos de una misma región):

$$\sum_{j \neq i \vee j \in ci(c,j)} [x_{ji(k+1)} + 2 \cdot x_{jik} + x_{ji(k-1)}] \geq 3 \cdot w_{cik} \quad \begin{matrix} \forall k \in m \\ \forall c \neq \text{centro} \\ \forall i \in ci(i, \text{centro}) \end{matrix} \quad (22)$$

21. Cálculo de variables  $w$  (partidos de visita consecutivos de equipos del sur fuera del sur, o del norte fuera del norte):

$$\sum_{j \neq i \vee j \in ci(c,j)} [x_{ji(k+1)} + 2 \cdot x_{jik} + x_{ji(k-1)}] \geq 3 \cdot w_{cik} \quad \begin{matrix} \forall k \in m \\ \forall c \neq \text{centro} \\ \forall i \in ci(i, c) \end{matrix} \quad (23)$$

De esta forma, y en primera instancia, resolvimos el problema considerando la siguiente función objetivo:

$$\text{máx} \sum_{k \in m} \sum_{c \neq \text{centro}} \sum_i w_{cik} \quad (24)$$

El modelo tiene alrededor de 8000 variables y 3000 restricciones. Utilizando un PC con procesador Pentium 4 de 2.4 Ghz se pudo encontrar un fixture factible con 3 ocurrencias para viajes “buenos”. El tiempo necesario para encontrar una solución inicial fue alrededor de 2 horas. Sin embargo, la optimización demoraba muchas horas, por lo que el procedimiento fue detenido cuando se encontró la solución con función objetivo igual a 3 (consideremos

que el máximo número de aprovechamientos posible es 5, dado que el calendario del torneo Apertura 2005 solamente contaba con una fecha a mitad de semana).

Con esta solución dimos por superada la etapa de “factibilidad” del modelo, y nos preocupamos de elaborar algún criterio de bondad para los fixtures a confeccionar. Allí consideramos la segunda condición blanda: se privilegiaría a los fixtures que concentraran partidos entre equipos pertenecientes a un mismo grupo clasificatorio al final de la fase regular del torneo. Para formular esta función objetivo fue necesario considerar los siguientes conjuntos.

- $e$  : grupos
- $ei(e, i)$  : relación entre grupos y equipos

Así, la función objetivo utilizada fue la siguiente:

$$\text{máx} \left\{ \sum_e \sum_{i \in ei(e,i)} \sum_{j \in ei(e,j) \neq i} k \cdot x_{jik} \right\} \tag{25}$$

Junto con cambiar la función objetivo se incorporó como restricción el mantener o mejorar el número de aprovechamientos de viajes obtenido en la solución incumbente, es decir impusimos la siguiente restricción:

$$\sum_{k \in m} \sum_{c \neq \text{centro}} \sum_i w_{cik} \geq 3 \tag{26}$$

Al igual que el modelo con la función objetivo original, el modelo resultante fue de muy difícil resolución, en el sentido que los tiempos de ejecución fueron inmanejables.

Con esto en mente decidimos utilizar el siguiente procedimiento: utilizar el modelo original para encontrar fixtures factibles y luego considerar esos fixtures factibles como solución inicial para el modelo que incorpora partidos entre equipos del mismo grupo clasificatorio, pero fijando los patrones de localías de acuerdo a esta solución inicial. Esto es, si un equipo comienza jugando de local, después juega de visita, etc., la nueva solución debía mantener invariante esa secuencia de localías y visitas. Buscábamos con esta metodología un óptimo en el “vecindario” de la solución inicial (es decir, un óptimo local).

Con esta modificación el modelo disminuyó considerablemente su complejidad y fuimos capaces de resolverlo en tan sólo 20 segundos. Sin embargo, la calidad de la solución está supeditada a la calidad de la solución original. Dado

que los tiempos de resolución ahora eran razonables, tan sólo se necesitó realizar algunas pruebas para encontrar un fixture que concentraba efectivamente los partidos entre grupos al final del torneo. Así encontramos una solución en que en las últimas tres fechas se jugaba el máximo número factible de partidos entre equipos del mismo grupo (ocho partidos por fecha, dos por cada grupo).

Finalmente, se realizaron ejercicios similares considerando requerimientos específicos de la ANFP para algunas fechas y algunos equipos (por ejemplo, no colocar a los equipos que disputaban la Copa Libertadores de visita lejos de Santiago cerca de las fechas de la Copa, o enfrentar a Cobreloa y Unión Española en la primera fecha, dado que la escasa distancia entre la finalización del Torneo Clausura 2004, donde ambos fueron finalistas, y el inicio del Torneo Apertura 2005 hacía bastante probable que ambos equipos quisiesen aplazar sus encuentros).

El fixture del torneo Apertura (que puede verse en la Figura 1) se confeccionó utilizando esta metodología de trabajo. Tras un par de iteraciones, en donde aparecieron nuevos requerimientos especiales, y se le fueron presentando diferentes alternativas de fixtures a la ANFP, se logró dar con el fixture final. Esta propuesta fue presentada al Consejo de Presidentes de la asociación, donde fue aprobado como el fixture oficial del Torneo de Apertura 2005 del Fútbol Profesional Chileno.

---

## 5. Conclusiones

---

Tal cual se hace en las principales ligas deportivas de los Estados Unidos, el fixture del Campeonato Apertura 2005 del Torneo de Primera División del fútbol chileno fue diseñado utilizando un enfoque de Programación Matemática. Este diseño ha servido como una excelente herramienta que comprueba que el uso de tecnologías modernas pueden ser efectivas también en el campo del deporte para hacer campeonatos más atractivos para el público, y más rentables y justos para los clubes y la Asociación. Como muestra de los resultados, cabe mencionar por ejemplo, que en el torneo Clausura 2004 el clásico entre la Universidad de Chile y Colo-Colo se jugó en la primer fecha y tuvo una concurrencia de 10.000 personas, mientras que en el Apertura 2005 se disputó por la mitad del torneo y asistieron más de 40.000 espectadores.

Se ha establecido un acuerdo a mediano plazo de modo que el grupo de Gestión de Operaciones del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile se haga cargo de la confección de los fixtures de la ANFP en los próximos años, incluyendo no sólo los campeonatos de Primera División sino también el de Promoción (torneo que juegan la mayoría de los equipos de Primera con sus futbolistas reservas). Incluso se podría ampliar la propuesta al certamen de Segunda División. Al momento de la presentación de este artículo

Equipos/Fechas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
UCH	@EVRT	SFLP	@CQMB	PLTN	@PMNTT	CONCE	@CBLOA	WDRS	@HCH	AUDAX
COLO	PMNTT	@WDRS	CBSAL	@AUDAX	UDC	@LSRN	EVRT	@TMC	CBLOA	@CATO
CBLOA	@UE	PLTN	@HCH	@UDC	TMC	@MLPLL	UCH	RNGS	@COLO	CONCE
UDC	AUDAX	@LSRN	@EVRT	CBLOA	@COLO	SFLP	@CQMB	HCH	@RNGS	UE
CATO	MLPLL	@PMNTT	@TMC	UE	@CONCE	WDRS	@SFLP	AUDAX	@LSRN	COLO
AUDAX	@UDC	EVRT	@UE	COLO	@CQMB	PLTN	@RNGS	@CATO	TMC	@UCH
WDRS	@SFLP	COLO	@CONCE	EVRT	CBSAL	@CATO	TMC	@UCH	MLPLL	@PMNTT
HCH	LSRN	@CONCE	CBLOA	@TMC	@PLTN	RNGS	CBSAL	@UDC	UCH	@EVRT
UE	CBLOA	@RNGS	AUDAX	@CATO	EVRT	@CBSAL	LSRN	@MLPLL	CQMB	@UDC
CQMB	CONCE	@CBSAL	UCH	@MLPLL	AUDAX	@TMC	UDC	@EVRT	@UE	SFLP
TMC	CBSAL	@MLPLL	CATO	HCH	@CBLOA	CQMB	@WDRS	COLO	@AUDAX	RNGS
EVRT	UCH	@AUDAX	UDC	@WDRS	@UE	PMNTT	@COLO	CQMB	@SFLP	HCH
PMNTT	@COLO	CATO	MLPLL	@CBSAL	UCH	@EVRT	@PLTN	SFLP	@CONCE	WDRS
SFLP	WDRS	@UCH	@PLTN	RNGS	LSRN	@UDC	CATO	@PMNTT	EVRT	@CQMB
LSRN	@HCH	UDC	@RNGS	CONCE	@SFLP	COLO	@UE	PLTN	CATO	@CBSAL
RNGS	@PLTN	UE	LSRN	@SFLP	MLPLL	@HCH	AUDAX	@CBLOA	UDC	@TMC
PLTN	RNGS	@CBLOA	SFLP	@UCH	HCH	@AUDAX	PMNTT	@LSRN	CBSAL	@MLPLL
CBSAL	@TMC	CQMB	@COLO	PMNTT	@WDRS	UE	@HCH	CONCE	@PLTN	LSRN
CONCE	@CQMB	HCH	WDRS	@LSRN	CATO	@UCH	MLPLL	@CBSAL	PMNTT	@CBLOA
MLPLL	@CATO	TMC	@PMNTT	CQMB	@RNGS	CBLOA	@CONCE	UE	@WDRS	PLTN

Equipos/Fechas	11	12	13	14	15	16	17	18	19
UCH	@UE	@COLO	LSRN	@MLPLL	CATO	TMC	@UDC	RNGS	@CBSAL
COLO	CQMB	UCH	@PLTN	UE	@RNGS	@CONCE	HCH	@SFLP	MLPLL
CBLOA	@AUDAX	SFLP	@EVRT	CQMB	CBSAL	@CATO	LSRN	@WDRS	PMNTT
UDC	MLPLL	@CBSAL	TMC	@CATO	PMNTT	@WDRS	UCH	@CONCE	PLTN
CATO	@PLTN	HCH	@CQMB	UDC	@UCH	CBLOA	@CBSAL	EVRT	@RNGS
AUDAX	CBLOA	@CONCE	CBSAL	@LSRN	MLPLL	@PMNTT	WDRS	@HCH	SFLP
WDRS	@LSRN	PLTN	@RNGS	HCH	@UE	UDC	@AUDAX	CBLOA	@CQMB
HCH	PMNTT	@CATO	MLPLL	@WDRS	SFLP	CQMB	@COLO	AUDAX	@UE
UE	UCH	@TMC	PMNTT	@COLO	WDRS	@SFLP	CONCE	@PLTN	HCH
CQMB	@COLO	RNGS	CATO	@CBLOA	PLTN	@HCH	PMNTT	@LSRN	WDRS
TMC	@EVRT	UE	@UDC	@SFLP	LSRN	@UCH	PLTN	@PMNTT	CONCE
EVRT	TMC	@MLPLL	CBLOA	@CBSAL	CONCE	@PLTN	RNGS	@CATO	LSRN
PMNTT	@HCH	LSRN	@UE	RNGS	@UDC	AUDAX	@CQMB	TMC	@CBLOA
SFLP	CBSAL	@CBLOA	CONCE	TMC	@HCH	UE	@MLPLL	COLO	@AUDAX
LSRN	WDRS	@PMNTT	@UCH	AUDAX	@TMC	MLPLL	@CBLOA	CQMB	@EVRT
RNGS	CONCE	@CQMB	WDRS	@PMNTT	COLO	CBSAL	@EVRT	@UCH	CATO
PLTN	CATO	@WDRS	COLO	@CONCE	@CQMB	EVRT	@TMC	UE	@UDC
CBSAL	@SFLP	UDC	@AUDAX	EVRT	@CBLOA	@RNGS	CATO	@MLPLL	UCH
CONCE	@RNGS	AUDAX	@SFLP	PLTN	@EVRT	COLO	@UE	UDC	@TMC
MLPLL	@UDC	EVRT	@HCH	UCH	@AUDAX	@LSRN	SFLP	CBSAL	@COLO

Figura 1: Fixture del Campeonato Apertura 2005. En gris, se presentan los partidos entre equipos de un mismo grupo. Se observa que están mayoritariamente concentrados hacia el final del torneo.

se acaba de aprobar un nuevo fixture para el torneo Clausura 2005, utilizando condiciones y requerimientos similares al problema planteado en este trabajo. Como partidos “atractivos” a considerar para ser programados en las últimas fechas del Clausura fueron incorporados también los partidos entre equipos que a priori pelean por la permanencia en la categoría principal del fútbol chileno. Es importante destacar que para el Torneo Clausura teníamos todas las localías de los partidos fijadas de antemano (invirtiendo las del Apertura). Eso le daba menos margen de maniobra al modelo y dificultó su resolución, por lo que estamos pensando para el fixture del 2006 quizás analizar ambos campeonatos juntos a principios de temporada.

Una variante que se ha pensado para los próximos fixtures a desarrollar es la posibilidad de agregar un grado mayor de aleatorización al fixture propuesto. Diremos que dos equipos son “mellizos” si cumplen el mismo rol en cada una de las restricciones fijadas y en la función objetivo del problema. Esta característica implica que se podría sortear un fixture final a partir de una

propuesta dada por el modelo, intercambiando a dos equipos “mellizos”, de modo que se sigan cumpliendo todos los requerimientos solicitados y la función objetivo del problema no cambie su valor.

Desde el punto de vista académico se abren también nuevas perspectivas y desafíos algorítmicos en relación a este problema. Uno de los posibles intentos pasa por intensificar un enfoque de *Constraint Programming (CP)* en paralelo al enfoque de Programación Entera, dado que *CP* ha demostrado ser de suma utilidad en problemas de estas características a fin de encontrar rápidamente buenas soluciones factibles. También con esta misma idea se puede trabajar desde el campo de las metaheurísticas, dada su rapidez en términos computacionales. Por último, también se propone considerar el problema de fijar patrones de localías para cada uno de los equipos, con el objetivo de conseguir un conjunto de los mismos que garantice factibilidad. Aun más, dado un conjunto de patrones contenido en una solución factible, el proceso de optimización local desarrollado en este trabajo podría generalizarse permitiendo distintas combinaciones de asignación de estos patrones a los equipos, lo que puede conducir a mejoras en la solución y mantener el tiempo de resolución en niveles razonables, si es que algunos patrones permanecen fijos para un subconjunto de equipos.

**Agradecimientos:** Al Núcleo de Ciencias Milenio “Sistemas Complejos de Ingeniería” P04-066-F y a la Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP) por el apoyo económico para la concreción de este proyecto. El primer autor también es financiado por Fondecyt 1050747, Chile; UBACyT X184, UBA, Argentina y PROSUL 490333/2004-4, CNPq, Brasil.

## Referencias

- [1] A. Aggoun and A. Vazacopoulos. Solving sports scheduling and timetabling problems with constraint programming. In J. Gil-Lafuente and P.M. Pardalos, editors, *Economics, Management and Optimization in Sports*, pages 243–264. Springer, 2004.
- [2] A. Anagnostopoulos, L. Michel, P. Van Hentenryck, and Y. Vergados. A simulated annealing approach to the traveling tournament problem. In *Proceedings CPAIOR'03*, Montreal, 2003.
- [3] I. Anderson. *Combinatorial Designs and Tournaments*. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. Oxford University Press, 1997.
- [4] J. C. Bean and J. R. Birge. Reducing traveling costs and player fatigue in the national basketball association. *Interfaces*, (10):98–102, 1980.
- [5] A. Cardemil and G. Durán. Un algoritmo tabú search para el traveling tournament problem. *Revista Ingeniería de Sistemas*, (18 (1)):95–115, 2004.
- [6] D. Costa. An evolutionary tabu-search algorithm and the nhl scheduling problem. *INFOR*, (33):161–178, 1995.
- [7] F. Della Croce, R. Tadei, and P.S. Asoli. Scheduling a round robin tennis tournament under courts and players availability constraints. *Annals of Operations Research*, (92):349–361, 1999.
- [8] D. de Werra. Geography, games, and graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 2:327–337, 1980.
- [9] D. de Werra. Scheduling in sports. In P. Hansen, editor, *Studies on Graphs and Discrete Programming*, pages 381–395. Elsevier Science, 1981.
- [10] D. de Werra. Minimizing irregularities in sports schedules using graph theory. *Discrete Applied Mathematics*, 4:217–226, 1982.
- [11] J. Dinitz and M. Dinitz. Enumeration of balanced tournament designs on 10 points. *to appear in Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 2004.
- [12] K. Easton, G. Nemhauser, and M. Trick. The traveling tournament problem: description and benchmarks. In *Proceedings of the 7th. International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*, pages 580–584, Paphos, 2001.

- [13] K. Easton, G.Nemhauser, and M. Trick. Solving the travelling tournament problem: a combined integer programming and constraint programming approach. In E. Burke and P. De Causmaecker, editors, *PATAT 2002, Lecture Notes in Computer Science*, volume 2740, pages 100–109. Springer, 2003.
- [14] J.A. Ferland and C. Fleurent. Computer aided scheduling for a sports league. *INFOR*, (29):14–24, 1991.
- [15] J.P. Hamiez and J.K. Hao. Solving the sports league scheduling problem with tabu search. *Lecture Notes in Computer Science*, 2148:24–36, 2001.
- [16] J.P. Hamiez and J.K. Hao. A linear time algorithm to solve the sports league scheduling problem (prob026 of csplib). *Discrete Applied Mathematics*, 143:252–265, 2004.
- [17] M. Henz. Constraint-based round robin tournament planning. In D. De Schreye, editor, *Proceedings of the International Conference on Logic Programming*, pages 545–557, Las Cruces, New Mexico, 1999. MIT Press.
- [18] M. Henz. Scheduling a major college basketball conference-revisited. *Operations Research*, 49:163–168, 2001.
- [19] M. Henz, T. Müller, T. Tan, and S. Thiel. The pairing constraint for round robin tournament scheduling. Preprint, School of Computing at the National University of Singapore, 2000.
- [20] M. Henz, T. Müller, and S. Thiel. Global constraints for round robin tournament scheduling. *European Journal of Operational Research*, (153):92–101, 2004.
- [21] G. L. Nemhauser and M.A. Trick. Scheduling a major college basketball conference. *Operations Research*, (46):1–8, 1998.
- [22] C.C. Ribeiro and S. Urrutia. Heuristics for the mirrored traveling tournament problem. *to appear in European Journal of Operational Research*, 2005.
- [23] A. Schaerf. Scheduling sport tournaments using constraint logic programming. *Discrete Applied Mathematics*, 4:43–65, 1999.
- [24] J.A.M. Schreuder. Combinatorial aspects of construction of competition dutch professional football leagues. *Discrete Applied Mathematics* 35, pages 301–312, 1992.
- [25] M.A. Trick. Integer and constraint programming approaches for round-robin tournament scheduling. In E. Burke and P. De Causmaecker,

editors, *Lecture Notes in Computer Science*, volume 2740, pages 63–77. Springer-Verlag GmbH, 2003.

- [26] T.L. Urban and R.A. Russell. Scheduling sports competitions on multiple venues. *European Journal of Operational Research*, 148:302–311, 2003.

---

# PREDICCIÓN DE FUGAS DE CLIENTES PARA UNA INSTITUCIÓN FINANCIERA MEDIANTE SUPPORT VECTOR MACHINES

---

JAIME MIRANDA\*  
PABLO REY\*  
RICHARD WEBER\*

## Resumen

*La fuga de clientes es un fenómeno que atañe a la gran mayoría de las instituciones financieras, siendo también un tema de intensivo estudio científico en los últimos años. En el presente trabajo se presenta un modelo predictivo desarrollado para identificar los clientes con tendencias a la fuga en un banco. De esta forma es posible hacer más efectivas las políticas comerciales de retención, ser más eficientes en la asignación de los recursos al focalizar a los ejecutivos y mejorar las relaciones con los clientes al detectar los principales focos de deficiencias del servicio. Estos beneficios generan una mayor rentabilidad al aumentar tanto el número de transacciones como la permanencia del cliente. El modelo presentado se basa en la técnica de Support Vector Machines. La comparación con un modelo de predicción basado en redes neuronales muestra la superioridad del modelo propuesto en el caso considerado.*

**Palabras Clave:** Retención de clientes; Support Vector Machines.

---

## 1. Introducción

---

La cartera de clientes es uno de los activos más importantes para una institución financiera, ya que está estrechamente relacionada con las utilidades del negocio. Dos actividades comerciales tienen como objetivo mantener y mejorar dicha cartera: la captación de clientes nuevos y la retención de clientes existentes.

---

\*Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

La *captación de clientes* apunta a aumentar el número de clientes de la cartera a través de la definición e incorporación de nuevos segmentos objetivos. Esta captación se realiza principalmente a través de elaboradas estrategias de publicidad, alta inversión en fuerza de ventas y la generación de ofertas focalizadas. La *retención de clientes* consiste en la identificación de los clientes con mayores tendencias a la fuga y en la determinación de las estrategias o procedimientos que aumenten el grado de fidelización y bajen los índices de fuga en la cartera.

Existen dos tipos de fuga: las fugas voluntarias y las fugas no voluntarias. Las *fugas voluntarias* se asocian a la desafiliación del cliente por iniciativa propia, sin injerencia directa por parte de la institución. A diferencia del caso anterior, las *fugas no voluntarias* son desafiliaciones en donde el banco es responsable directo del término de los acuerdos contractuales, donde el cliente no posee ninguna injerencia. Este tipo de cierre se gatilla principalmente por acciones delictuales o por mala utilización de los productos. Un ejemplo puede ser efectuar algún tipo de fraude financiero con cheques del banco o la clonación de tarjetas de crédito. En el presente trabajo estudiaremos las fugas voluntarias.

La sección 2 discute la importancia de la retención de clientes y el estado del arte en la literatura respecto del tema. Las secciones siguientes detallan la aplicación de una metodología a un caso particular en un banco chileno. En la sección 3 se discuten las variables utilizadas en el estudio. La sección 4 presenta el preprocesamiento y las transformaciones aplicadas a estas variables. En la sección 5 se desarrolla el modelo matemático para la predicción de fuga. La sección 6 presenta los resultados obtenidos comparándolos con los de un modelo alternativo. En la sección 7 se concluye el trabajo presentado y se exponen líneas de trabajo futuro.

---

## 2. ¿Por qué es Importante Retener a un Cliente?

---

Estudios recientes [1, 9, 13] han mostrado los beneficios aportados por la retención de clientes en instituciones bancarias. Al tener una cartera con un mayor número de clientes, se realizan en promedio un mayor número de transacciones, aumentando las utilidades de la institución. Además, si se logra una mayor permanencia de un cliente en la institución, se obtienen los beneficios asociados a la disminución de los costos operacionales, las referencias y al incremento en las transacciones.

La figura 1 muestra estos efectos y el beneficio monetario generado por un cliente a través del tiempo [16]. Sólo en el primer año un cliente no reporta beneficio a la institución. Los costos de este periodo corresponden a la incor-

poración e inicialización del cliente y a la inversión en las distintas campañas de captación.

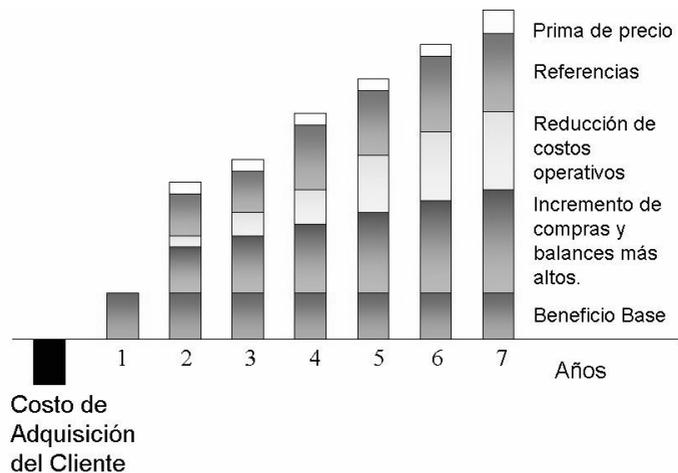


Figura 1: Beneficio generado por un cliente a lo largo del tiempo que permanece dentro de la institución [16].

La predicción de fuga es un elemento importante para la retención de clientes. Tanto la identificación de los clientes con tendencias a fuga como la determinación de su rentabilidad futura permiten focalizar los esfuerzos de retención en los clientes más apropiados [9, 13]. La figura 2 ilustra el ciclo de retención basado en una adecuada predicción de fuga.

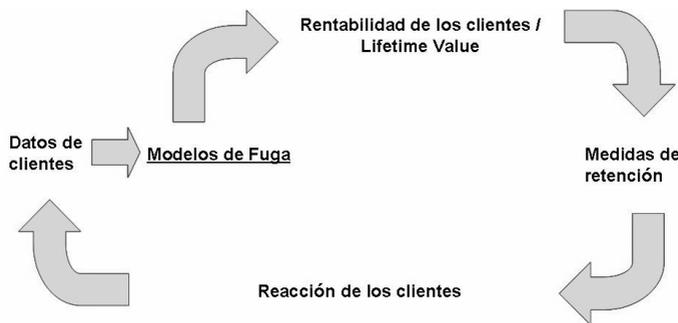


Figura 2: Ciclo de retención de clientes.

Un estudio realizado en el banco ECB (European Central Bank) [18] muestra los beneficios generados al disminuir el porcentaje de clientes fugados anualmente y cómo se ven afectados los flujos futuros de la institución durante un periodo de 25 años. En dicho estudio se definen la *tasa de retención* como la relación entre el número de clientes que permanecen en la institución y la cartera total de clientes.

$$\text{Tasa de retención} = \left(1 - \frac{\text{número de clientes fugados al año}}{\text{número total de clientes en cartera}}\right) \cdot 100\% \quad (1)$$

La figura 3 exhibe el beneficio acumulado generado por la cartera respecto de distintas tasas de retención. Se observa que a medida que aumenta la tasa de retención, el beneficio también aumenta. La situación ideal es la representada por la línea correspondiente a una tasa de retención igual al 100 %. Esto significaría que se retiene a la totalidad de los clientes cada año. Esta situación es prácticamente imposible debido a que existen numerosas circunstancias que el banco no maneja, por ejemplo, la muerte de un cliente o el cambio de su residencia al extranjero.

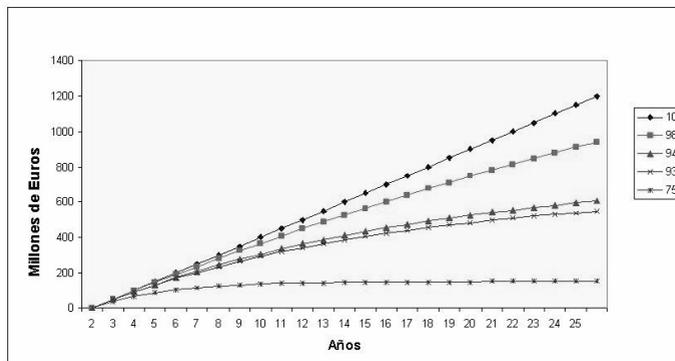


Figura 3: Beneficio acumulado respecto de la tasa de retención [18].

Se observa que con un aumento de la tasa de retención de un 1% (de un 93% a un 94%), respecto de una cartera de 1.000.000 de clientes, las utilidades generadas por la retención de este segmento crecen en aproximadamente 30 millones de euros durante el periodo de evaluación [18].

Cabe destacar que no es viable remediar la fuga de clientes con una mayor captación de clientes nuevos. Por un lado, los clientes nuevos son potencialmente riesgosos para la empresa. Por otro lado, se sabe que captar un cliente nuevo es entre 5 y 6 veces más costoso que retener a uno antiguo [3, 15].

En resumen, las actividades para retener clientes generan una serie de beneficios para una institución financiera que justifican el desarrollo de modelos sofisticados para la predicción de fuga.

---

### 3. Descripción de las Variables Utilizadas

---

En varios estudios para instituciones financieras se han identificado las variables más relevantes para la predicción de fuga de clientes. Para el presente trabajo, se comprobó la utilidad de estas variables usando métodos estadísticos, por un lado, y la experiencia de los expertos, por otro.

Finalmente se generó una agrupación de las variables, asignándolas a uno de los siguientes cuatro grupos:

1. Variables de Comportamiento Bancario.
2. Variables Sociodemográficas.
3. Variables de Percepción de la Calidad del Servicio.
4. Variables de Entorno.

A continuación se describe cada uno de estos grupos para la aplicación presentada en este artículo.

La muestra utilizada corresponde a la cartera completa de clientes que poseía la institución entre el 1 de enero y el 31 de diciembre del año 2002. Esta muestra incluye todos los clientes vigentes durante el periodo y todos los clientes que se fugaron durante el mismo periodo, excluyendo las fugas involuntarias.

#### 3.1. Variables de Comportamiento Bancario

Entre las variables que capturan el comportamiento bancario de los clientes se pueden mencionar los saldos mensuales promedios en la cuenta corriente, el número de transacciones mensuales por los distintos canales de comunicación, la tenencia de productos y servicios y las variaciones en su utilización. El objetivo principal al utilizar este conjunto de variables es identificar cambios en los patrones de comportamiento transaccional de los clientes.

A modo de ejemplo, la figura 4 muestra el número de transacciones realizadas mensualmente por los distintos canales por los que opera la institución: caja, portal Web, call center, RedBanc y RedCompra. Se observa que el principal canal transaccional que utilizan los clientes es el portal Web (47%), seguido por las transacciones por call center (30%).

Se ha observado [14] que mientras más transacciones realiza un cliente, menor es su probabilidad de fuga.

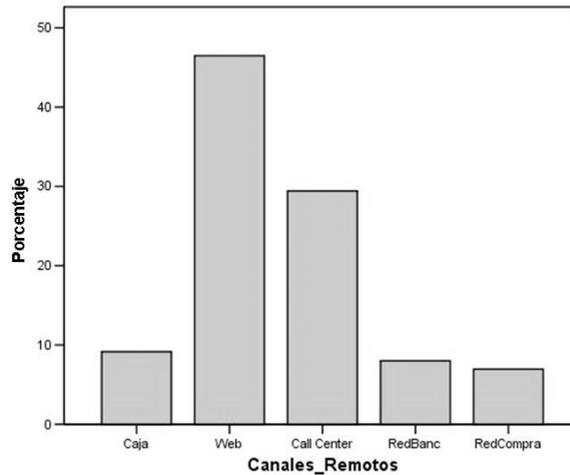


Figura 4: Distribución del número de transacciones por canal.

### 3.2. Variables Sociodemográficas

Este conjunto de variables corresponde a caracterizaciones relacionadas con aspectos personales de los clientes, por ejemplo, edad, renta, estado civil y nivel educacional.

En [12] se considera a la edad como variable discriminadora. En ese estudio se concluye que las personas de mayor edad son más estables en sus preferencias, y por ende, tienen menores tendencias a cambiarse a otra institución financiera. En caso contrario, se observa que las personas jóvenes son más inestables en sus preferencias aumentando su tendencia a cambiar de institución financiera. La figura 5 muestra la distribución de la edad de los clientes de la cartera total.

Cerca del 60% de la cartera tiene una edad entre los 25 y 35 años, lo que implica que la institución posee un segmento significativo de clientes jóvenes.

### 3.3. Variables de Percepción de la Calidad del Servicio

Existen numerosos trabajos que relacionan la calidad del servicio con los patrones de fuga [1, 10, 11] concluyendo que una mala percepción del servicio aumenta las tendencias a fugarse.

Una variable de este grupo es el número de reclamos realizados al centro de atención en un mes por el cliente. Mensualmente se realizan, en promedio, 350 reclamos. En la figura 6 se exhibe la distribución del número de reclamos realizados por un cliente en un mes particular. En esta figura sólo se representa a los clientes que realizaron reclamos, que constituyen un 1,5% de la cartera.

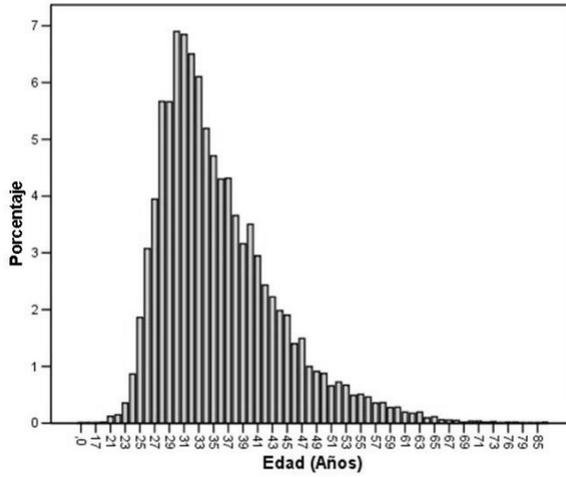


Figura 5: Distribución de la variable edad.

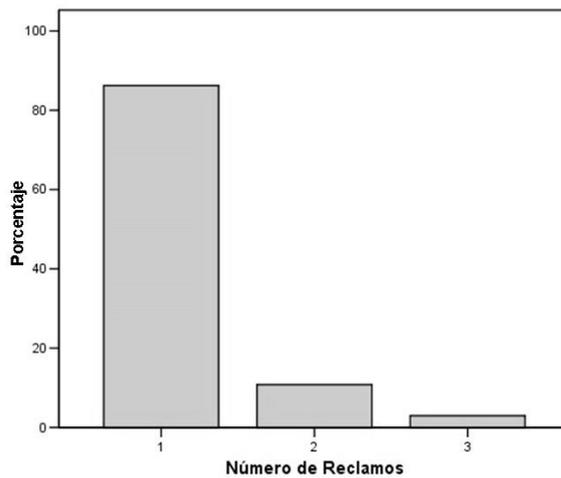


Figura 6: Distribución del número de reclamos por cliente realizados en forma mensual.

Con un análisis más detallado se pudo observar que más del 75% de los clientes que cerraban sus productos habían realizado por lo menos un reclamo al centro de atención de clientes (ver figura 7).

Esta relación entre el número de reclamos y el cierre de la cuenta corriente motiva la inclusión de esta variable para la identificación del patrón de fuga.

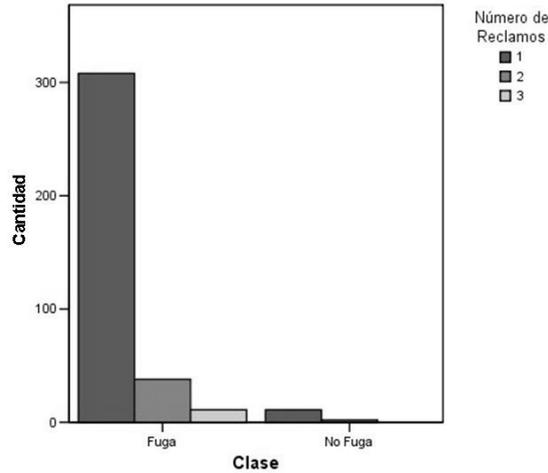


Figura 7: Relación entre el número de reclamos y las fugas mensuales.

### 3.4. Variables de Entorno

Estas variables caracterizan los efectos ocasionados por alguna perturbación dentro del mercado financiero capturando si el cliente sufrió un hito o acontecimiento especial durante su ciclo de vida dentro de la institución. Un ejemplo de estas variables es la *antigüedad* del cliente, la que corresponde a la cantidad de meses que lleva dentro de la institución. La figura 8 muestra la distribución de esta variable respecto a la cartera total.

En [18] se concluye que clientes con una mayor antigüedad tienen menor tendencia a cambiarse.

---

## 4. Preprocesamiento y Transformación de las Variables

---

La forma en que los datos aparecen originalmente en una base de datos muchas veces no representa de la mejor manera la información disponible. En general, primero hay que preprocesar los datos para corregir posibles errores e inconsistencias dentro de la base. Transformaciones posteriores pueden enriquecer aún más la información que proveen estos datos.

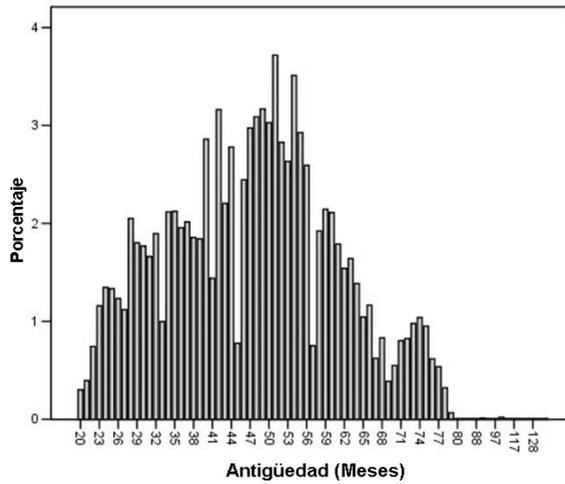


Figura 8: Distribución de la variable antigüedad.

#### 4.1. Etapa de Preprocesamiento

El objetivo del preprocesamiento en este trabajo fue resolver el problema relacionado a los valores faltantes y fuera de rango dentro de la base de datos. Se entiende por *valores faltantes* a la ausencia del valor de cierta variable que describe al cliente y por *valores fuera de rango* a valores que se escapan de los rangos permitidos para una variable. Ejemplos de este último grupo son las edades mayores de 200 años o las rentas negativas. Entre las soluciones implementadas están:

- Eliminación de registros;
- Llenado con promedios y modas;
- Utilización de modelos predictivos.

La determinación de los rangos de las variables se realizó en forma conjunta con los expertos del negocio.

El resultado de esta etapa es una base de datos limpia y sin inconsistencias.

#### 4.2. Etapa de Transformación

La base de datos utilizada no fue creada inicialmente con la visión de construir modelos matemáticos de predicción. Debido a esto, no todas las variables seleccionadas estaban en condiciones de ser utilizadas en su estado original. Por esta razón, fue necesario utilizar transformaciones de las variables originales para enriquecer la información contenida y para hacerlas compatibles con

las técnicas de modelamiento. Entre las principales transformaciones utilizadas podemos mencionar:

1. La transformación de las variables texto (categorías) a números. En el cuadro 1, a modo de ejemplo, se muestra la transformación utilizada para la variable *nivel educacional*.
2. La transformación de la variable *fecha de nacimiento* a *edad* (en años).
3. El escalamiento y estandarización de las variables numéricas dentro de un rango específico, por ejemplo en el rango  $[0,1]$ . Esta transformación apunta a tener las distintas variables en escalas comparables, lo que mejora la convergencia de los algoritmos de aprendizaje [4].
4. La generación de nuevas variables a partir del conjunto de variables inicial. Un ejemplo de este grupo pueden ser las variaciones porcentuales entre los saldos de meses consecutivos.

Nivel Educacional	
Categoría	Clase
Educ. Universitaria	1
Educ. Técnica	2
Educ. Media	3
Estudiante Universitario	4

Cuadro 1: Ejemplo de transformación para una variable.

El resultado de esta etapa es una base de datos transformada a valores numéricos, lista para los análisis estadísticos y para la construcción de los modelos matemáticos de minería de datos.

---

## 5. Construcción del modelo y enfoque de solución

---

El problema planteado se enfrentó con un enfoque de clasificación binaria [7]. Este tipo de procedimiento se basa en la determinación de una *función clasificadora* que permite asignar a cada objeto a una de las dos clases definidas *a priori*. En nuestro caso, cada cliente será asignado a una de las clases “fuga” o “no fuga”.

La construcción del modelo se lleva a cabo en dos etapas: entrenamiento y test. Para cada una de las etapas se considera un subconjunto del total de los objetos (clientes) a clasificar. Estos subconjuntos de objetos forman una partición del conjunto total de objetos y son llamados, *conjunto de entrenamiento* y *conjunto de test*, respectivamente.

En la etapa de entrenamiento se estima la mejor función clasificadora considerando algún criterio (por ejemplo, el error de clasificación) en el conjunto de entrenamiento. En la etapa de test se valida la efectividad del modelo respecto de objetos no utilizados en el entrenamiento. Para esto, se utiliza el modelo obtenido para clasificar los elementos del conjunto de test. El modelo asigna cada objeto a una de las clases definidas, la que llamaremos la “clase generada” del objeto en contraposición a la “clase real” que es la clase a la que el objeto efectivamente pertenece. Considerando los objetos “mal clasificados” (aquellos cuya clase generada es diferente a su clase real) se estima un error de clasificación. Dependiendo de este error, se revisa el modelo propuesto.

Existen diversas técnicas que tratan el problema de clasificación binaria. Entre estas podemos mencionar: las redes neuronales artificiales, los árboles de decisión y los Support Vector Machines (SVM) [7]. Para este trabajo, motivados por la efectividad y robustez en problemas de clasificación reportada en la literatura sobre este tipo de métodos (ver por ejemplo, [4, 6, 7]) se seleccionaron los SVM.

A continuación se describe brevemente esta técnica y se muestra la forma en que se obtiene la función de separación.

### 5.1. Support Vector Machines

La técnica de Support Vector Machines fue propuesta por Vapnik [19, 20]. Esta técnica se basa en encontrar un hiperplano de separación que divida el espacio de entrada en dos regiones. Cada una de estas regiones corresponderá a una de las clases definidas.

Por un lado, a hiperplanos que están más alejados de las fronteras de las clases de objetos corresponden mayores márgenes de separación. Por otro, hiperplanos que aciertan más en la asignación de objetos a las clases a las que

efectivamente pertenecen, tienen un menor error de clasificación. Por lo tanto, un hiperplano de separación ideal debe maximizar el margen de separación y minimizar el error de clasificación. Sin embargo, no siempre es posible cumplir los dos objetivos simultáneamente. Para salvar esta dificultad se plantea un problema de optimización cuya función objetivo combina ambos objetivos. Este problema de optimización resulta ser un problema de minimización cuadrático convexo [6]. En el caso que el número de objetos a clasificar es mayor que el número de atributos de cada objeto, lo que usualmente sucede, este problema tiene una única solución óptima. Al hiperplano de separación asociado a esta solución lo llamaremos el *hiperplano óptimo de separación* (HOS).

Lo descrito anteriormente corresponde al caso que existe un hiperplano de separación de las clases. En ese caso se dice que las clases son linealmente separables. Recientemente, el estudio de los SVM se ha extendido al caso de clases que no son linealmente separables mediante la introducción de las llamadas *funciones de kernel o núcleo* [17, 21] o de *variables de pérdida o slacks* [5]. Esta metodología ha sido también extendida para problemas de regresión [4].

A continuación se presenta el problema de optimización utilizado para la determinación del hiperplano de separación y se discute una solución analítica. Como resultado se obtiene la función clasificadora que discrimina los patrones de comportamiento estudiados (“fuga”–“no fuga”).

### 5.1.1. Obtención del Hiperplano Óptimo de Separación

Consideremos un problema de clasificación binaria para el cual ya se ha definido el conjunto de entrenamiento. En nuestro caso, los objetos a clasificar son los clientes. Supongamos que para cada cliente se han definido  $n$  variables a estudiar y que se tiene  $m$  clientes en el conjunto de entrenamiento. Entonces, cada cliente es representado por un vector característico de dimensión  $n + 1$  cuyas primeras  $n$  coordenadas corresponden a las variables del estudio y la última corresponde a la clase a la que el cliente pertenece. Denotaremos estos vectores como un par  $(\vec{x}, y)$  donde  $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$  son las variables del estudio y la última coordenada  $y \in \{-1, +1\}$  indica a qué clase pertenece el cliente. En particular, denotaremos por  $(\vec{x}_i, y_i)$  al vector característico correspondiente al cliente  $i$  (para  $i = 1, \dots, m$ ). En este sentido, cuando quede claro del contexto, si el cliente  $i$  es representado por un vector de la forma  $(\vec{x}_i, +1)$  diremos que ese cliente está en la *clase positiva* o bien, que el vector  $\vec{x}_i$  está en la clase positiva. De manera análoga, para un cliente  $i$  representado por un vector de la forma  $(\vec{x}_i, -1)$  diremos que él o su vector  $\vec{x}_i$  están en la *clase negativa*.

Un supuesto inicial para este trabajo es que el conjunto de entrenamiento es linealmente separable. Es decir, existe un hiperplano en  $\mathbb{R}^n$  que deja a todos los vectores  $\vec{x}$  asociados a los clientes de una clase de un lado del hiperplano

y al los de la otra del otro lado. Formalmente, existe un par  $(\vec{\alpha}, b) \in \mathfrak{R}^{n+1}$  tal que  $\vec{\alpha} \cdot \vec{x}_i + b > 0$  si el cliente  $i$  está en la clase positiva y  $\vec{\alpha} \cdot \vec{x}_i + b < 0$ , si está en la clase negativa.

De esta manera, dados un vector no nulo normal al hiperplano de separación  $\vec{\alpha} \in \mathfrak{R}^n$  podemos definir una función de clasificación  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  por la expresión  $f(\vec{x}) \equiv \vec{\alpha} \cdot \vec{x} + b$ . Entonces si  $f(\vec{x}_i) > 0$ , el cliente  $i$  está en la clase positiva y si  $f(\vec{x}_i) < 0$ ,  $i$  está en la clase negativa.

Para definir el margen de clasificación, consideramos las distancias  $d^+$  y  $d^-$ . La distancia  $d^+$  es la distancia euclídeana entre el hiperplano y la clase positiva. Es decir, la distancia entre el hiperplano y el punto en la clase positiva más cercano a este. De manera análoga, pero respecto de la clase negativa se define  $d^-$ . Una vez determinadas estas distancias, definimos el *margen de separación* (del hiperplano) como la suma  $d^+ + d^-$ .

## 5.2. Construcción del Problema de Optimización

De la discusión anterior sabemos que para clasificar correctamente a todos los clientes en el conjunto de entrenamiento debemos imponer las restricciones:

$$\begin{aligned} &\vec{\alpha} \cdot \vec{x}_i + b > 0 \text{ para los clientes } i \text{ en la clase positiva} \\ \text{y} & \\ &\vec{\alpha} \cdot \vec{x}_i + b < 0 \text{ para los clientes } i \text{ en la clase negativa.} \end{aligned} \tag{2}$$

No es una buena práctica incluir desigualdades estrictas como restricciones en problemas de optimización. Por lo tanto, sería importante poder encontrar condiciones equivalentes a las anteriores pero que sean del tipo “menor o igual” o “mayor o igual”.

Recordando que si un hiperplano está definido por el par  $(\vec{\alpha}, b)$ , entonces cualquier par de la forma  $(\lambda\vec{\alpha}, \lambda b)$  con  $\lambda > 0$  también define el mismo hiperplano, podemos que si  $\vec{\alpha} \cdot \vec{x} + b > 0$  para un par particular  $(\vec{\alpha}, b)$ , entonces existe un par  $(\vec{\alpha}_i, b_i)$  que define el mismo hiperplano y tal que  $\vec{\alpha}_i \cdot \vec{x} + b_i \geq 1$ . Para la clase negativa, se puede razonar de manera análoga. Como el conjunto de entrenamiento es finito, si existe un par  $(\vec{\alpha}, b)$  que satisface las condiciones (2) para todos los clientes del conjunto de entrenamiento, entonces existe un par  $(\vec{\alpha}', b')$  que define el mismo hiperplano tal que el lado izquierdo de las expresiones en (2) tiene valor absoluto mayor o igual a 1. De esta manera, las condiciones de la ecuación (2) pueden ser incluidas en el problema de optimización en la forma:

$$\begin{aligned} &\vec{\alpha} \cdot \vec{x}_i + b \geq 1 \text{ para los clientes } i \text{ en la clase positiva} \\ \text{y} & \\ &\vec{\alpha} \cdot \vec{x}_i + b \leq -1 \text{ para los clientes } i \text{ en la clase negativa.} \end{aligned}$$

Los puntos (clientes) para los cuales una de estas restricciones es activa, es decir  $|\vec{\alpha} \cdot \vec{x}_i + b| = 1$  tienen especial importancia. En particular, estos puntos

yacen exactamente en los llamados *hiperplanos canónicos* que están definidos por las ecuaciones [7]:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{x} + b &= +1 \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{x} + b &= -1. \end{aligned} \tag{3}$$

Denotaremos por  $x^+$  a un cliente cualquiera que esté en el hiperplano canónico de la clase positiva (lado derecho igual a +1) y por  $x^-$  a un cliente cualquiera que esté en el hiperplano canónico de la clase negativa. El hiperplano definido por el par  $(\vec{\alpha}, b)$  es paralelo a los hiperplanos canónicos.

Con esta notación, el margen de separación del hiperplano definido por el par  $(\vec{\alpha}, b)$ , y denotado por  $\gamma$ , puede ser expresado como [7]:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\vec{\alpha} \cdot x^+}{\|\vec{\alpha}\|} \right) - \left( \frac{\vec{\alpha} \cdot x^-}{\|\vec{\alpha}\|} \right) \right] \tag{4}$$

Manipulando algebraicamente la expresión anterior se obtiene:

$$\gamma = \frac{1}{2\|\vec{\alpha}\|} [(\vec{\alpha} \cdot x^+) - (\vec{\alpha} \cdot x^-)] = \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \tag{5}$$

Observemos que la distancia entre el hiperplano definido por el par  $(\vec{\alpha}, b)$  a cada uno de los hiperplanos canónicos es igual a  $1/\|\vec{\alpha}\|$ . Además, los puntos más cercanos a este hiperplano en el conjunto de entrenamiento están en los hiperplanos canónicos. Por lo tanto, el margen de separación de este hiperplano es igual a  $2/\|\vec{\alpha}\|$ . En la figura 9 se ilustra esta situación:  $H_1$  y  $H_2$  son los hiperplanos canónicos.

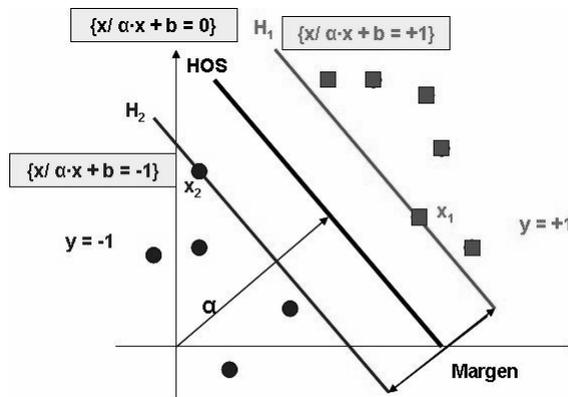


Figura 9: Hiperplanos canónicos de separación.

Se desea maximizar este margen y esto es equivalente a minimizar la norma euclidiana de  $\vec{\alpha}$ . De esta manera el problema de optimización que vamos a resolver es el siguiente [7]:

$$\begin{aligned}
 & \underset{\vec{\alpha}, b}{\text{máx}} && \frac{1}{2} \|\vec{\alpha}\|^2 \\
 & \text{s.a.} && \\
 & && y_i \cdot (\vec{x}_i \cdot \vec{\alpha} + b) - 1 \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{P}$$

Resolviendo este problema se obtiene un vector  $\vec{\alpha}^*$  óptimo que permite calcular el margen geométrico máximo de un hiperplano de separación,  $\gamma^* = 2/\|\vec{\alpha}^*\|$ .

En la próxima sección, se resuelve analíticamente este problema de optimización y se describe un sistema de ecuaciones que permite calcular el vector óptimo  $\vec{\alpha}^*$  y el lado derecho  $b$ .

### 5.2.1. Resolución Analítica del Problema de Optimización

El problema de optimización planteado en la sección anterior es un problema cuadrático convexo. En el caso que nos interesa, este problema tiene una única solución óptima global. Esta solución puede ser obtenida encontrando una solución para las condiciones de optimalidad de primer orden, conocidas como las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker [7]. Para esto definimos el *Lagrangiano* de (P),

$$L_P \equiv \frac{1}{2} \|\vec{\alpha}\|^2 - \sum_{i=1}^m \beta_i y_i (\vec{x}_i \cdot \vec{\alpha} + b) + \sum_{i=1}^m \beta_i \tag{6}$$

donde los  $\beta_i$  son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de (P). A partir de este Lagrangiano podemos plantear las condiciones de optimalidad [2]:

$$\frac{\partial L_P}{\partial \alpha_j} = \alpha_j - \sum_{i=1}^m \beta_i y_i x_i^j = 0 \quad j = 1, \dots, n \tag{7}$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial b} = - \sum_{i=1}^m \beta_i y_i = 0 \tag{8}$$

$$y_i (\vec{x}_i \cdot \vec{\alpha} + b) - 1 \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \tag{9}$$

$$\beta_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \tag{10}$$

$$\beta_i (y_i (\vec{\alpha} \cdot \vec{x}_i + b) - 1) = 0 \quad i = 1, \dots, m \tag{11}$$

De las condiciones (7) y (8) se obtienen, en el óptimo, las siguientes relaciones:

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^m \beta_i y_i \vec{x}_i \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^m \beta_i y_i = 0 \tag{13}$$

Al reemplazar estas expresiones en la ecuación (6) se puede llevar el Lagrangiano a la forma:

$$L_D \equiv \sum_{i=1}^m \beta_i - \frac{1}{2} \sum_{i,s=1}^m \beta_i \beta_s y_i y_s \vec{x}_i \cdot \vec{x}_s \quad (14)$$

A partir de esta expresión, aplicando dualidad lagrangiana se puede obtener un problema dual conocido como el Dual de Wolfe [2, 8] de (P):

$$\begin{aligned} \max_{\beta} \quad & L_D \equiv \sum_{i=1}^m \beta_i - \frac{1}{2} \sum_{i,s=1}^m \beta_i \beta_s y_i y_s \vec{x}_i \cdot \vec{x}_s \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^m \beta_i y_i = 0 \\ & \beta_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (D)$$

En el caso de problemas de optimización convexos regulares, como el problema (P), el Dual de Wolfe (D) es un dual fuerte. La resolución se reduce, entonces, a obtener los valores óptimos para los multiplicadores  $\beta_i$ . Una vez conocidos estos, los valores óptimos de las variables primales  $\vec{\alpha}$  se obtienen de la ecuación (12).

A pesar de que el término  $b$  o *bias* no aparece explícitamente en la formulación, puede ser obtenido a partir de las condiciones de optimalidad [7]:

$$b^* = -\frac{1}{2} \left( \max_{y_i=-1} (\vec{\alpha}^* \cdot \vec{x}_i) + \max_{y_i=+1} (\vec{\alpha}^* \cdot \vec{x}_i) \right) \quad (15)$$

Resumiendo, para encontrar el par  $(\vec{\alpha}^*, b^*)$  que define el hiperplano de separación óptimo se resuelve el problema dual (D) obteniéndose los multiplicadores  $\vec{\beta}^*$  óptimos. Utilizando estos valores en las expresiones (12) y (15) se obtienen  $\vec{\alpha}^*$  y  $b^*$ , respectivamente.

---

## 6. Resultados del Modelo Predictivo

---

El modelo desarrollado con la técnica SVM fue comparado con el sistema de predicción de fugas que poseía la institución. Este sistema utilizaba como técnica de modelación una red neuronal multicapa (MLP). Las comparaciones entre el modelo antiguo y el modelo propuesto, se realizaron en base a una muestra común, utilizando el mismo número de atributos (variables) y los mismos conjuntos de entrenamiento y test.

El cuadro 2 muestra un resumen de los resultados obtenidos por el modelo SVM y la red MLP, en términos de porcentaje de acierto.

Porcentajes de Acierto				
Modelo	Entrenamiento (%)	Varianza	Test(%)	Varianza
SVM	89.41	0.01	87.91	0.01
RED MLP	80.40	0.10	77.47	0.20

Cuadro 2: Comparación entre el Modelo SVM y Red Neuronal MLP.

Tanto para el conjunto de entrenamiento, como para el conjunto de test, el modelo SVM fue superior a la red MLP.

Otro punto a destacar es que los resultados arrojados por la red MLP poseen una mayor varianza, lo que va en desmedro de la estabilidad de los resultados.

También se comparó la efectividad de ambas técnicas, en dos meses consecutivos, respecto a la cartera total de clientes. Se aplicaron ambos modelos a un conjunto formado por 60.000 clientes, en donde se seleccionaron para cada modelo los 5.000 clientes que poseían mayores tendencias a la fuga.

Cabe destacar que los conjuntos de clientes con tendencias a la fuga generados por ambas técnicas pueden ser diferentes, ya que puede pasar que para un modelo un cliente tenga claros síntomas de fuga y para el otro no.

El cuadro 5.2.1 se detallan los aciertos para cada conjunto de clientes: por ejemplo, en el mes 1 se observa que al comparar los 20 clientes con mayores síntomas de fuga por cada modelo, SVM identifica 10 casos, mientras que la red MLP no identifica ninguno de los casos de fuga.

Se observa la superioridad en la predicción de fuga de los clientes en ambos meses por parte del modelo propuesto (SVM), siendo esta superioridad acentuada en los primeros segmentos de clientes seleccionados (los de más alta tendencia).

Clientes con Mayores Tendencias a la Fuga							
Mes 1							
Modelo	20	50	100	500	1.000	2.000	5.000
SVM	10	15	24	53	80	122	274
Red MLP	0	3	3	10	17	51	251
Mes 2							
SVM	6	10	20	40	68	118	277
Red MLP	1	3	5	20	36	83	285

Cuadro 3: Comparación de aciertos.

---

## 7. Conclusiones y Trabajo Futuro

---

### 7.1. Conclusiones del Estudio

El modelo de predicción de fugas es una herramienta importante de apoyo a la hora de decidir cuáles de los clientes de la cartera poseen una mayor tendencia a la fuga. Al identificar de mejor forma a estos clientes es posible: (1) aumentar las utilidades y la rentabilidad del negocio, ya que da la posibilidad de retener clientes fugitivos y mantenerlos como clientes captando sus flujos futuros; (2) focalizar los recursos productivos sobre los segmentos que realmente necesitan de acciones de retención fuertes aumentando la eficiencia y efectividad de las políticas de retención; (3) generar un mejoramiento y fortalecimiento de la relación entre el cliente y la institución, al anticiparse a sus necesidades, así como hacer menos sensible al cliente frente a las campañas de marketing de la competencia; (4) disminuir el riesgo total de la cartera, al reducir la necesidad de atraer nuevos clientes potencialmente más riesgosos.

Respecto a la técnica utilizada para la modelación, se reafirma su fortaleza en términos de predicción alcanzando diferencias cercanas a los 10 puntos porcentuales respecto a los resultados obtenidos por el sistema que usaba la institución (Red MLP). En términos de estabilidad, el modelo propuesto entregó resultados con una menor varianza, generando resultados más robustos.

### 7.2. Trabajo Futuro

Las nuevas líneas de investigación y trabajos futuros se centran en los siguientes aspectos:

1. Desarrollar nuevos estudios sobre la identificación de atributos relevantes para la clasificación. Un enfoque en esta línea es la penalización de los atributos en la función objetivo.
2. Desarrollar nuevas formulaciones que minimicen el número de puntos sobre los hiperplanos canónicos. Algunas cotas teóricas dependen de este número, siendo más ajustadas mientras menos puntos haya en los hiperplanos canónicos.

**Agradecimientos** Los autores les agradecen al Núcleo Científico Milenio “Sistemas Complejos de Ingeniería” P04-066-F y al proyecto Fondecyt N°1040926, por el apoyo brindado en la elaboración y financiamiento de este estudio.

## Referencias

- [1] A. Athanassopoulos. Customer satisfaction cues to support market segmentation and explain switching behavior. *Journal of Business Research*, 47(3):197–207, 2000.
- [2] M. Bazaraa, H. Sherali, and C. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley, New York, second edition, 1993.
- [3] C.B. Bhattacharya. When customers are members: Customer retention in paid membership context. *Journal of the Academy of Marketing Science*, 26(1):31–44, 1998.
- [4] C. Burges. A tutorial on support vector machines for pattern recognition. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 2(2):121–167, 1998.
- [5] C. Cortés and V. Vapnik. Support vector networks. *Journal of Machine Learning*, 20: 273–297, 1995.
- [6] N. Cristianini and R. Holloway. *Support Vector and Kernel Methods*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [7] N. Cristianini and J. Shawe-Taylor. *An Introduction to Support Vector Machines*. Cambridge, UK, Cambridge University, 2000.
- [8] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*. John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [9] J. Ganesh, M.J. Arnold, and K.E. Reynolds. Understanding the customer base of service providers: An examination of the differences between switchers and stayers. *Journal of Marketing*, 64(3):65–87, 2000.
- [10] M.A. Jones, D.L. Mothersbaugh, and S.E. Beatty. Switching barriers and repurchase intentions in services. *Journal of Retailing*, 72(2):259–374, 2000.
- [11] M.A. Jones, D.L. Mothersbaugh, and S.E. Beatty. Why customers stay: measuring the underlying dimensions of services switching costs and managing their differential strategic outcomes. *Journal of Business Research*, 55(6):441–450, 2002.
- [12] B. Mittal and W.A. Kamakura. Satisfaction, repurchase intent, and repurchase behavior: investigating the moderating effect of customer characteristics. *Journal of Marketing Research*, 1(131–142), 2000.

- [13] M. Paulin, J. Perrien, R.J. Ferguson, and A.M.A. Salazar. Relational norms and client retention: external effectiveness of commercial banking in canada and mexico. *International Journal of Bank Marketing*, 16(1):24–31, 1998.
- [14] H.C. Pohani, K.R. Lane, and S. Pofcher. Format renewal in banks – it’s not easy. *McKinsey Quarterly*, 2:148–154, 1998.
- [15] E. Ramusson. Complaints can build relationships. *Sales and Marketing Management*, 151(9):89–90, 1999.
- [16] F. Reichheld and E. Sasser. Zero defections: Quality comes to services. *Harvard Business Review*, 1990:105–111, September–October, 2000.
- [17] B.Schölkopf, K. Sung, C. Burgues, J.C. Girosi, P. Niyogui, and V. Vapnik. Comparing support vector machine with gaussian kernels to radial basis function classifiers. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 45(11):2758–2765, 1997.
- [18] D. Van den Poel and Bart Larivière. Customer attrition analysis for financial services using proportional hazard models. Technical Report B–9000, Department of Marketing, Ghent University, Hoveniersberg 24, 2003.
- [19] V. Vapnik. *Estimation of dependences based on empirical data*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [20] V. Vapnik. *The nature of statistical learning theory*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [21] V. Vapnik. *Statistical Learning Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1998.

---

# PREPROCESAMIENTO EFECTIVO DE UN PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN DE COMBUSTIBLE EN SISTEMAS DE TRANSPORTE DE GAS NATURAL

---

YANET VILLALOBOS MORALES\*  
ROGER Z. RÍOS MERCADO\*

## Resumen

*El presente trabajo trata una clase de los diversos problemas de toma de decisiones que surgen en sistemas de transporte de gas natural. En particular, el problema tratado consiste en, dada una red de gasoductos, con ciertas restricciones de capacidad en centros proveedores (donde se inyecta gas al sistema) y de demanda en puntos de entrega (donde se requiere el gas), determinar la forma más eficiente de operar el sistema con el objetivo de minimizar la cantidad de combustible consumido por las estaciones compresoras que empujan el fluido a través de la red. Específicamente, las variables de decisión son el flujo másico a través de cada arco de la red y la presión del gas en cada nodo de la red. Como es bien conocido en estos sistemas de transporte, el impacto económico derivado de una operación eficiente del sistema es vital debido a las inmensas cantidades de gas que se transportan cada año. En este artículo se presenta la formulación de este problema como un modelo de optimización no lineal. En ésta se incluye una descripción de la estructura matemática del modelo, así como también las suposiciones utilizadas. El modelo es no lineal y no convexo y con una estructura tal que presenta diversas dificultades numéricas al intentar solucionarlo. Posteriormente se presentan y describen las técnicas de preprocesamiento utilizadas en este problema. Estas técnicas de preprocesamiento consisten esencialmente en, antes de optimizar el problema en sí, transformarlo en uno equivalente que tenga mejores propiedades para ser resuelto numéricamente. La fase experimental del presente trabajo comprueba que el uso de estas técnicas en el presente problema impacta significativamente en el rendimiento del algoritmo de optimización, lo cual es la principal aportación del presente trabajo. Estos resultados son avalados estadísticamente.*

---

\*Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León AP, México

**Palabras Clave:** industria de gas natural; sistemas de transporte; optimización de flujo en redes; optimización no lineal; preprocesamiento; Método heurístico.

---

## 1. Introducción

---

### 1.1. Descripción y Relevancia del Problema

Uno de los servicios principales en la industria del gas natural es la transportación del gas a través de una sistema de redes de gasoductos. Al fluir el gas por la red, se pierden energía y presión debido a la fricción que existe entre el gas y las paredes internas de la tubería y a la transferencia de calor que existe entre el gas y sus alrededores. Para sobreponer esta pérdida de energía y mantener al gas en movimiento, se instalan estaciones compresoras en varios puntos de la red. Típicamente, las estaciones consumen un 3-5 % del gas que está siendo transportado resultando en un costo por consumo de combustible relativamente alto (Wu, 1998). Este costo de transportación es significativo porque la cantidad de gas que se transporta anualmente en cualquier sistema es enorme. De acuerdo a Luongo, Gilmour y Schroeder (1989), los costos de operación de estaciones compresoras prendidas representan entre un 25 % y 50 % del presupuesto de operación total de la compañía. Todo esto hace al problema de minimizar el consumo de combustible en una red de gasoductos significativamente importante. El problema de toma de decisiones aquí planteado consiste en determinar la manera de operar los compresores y la red, con el objetivo de transportar el gas desde centros de almacenamiento o producción (donde se inyecta gas al sistema) a los diferentes centros de distribución (donde se requiere el gas) al menor costo posible. Numerosas simulaciones basadas en modelos en estado estable o modelos en estado transiente han sido usadas para intentar proveer soluciones a este tipo de problema. La industria del gas ha desarrollado, a través de los años, redes más grandes y sistemas más complejos. Una red típica hoy en día puede consistir de cientos de ductos, docenas de estaciones compresoras, y muchos otros componentes, tales como válvulas y reguladores. Dentro de cada estación pueden existir varias unidades compresoras. Una red puede transportar miles de MMCFD (1MMCFD = 106 pies cúbicos por día) de gas. Hoy, con la ayuda de las computadoras digitales, numerosas cantidades de simulaciones de redes de gas trabajan exitosamente. Esto abre las puertas al desarrollo de algoritmos de optimización. A través de los años, muchos investigadores han intentado resolver este problema con variación en el grado de éxito. Las dificultades de tales problemas de optimización provienen de varios aspectos. Primero, las estaciones compresoras son muy

sofisticadas. Éstas pueden consistir en docenas de unidades compresoras con diferentes configuraciones y características. Por otra parte, el comportamiento de una unidad compresora es no lineal, esto es, el conjunto de restricciones que define las condiciones de operación factible de un compresor junto con las restricciones en los ductos constituyen un sistema complejo de restricciones no lineales. Todas estas características hacen que el problema sea difícil de resolver y dificulten el éxito de algoritmos de optimización existentes. Técnicamente, este problema no convexo está clasificado como NP-difícil (Garey y Johnson, 1979).

## 1.2. Antecedentes Científicos

El primer trabajo en el desarrollo de algoritmos de optimización para redes de gas natural es atribuido a Wong y Larson (1968). En este trabajo, se usan técnicas de programación dinámica (DP, por sus siglas en inglés) para resolver problemas de optimización en redes sencillas de gas natural. Las principales ventajas de la DP son que se garantiza que el óptimo global es encontrado y que la no linealidad puede ser fácilmente manejada. Una desventaja que se tiene al usar DP en este tipo de problemas es su limitación a redes con estructuras sencillas, por ejemplo redes tipo línea recta y tipo árbol. Otra desventaja es que los cálculos se incrementan exponencialmente según la dimensión del problema. La aplicabilidad de DP en problemas con topologías simples obedece al hecho que ha sido demostrado (Osiadacz, 1987) que es posible predeterminar los flujos de antemano lo cual reduce el problema a encontrar los valores óptimos de presiones. En redes con ciclos, esta propiedad no se aplica por lo que deben considerarse presiones y flujos en el proceso de optimización. Para mayor información sobre programación dinámica aplicada a este tipo de problema véase Ríos-Mercado (2002).

Otro tipo de metodología para resolver este tipo de problemas fue la empleada por Percell y Ryan (1987). Ellos aplican el método de optimización no lineal del Gradiente Reducido Generalizado (GRG). Las ventajas que presenta este método es que, a diferencia de la programación dinámica, el aumento de la dimensionalidad del problema no le afecta tan dramáticamente, y por tanto permite que puede aplicarse a redes con ciclos. El precio que se paga por esto es que al estar el método basado en un proceso de búsqueda de gradiente que satisface condiciones de optimalidad local, no garantiza el encontrar un óptimo global en un problema no convexo como el aquí estudiado.

En estudios más recientes, Wu (1998) realizó su investigación doctoral sobre la minimización de consumo de combustible en redes de transporte de gas natural y simulación en estado estable. En este trabajo, se establece un modelo matemático completo del flujo en estado estable para redes de gas natural. Uno de los productos de ese trabajo, publicado en Ríos-Mercado et al. (2002), fue

la demostración, haciendo uso de los resultados de teoría de grafos y análisis funcional, de la existencia de la solución única para un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que surgen de los flujos en una red de transporte. Basado en estos resultados, se derivó un método de descomposición de la red con el que se obtuvo grandes reducciones de tamaño, ayudando a simplificar la dificultad del problema. En Wu et al. (2000), se desarrolló un procedimiento de acotamiento inferior, el cual fue probado en algunas topologías con buenos resultados.

En otro trabajo de investigación doctoral, Kim (1999) trabajó en un procedimiento de solución heurística para el PMCC en topologías con ciclos. Esta metodología de solución heurística se basa en un procedimiento iterativo de dos etapas. En particular, en cada iteración, como primera etapa, las variables de flujo de gas son fijadas y las variables de presiones óptimas son encontradas utilizando DP. En el segundo estado, las variables de presiones son fijadas y se intenta encontrar un conjunto de variables de flujo, las cuales mejoran la función objetivo al explotar la estructura fundamental de la red.

### 1.3. Objetivo

Los métodos recién citados suponen que se parte de una solución factible inicial que en la práctica es en ocasiones muy difícil de obtener debido a la complejidad que presenta la estructura matemática del modelo. Es decir, no existe una forma sistemática de generar soluciones factibles iniciales. Inclusive, en algunos métodos clásicos de NLP, como el método del gradiente reducido, aunque técnicamente el algoritmo puede iniciar la búsqueda en un punto inicial no factible, el algoritmo de solución encuentra dificultades numéricas debido a la compleja estructura matemática del PMCC. Esto ocasiona que el algoritmo no converja a un óptimo local, afectando significativamente el tiempo computacional empleado. Peor aún, en muchas ocasiones no es posible obtener soluciones factibles al problema.

Reconociendo esta dificultad existente en encontrar, de una forma sistemática, soluciones factibles iniciales para el PMCC, y notando que esta es una limitante en los trabajos arriba citados, la parte medular de este trabajo se enfoca en el estudio y evaluación de técnicas de preprocesamiento, que básicamente consisten en, antes de optimizar el problema, transformarlo en uno equivalente que tenga mejores propiedades para ser resuelto desde el punto de vista computacional. Esto constituye la principal aportación del presente trabajo.

Este artículo está organizado como sigue. En la sección 2, se presenta el planteamiento del problema. Se plantean las suposiciones empleadas así como el modelo matemático. En la Sección 3, se describen las diferentes técnicas de preprocesamiento utilizadas en la evaluación. Se discute su importancia y

relevancia, así como las posibles ventajas y desventajas, y el impacto potencial en la calidad de las soluciones obtenidas. En la Sección 4, se presenta el trabajo experimental. Se presenta una extensa evaluación computacional de las técnicas de preprocesamiento en una diversidad de instancias de prueba. Entre los resultados principales de esta evaluación se observó que la fase de preprocesamiento impacta de una manera positiva el comportamiento del algoritmo. Por último, en la Sección 5 se presentan las conclusiones y recomendaciones para trabajo futuro.

---

## 2. Planteamiento del Problema

---

### 2.1. Suposiciones

La operación real de sistemas de transporte de gas natural es bastante compleja. Debido a esto, es necesario hacer algunas consideraciones que permitan estudiar el problema. Cabe aclarar que aún con estas suposiciones la estructura matemática de este tipo de problema es bastante complicada ya que la función objetivo es no lineal y no convexa, el dominio de operación factible del compresor define un conjunto no convexo y las restricciones de flujo en los ductos definen un conjunto no lineal y no convexo. Como es bien conocido (Garey y Johnson, 1979) un problema con estas características es NP-difícil. Las suposiciones que se consideraron para nuestro estudio fueron las siguientes:

**S1. Sistema en estado estable.** Bajo este supuesto consideramos que los valores característicos del flujo de gas en el sistema son independientes del tiempo. En este caso, el sistema de restricciones, particularmente aquellas que describen el flujo del gas a través de los ductos pueden ser descritas usando ecuaciones algebraicas no lineales. Existe otro tipo de sistema cuando en el análisis se considera el tiempo, este tipo de sistema es considerado en estado transitorio. En un sistema transitorio las variables del sistema, tales como flujos y presiones, están en función del tiempo. Para modelarlo se tiene que hacer uso de ecuaciones diferenciales parciales en función del tiempo que describen la relación que existe entre estas variables. El sistema en estado transitorio ha sido abordado con muy poco grado de éxito desde la perspectiva de optimización debido a la gran complejidad que se tiene en la estructura matemática del modelo para este tipo de sistema y representa sin duda uno de los grandes retos en materia de investigación en los años por venir.

- S2. La red es dirigida.** Consideramos que el sentido del flujo en cada ducto se conoce con anterioridad.
- S3. Temperatura ambiente constante.** Se considera un proceso isotérmico, es decir, que la temperatura en el sistema se mantiene constante en cada ducto. Esto se hace con la finalidad de hacer más tratable la restricción de flujo en los ductos.
- S4. Número fijo de compresores en cada estación compresora.** El número de compresores operando en cada estación se considera como un parámetro conocido. Aunque en la práctica puede ser posible considerar este dato como una variable de decisión, esto convertiría al problema en un programa entero mixto no lineal, lo cual requiere una metodología de solución enteramente diferente.
- S5. Todas las unidades compresoras en una estación compresora son centrífugas, idénticas e instaladas en paralelo.** El hecho de considerar idénticas y conectadas en paralelo, nos permite suponer que el flujo que entra a la estación compresora se reparte equitativamente entre el número de compresores que tenga la estación lo cual facilita el análisis. Este tipo de configuración es además común en la industria. El tipo centrífugo de compresores es también de los más popularmente utilizados en el medio industrial.

## 2.2. Modelo Matemático

En la definición del modelo empleamos la siguiente nomenclatura.

### Índices y conjuntos

$N$  = Conjunto de nodos en la red

$N_f$  = Conjunto de nodos fuente ( $N_f \subseteq N$ )

$N_d$  = Conjunto de nodos destino ( $N_d \subseteq N$ )

$A_p$  = Subconjunto de arcos ductos

$A_c$  = Subconjunto de arcos compresores

$A$  = Conjunto de arcos en la red ( $A = A_p \cup A_c$ )

## Parámetros

$U_{ij}$  = Capacidad del ducto  $(i, j); (i, j) \in A_p$

$R_{ij}$  = Resistencia del ducto  $(i, j); (i, j) \in A_p$

$B_i$  = Flujo neto en el nodo  $i; i \in N$  donde:

$$B_i = \begin{cases} > 0 & \text{si } i \in N_f \\ < 0 & \text{si } i \in N_d \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

## Variables

$x_{ij}$  = Flujo de masa en el arco  $(i, j); (i, j) \in A$

$p_i$  = Presión en el nodo  $i; i \in N$

El modelo queda establecido como sigue:

$$\text{minimizar } \sum_{\{(i,j) \in A_c\}} g_{ij}(x_{ij}, p_i, p_j) \quad (1)$$

Sujeta a:

$$\sum_{\{j|(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in A\}} x_{ji} = B_i \quad i \in N \quad (2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq U_{ij} \quad (i, j) \in A_p \quad (3)$$

$$p_i^2 - p_j^2 = R_{ij} x_{ij}^2 \quad (i, j) \in A_p \quad (4)$$

$$p_i^L \leq p_i \leq p_i^U \quad i \in N \quad (5)$$

$$(x_{ij}, p_i, p_j) \in D_{ij} \quad (i, j) \in A_c \quad (6)$$

El objetivo (1), como ya se mencionó antes, es una función no lineal y no convexa y describe para nuestro problema el consumo total de combustible en

la red en cada arco compresor que se encuentre en la red. Está definida (Wu et al., 2000) como:

$$g_{ij}(x_{ij}, p_i, p_j) = \left( \frac{c}{\eta(x_{ij}, p_i, p_j)} \right) \cdot x_{ij} \left[ \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^m - 1 \right]$$

con

$$c = ZRT/m$$

$$\eta(x_{ij}, p_i, p_j) = A_E + B_E \left( \frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right) + C_E \left( \frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right)^2 + D_E \left( \frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right)^3 \quad (7)$$

Aquí,  $Z = 0,95$  es el factor de compresibilidad del gas,  $R$  es la constante del gas,  $T = 519^\circ\text{R}$  la temperatura promedio del gas y  $m = 0,229$  es la razón de calor específico del gas. El término  $\eta$  es la eficiencia adiabática del compresor y  $A_E, B_E, C_E$  y  $D_E$  son constantes estimadas por el método de mínimos cuadrados de mediciones del compresor. La restricción (2) denota el balance de flujo de masa en cada nodo de la red. Un valor positivo de  $B_i$  indica que el nodo  $i$  es fuente, mientras que un valor negativo indica que se trata de un nodo demanda. Se supone que es una red balanceada, es decir,  $\sum_{i \in N} B_i = 0$ . La restricción (3) denota la capacidad del flujo de gas en cada ducto. En la práctica, éste es típicamente fijado por el distribuidor a un valor un poco menor que la capacidad real del ducto para compensar por posibles desbalances. La restricción (4) representa la dinámica del flujo de gas a través del ducto. Es una ecuación que indica la relación entre la caída de presiones y el flujo, y es válida para gases de alta presión. Nótese que el parámetro de resistencia está dado a su vez por  $R_{ij} = CfL/d^5$ , donde  $C$  es una constante que se calcula como  $C = KZS_gT$ , con  $K = 133050$  la constante del ducto,  $Z = 0,95$  el factor de compresibilidad del gas,  $S_g = 0,6248$  la gravedad específica del gas y  $T = 519^\circ\text{R}$  la temperatura promedio del gas; y  $f, L$  y  $d$ , son el factor de fricción, la longitud del ducto y el diámetro interior del ducto respectivamente, las cuales pueden variar de ducto a ducto. Para más detalle puede verse Osiadacz (1987). La restricción (5) describe el rango de presión permisible para cada nodo de la red. Estos límites superior e inferior son dados por el distribuidor. La restricción (6) representa los límites de operación en cada compresor. Estos límites definen el dominio en el cual el compresor puede operar en la industria. Este dominio factible de operación  $D_{ij}$  está dado a su vez por las siguientes relaciones:

$$\frac{H_{ij}}{S_{ij}^2} = A_H + B_H \left( \frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right) + C_H \left( \frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right)^2 + D_H \left( \frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right)^3 \quad (8)$$

$$S_{ij}^L \leq S_{ij} \leq S_{ij}^U \quad (9)$$

$$r_1 \leq \frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \leq r_2 \quad (10)$$

Donde  $Z$  (factor de compresibilidad del gas),  $R$  (constante del gas) y  $T$  (temperatura de succión del gas), son parámetros que dependen de las propiedades físicas del gas;  $S_{ij}^L$ ,  $S_{ij}^U$ ,  $r_1$  y  $r_2$  son parámetros establecidos en el compresor;  $A_H$ ,  $B_H$ ,  $C_H$  y  $D_H$  son constantes estimadas por el método de mínimos cuadrados a partir de mediciones de valores de  $H_{ij}$ ,  $Q_{ij}$ ,  $S_{ij}$ , y éstas a su vez son variables (cabeza adiabática, flujo volumétrico, velocidad del compresor, respectivamente) que están relacionadas a las variables del problema mediante las siguientes relaciones:

$$H_{ij} = \frac{ZRT}{m} \left[ \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^m - 1 \right] \quad (11)$$

$$Q_{ij} = ZRT \left( \frac{x_{ij}}{p_i} \right) \quad (12)$$

Es decir, podemos expresar  $D_{ij} = \{(x_{ij}, p_i, p_j) : p_i^L = p_i = p_i^U, (9), (10), (11) \text{ y } (12) \text{ se cumplen}\}$ . Para una descripción más detallada de la estructura matemática que compone un compresor centrífugo puede verse Villalobos Morales (2002). Las restricciones (2) y (3) son las comunes en un modelo de flujo en redes típico. Las restricciones (4), (5) y (6) son propias del problema en cuestión y son las que en unión con la función objetivo hacen que el modelo sea difícil de resolver, ya que éstas son no lineales y definen un conjunto no convexo.

---

## 3. Técnicas de Preprocesamiento

---

### 3.1. Importancia y Relevancia

Dada una formulación de un problema de optimización, el preprocesamiento se refiere a operaciones elementales que pueden ser desarrolladas para mejorar o simplificar la formulación mediante el acotamiento de variables y asignación de valores iniciales, por mencionar algunas. El preprocesamiento puede ser interpretado como una fase entre formulación y solución. Este puede acrecentar enormemente la velocidad de un algoritmo sofisticado el cual, pudiera por ejemplo, estar imposibilitado para reconocer el hecho de que alguna variable puede ser fijada y entonces eliminada del modelo (Nemhauser y Wolsey, 1989). Ocasionalmente un problema pequeño puede ser resuelto en la fase de preprocesamiento o por la combinación de preprocesamiento con algún proceso enumerativo. Aunque esta aproximación ha sido abordada como una técnica de solución en el desarrollo primitivo de programación entera, bajo el nombre de enumeración implícita, este no es el papel importante de estas técnicas simples. Su principal propósito es preparar una formulación rápida y más efectiva para un algoritmo más sofisticado. Desafortunadamente, ha tomado mucho tiempo a los investigadores reconocer el hecho de que existe generalmente la necesidad para ambas fases en la solución de problemas prácticos.

Para resolver el PMCC, primeramente se formuló matemáticamente como un programa no lineal donde la función objetivo representa el consumo de combustible incurrido por todas las estaciones compresoras que se encuentran en la red. Posteriormente se aplicó el algoritmo GRG (Bazaraa, Sherali y Shetty, 1993). Para la modelación y para el uso del método se utilizó GAMS (Brooke, Kendrick y Meeraus, 1992), software de modelación algebraica con interfaces a varias librerías de optimización. Sin embargo debido a la complejidad del problema, donde se tiene una función objetivo no convexa y restricciones que definen un conjunto no convexo, al aplicar este método de solución surgieron dificultades de diversos tipos. Por ejemplo, la principal dificultad que se presentó en nuestro problema al aplicar el algoritmo fue que no se encontraba ninguna solución factible inicial (en problemas donde se sabía que sí eran factibles) para diversos valores de flujo de masa para los nueve compresores utilizados en la evaluación.

Como ya se había mencionado anteriormente cualquier algoritmo de optimización requiere un punto inicial para iniciar su proceso de búsqueda para la optimización. Debido a que para este problema aun no se cuenta con un

procedimiento eficiente que encuentre soluciones factibles iniciales, fue necesario emplear algunas técnicas comunes de preprocesamiento que básicamente consisten en, antes de optimizar el problema, transformarlo en uno equivalente que tenga mejores propiedades para ser resuelto desde el punto de vista computacional con la finalidad de que ayuden al algoritmo a encontrar dichas soluciones iniciales para el problema en cuestión. Esto fue lo que motivo el desarrollo del presente trabajo.

## **3.2. Descripción de Técnicas de Preprocesamiento**

### **3.2.1. Acotamiento de Variables**

El acotamiento en una variable consiste en especificar una cota inferior y otra superior, aun en el caso en que una variable no está restringida. Esto se realiza con la finalidad de hacer la región factible o espacio de búsqueda más reducido, con el objetivo de que el esfuerzo computacional empleado por el algoritmo para encontrar la solución óptima local sea menor.

Existen dos razones por las cuales las cotas son importantes en modelos no lineales. La primera es que las cotas previenen de que el algoritmo realice operaciones no definidas, tales como la división por cero. La segunda razón es que éstas pueden garantizar que las variables permanezcan en una región apropiada. Algunas veces se obtienen valores en soluciones parciales enormemente grandes y recursos considerables pueden ser desperdiciados. La estrategia más segura es acotar todas las variables superior e inferiormente y para el PMCC podemos conocer las cotas de todas las variables.

### **3.2.2. Asignación de Valores Iniciales de Variables**

El asignar buenos valores iniciales es importante por muchas razones (Drud, 1992). Valores iniciales que satisfacen o cercanamente satisfacen muchas de las restricciones hacen que se reduzca el trabajo involucrado en encontrar una solución inicial factible. Los valores iniciales que además son cercanos al óptimo también reducen la distancia al punto final y por lo tanto indirectamente el esfuerzo computacional. El progreso del algoritmo de optimización se basa en una buena información direccional y por lo tanto de buenas derivadas. Las derivadas en un modelo no lineal dependen del punto actual y del punto inicial en el cual las primeras derivadas son calculadas. Finalmente, los modelos no convexos pueden tener múltiples soluciones, pero el modelador está buscando una en una parte particular del espacio de búsqueda, es decir en una vecindad apropiada donde sea más probable encontrar la solución deseada. Típicamente, cuando se deja que el punto inicial sea asignado arbitrariamente por un algoritmo optimizador, los valores iniciales con los que inicia tienen de antemano el valor cero proyectado en los límites. Por ejemplo, si una variable del modelo

es libre o tiene una cota inferior de cero, entonces para ésta su valor inicial es cero. Desafortunadamente, cero es en muchos de los casos un valor inicial malo para una variable no lineal. Un valor inicial de cero es especialmente malo si la variable aparece en un término de producto ya que la derivada inicial se hace cero, y esto hace parecer que la función no depende de la variable. Si en el problema existe una variable que tiene una cota inferior positiva pequeña, por ejemplo, si esta variable aparece como argumento de la función logarítmica o como un denominador, entonces de antemano el valor inicial de la variable es esa cota inferior y ésta también es mala ya que este punto tendrá primeras y segundas derivadas muy grandes.

Una posibilidad es inicializar todas las variables en 1, o utilizar un factor de escala si se combina con alguna opción de escalamiento. Otra posibilidad es seleccionar valores razonables para algunas variables que del contexto se conoce que son importantes y entonces usar algunas de las ecuaciones del modelo para derivar valores para las otras variables.

### 3.2.3. Escalamiento

Existen una diversidad de factores que pueden influenciar la eficiencia y éxito de un optimizador no lineal, incluyendo la forma en la cual el modelo es formulado y la selección de las unidades (o escalamiento) para las variables (Fourer, Gay y Kernighan, 1990). El escalamiento consiste en que los valores de los coeficientes de las variables deberían tener un grado de magnitud muy parecido. Los optimizadores pueden introducir error cuando algunos coeficientes de variables o restricciones varían considerablemente. Algunos optimizadores automáticamente escalan el problema para tratar de no permitir esta situación, pero se puede ayudar considerablemente analizando con buen juicio las unidades en las cuales las variables son expresadas.

Las variables llegan a ser bien escaladas si éstas son medidas con las unidades apropiadas. En la mayoría de los casos se debe seleccionar la unidad de medida para las variables tal que su valor esperado esté alrededor de la unidad. Las ecuaciones llegan a ser bien escaladas si los términos individuales son medidos en las unidades apropiadas. Después de que se han seleccionado las unidades para las variables, el siguiente paso es seleccionar la unidad de medida para las ecuaciones, tal que los valores esperados de los términos individuales estén alrededor de la unidad. Si se siguen estas reglas, se garantiza que las ecuaciones de balance usualmente tendrán coeficientes alrededor de 1. Si el problema estaba mal escalado originalmente, entonces es muy probable que la técnica de escalamiento cause un mejoramiento dramático en el costo y un proceso de solución confiable.

## 4. Evaluación Computacional

En esta sección procedemos a evaluar el impacto del uso de las técnicas de pre-procesamiento descritas anteriormente. Primeramente describimos la base de datos utilizada para esta evaluación, a continuación definimos el diseño experimental de las diversas pruebas y finalmente presentamos los resultados y conclusiones del trabajo.

### 4.1. Descripción de la Base de Datos

Los datos de cada red son tomados de su respectivo archivo de la Tabla 11 que se encuentra en el Apéndice A en (Villalobos Morales, 2002). Para ver todas las instancias que fueron probadas en cada red ver en Apéndice D en (Villalobos Morales, 2002).

#### Topología A: Red en línea

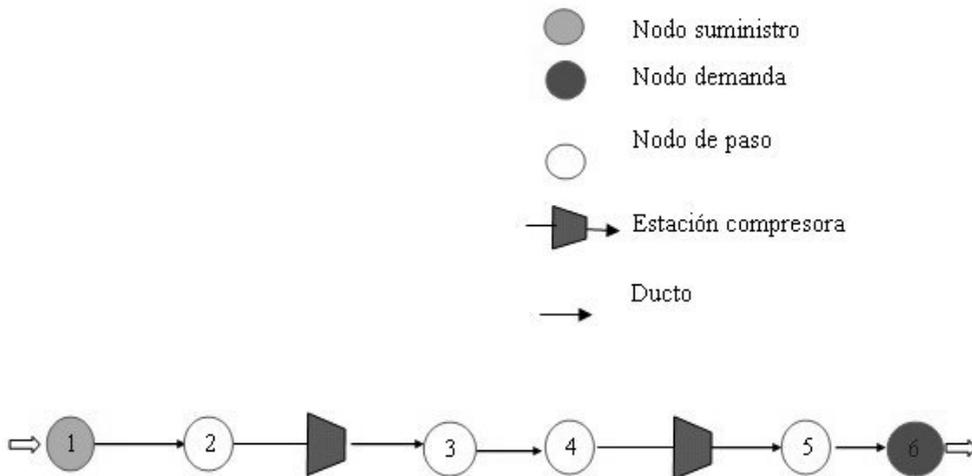


Figura 1: Topología A

Esta red está formada por 6 nodos, tres arcos ductos y dos estaciones compresoras en la red. Los arcos forman una línea recta (llamada una red “gun barrel” en la industria del gas natural) como se muestra en la Figura 1. Esta red tiene un nodo suministro (nodo 1) y un nodo demanda (nodo 6). Se probaron varias instancias con diferentes valores de flujo en los nodos 1 y 6 en unidades MMSCFD. Para todos los otros nodos el  $B_i = 0$ . El rango de presión mínima y máxima para cada nodo es [200, 800] psia respectivamente.

El conjunto de arcos ductos está dado por  $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$ . Para cada ducto,  $L = 50$  millas,  $d = 3$  ft y  $f = 0,0085$ . El conjunto de arcos compresores está dado por  $\{(2, 3), (4, 5)\}$ . Cada estación compresora tiene un compresor centrífugo.

### Topología B: Red tipo árbol

Esta red está formada por diez nodos, seis arcos ductos y tres estaciones compresoras, cada una con un compresor centrífugo, como puede observarse en la Figura 2. La red tiene un nodo suministro (nodo 1) y cinco nodos demanda (nodos 5, 6, 7, 9 y 10). Se probaron varias instancias con diferentes valores de flujo en estos nodos en unidades MMSCFD. Para todos los otros nodos el  $B_i = 0$ . Los límites de presión mínima son dados (en psia) por  $p_1^L = p_2^L = p_4^L = p_{10}^L = 200$ ,  $p_3^L = p_5^L = p_6^L = p_7^L = p_8^L = p_9^L = 250$ . La presión máxima para cada nodo es  $p_i^U = 1500$  psia para todo  $i \in N$ . El conjunto de arcos ductos está dado por  $\{(2, 3), (4, 5), (5, 6), (5, 7), (8, 9), (9, 10)\}$ . Para cada ducto,  $L = 50$  millas,  $d = 3$  ft y  $f = 0,0085$ . El conjunto de arcos compresores está dado por  $\{(1, 2), (3, 4), (3, 8)\}$ .

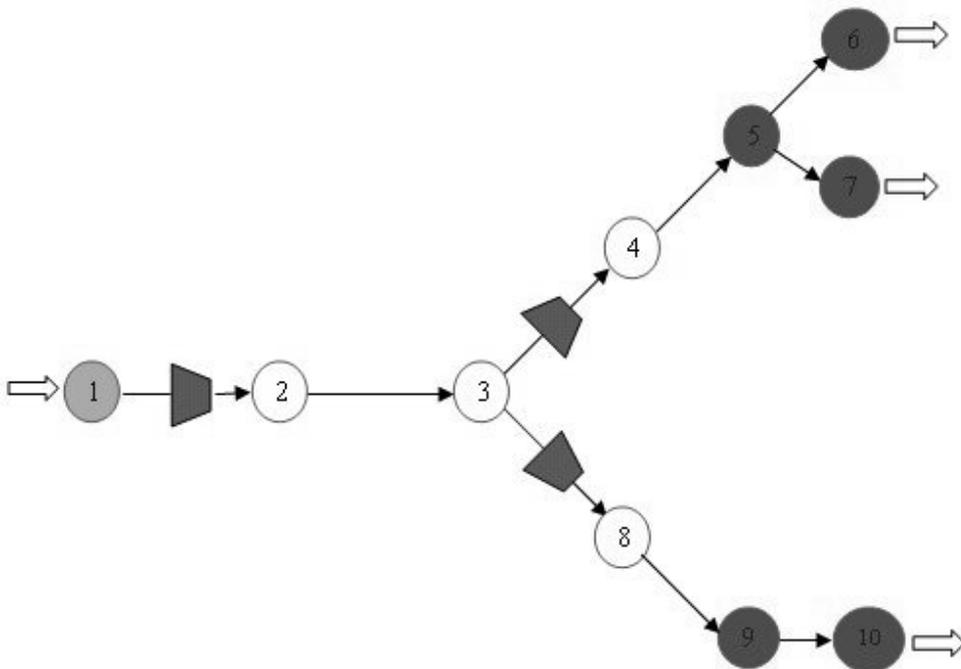


Figura 2: Topología B

### Topología C: Red con ciclo .

El tercer tipo es una red con ocho nodos, cinco arcos ductos y tres estaciones compresoras, como puede observarse en la Figura 3. La red tiene un nodo suministro (nodo 1) y dos nodos demanda (nodos 5, 8). Se probaron varias instancias para diferentes valores de flujo en estos nodos en unidades MMSCFD. Para todos los otros nodos  $B_i = 0$ . Los límites de presión mínima y máxima son:  $p_i^L = 300$  y  $p_i^U = 1200$  psia respectivamente para todo  $i \in N$ . El conjunto de arcos ductos está dado por  $\{(1, 3), (2, 6), (4, 5)(6, 5), (7, 8)\}$ . Para cada ducto,  $L = 40$  millas,  $d = 3$  ft y  $f = 0,0085$ . El conjunto de arcos compresores está dado por  $\{(1, 2), (3, 4), (7, 8)\}$ . Cada estación compresora tiene un compresor centrífugo.

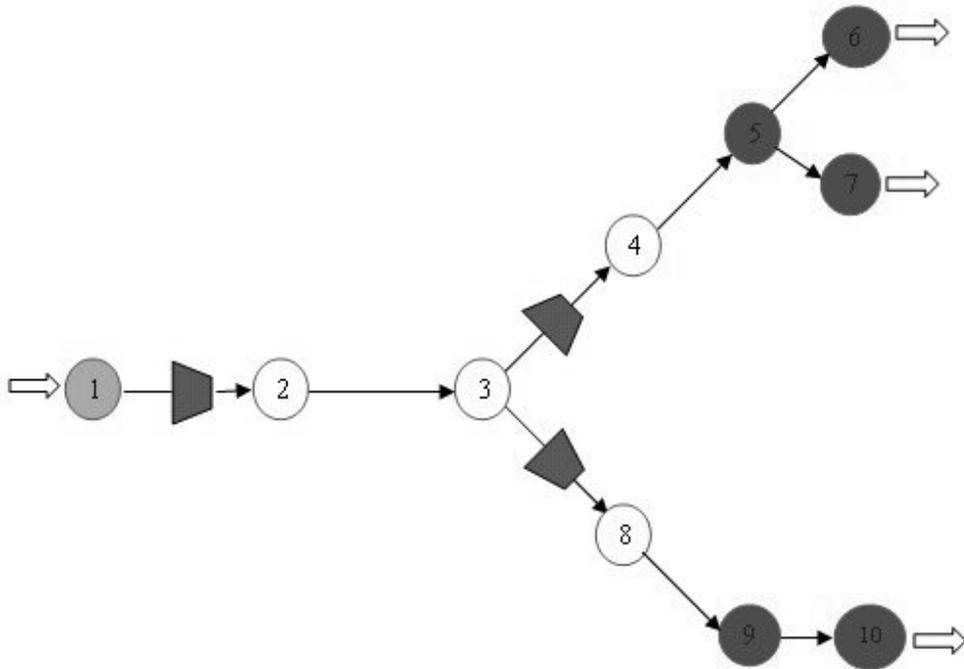


Figura 3: Topología C

#### 4.2. Metodología y Diseño Experimental

Primero, se modelaron matemáticamente las instancias mediante el uso de GAMS, versión 2.50, (Brooke, Kendrick y Meeraus, 1992), en una estación de trabajo Sun Ultra 10. Una vez modelado, se procedió a llevar a cabo la evaluación de las técnicas de preprocesamiento. Los factores que se evaluaron de la fase de preprocesamiento en este experimento fueron: (a) acotamiento de las variables de decisión; (b) asignación de un valor inicial a las variables de decisión y (c) escalamiento de las ecuaciones. Esta evaluación se efectuó en

tres topologías reales de la industria del gas natural (descritas en la Sección 4.1) con datos de nueve compresores centrífugos (Kim, 1999), para los cuales se utilizaron diferentes valores de flujo. Para hacer la comparación entre las técnicas de preprocesamiento utilizadas, se llevó a cabo una prueba de hipótesis utilizando estadística no paramétrica. Los detalles de esta prueba pueden encontrarse en el Apéndice F de Villalobos Morales (2002).

Para llevar a cabo estas evaluaciones, se consideraron los siguientes escenarios. En el escenario E1 se aplicaron al problema original las técnicas de acotamiento de variables y asignación de valores iniciales a las variables. En el escenario E2, al E1 se le agregó la técnica de escalamiento de ecuaciones, en particular escalando la ecuación de la eficiencia del compresor (7). En el escenario E3, al E2 se le añadió el escalamiento a la ecuación del dominio del compresor (8). Para estas evaluaciones se registraron las instancias donde se encontraron soluciones, tanto óptimas como factibles, registrando el número de iteraciones en aquellas instancias donde se encontraron soluciones óptimas, con la finalidad de poder hacer una comparación entre un escenario y otro.

### 4.3. Experimento 1: Impacto de las Cotas en las Variables y Punto Inicial

El objetivo de esta parte del experimento consiste en mostrar una evaluación computacional de dos técnicas comunes de preprocesamiento: acotamiento de las variables y asignación de valores iniciales a las variables, las cuales fueron aplicadas al problema en cuestión, con la finalidad de ayudar al algoritmo en su proceso de búsqueda de soluciones óptimas locales y factibles. En las Tablas 1, 2 y 3 se muestran los resultados al aplicar estas dos técnicas de pre-procesamiento en las tres topologías empleadas en la evaluación.

Tipo de compresor	# instancias probadas	óptimos locales
Snarlin-k1	12	11
Rakeey-k1	10	10
Rakeey-k2	17	14
Hamper-k1	19	12
Bellvan-k1	10	10
Bellvan-k2	10	10
Bellvan-k3	17	12
Bethany-k1	18	14
Bethany-k2	16	12
<b>Total</b>	<b>129</b>	<b>105</b>

Cuadro 1: Aplicación de cotas y solución inicial en topología A

El promedio de iteraciones en este escenario fue de 92 iteraciones. Como puede observarse en la Tabla 1, al aplicar estas técnicas de pre-procesamiento en la topología de red en línea, el número de soluciones óptimas locales encon-

tradas representa el 81 % del total probadas. El 19 % restante esta repartido en soluciones factibles, soluciones no factibles y en algunas instancias donde el algoritmo alcanzó el límite de iteraciones preestablecido sin encontrar una solución. Este resultado es alentador comparado con el obtenido al emplear el algoritmo sin pre-procesamiento donde no se encontraron soluciones factibles para ninguno de los compresores.

Tipo de compresor	# instancias probadas	óptimos locales
Snarlin-k1	18	17
Rakeey-k1	15	14
Rakeey-k2	16	7
Hamper-k1	11	1
Bellvan-k1	9	9
Bellvan-k2	9	9
Bellvan-k3	17	9
Bethany-k1	12	8
Bethany-k2	5	5
<b>Total</b>	<b>112</b>	<b>79</b>

Cuadro 2: Aplicación de cotas y solución inicial en topología B

En la Tabla 2 vemos similares resultados para la red tipo árbol. El promedio de iteraciones en este escenario es de 70,9 iteraciones. En este tipo de topología, como puede observarse, al aplicar las técnicas de pre-procesamiento el número de soluciones óptimas locales encontradas por el algoritmo representa el 70 % del total probadas, el 30 % restante es únicamente para soluciones factibles. Este resultado es también muy alentador, ya que no encontramos soluciones no factibles, ni tampoco hubo instancias donde se alcanzara el límite de iteraciones sin encontrar una solución.

Tipo de compresor	# instancias probadas	óptimos locales
Snarlin-k1	23	21
Rakeey-k1	19	18
Rakeey-k2	25	20
Hamper-k1	31	15
Bellvan-k1	15	15
Bellvan-k2	15	15
Bellvan-k3	22	22
Bethany-k1	20	18
Bethany-k2	19	19
<b>Total</b>	<b>189</b>	<b>163</b>

Cuadro 3: Aplicación de cotas y solución inicial en topología C

Finalmente en la Tabla 3 vemos los resultados para la topología con ciclo. El promedio de iteraciones en este escenario es de 83.8 iteraciones. En este tipo de topología como puede observarse al aplicar las técnicas de pre-procesamiento

el número de soluciones óptimas locales encontradas por el algoritmo representa el 86 % del total probadas, el 14 % restante es únicamente también para soluciones factibles, que se encuentran repartidas en los nueve compresores como puede observarse en la tabla.

**Conclusiones:** De una forma clara y contundente pudo observarse, en las tres topologías utilizadas, que las técnicas de preprocesamiento de acotamiento en las variables y el punto inicial impactaron de una manera positiva en el desarrollo del algoritmo. Al aplicar éstas nos dimos cuenta que el algoritmo ya no tiene tanta dificultad para encontrar soluciones factibles para el problema. Como pudo observarse para cada topología se encontró un buen porcentaje de soluciones óptimas locales. Estos resultados avalan el uso de estas técnicas de preprocesamiento en el algoritmo.

#### 4.4. Experimento 2: Impacto del Escalamiento

Después de realizar la primera parte del experimento, donde se aplicaron dos técnicas comunes de preprocesamiento, nos dimos cuenta de la enorme utilidad de aplicar esta fase de preprocesamiento al algoritmo, ya que se logró obtener una gran cantidad de soluciones óptimas locales. Analizando los resultados obtenidos, observamos que la parte restante donde el algoritmo no encontró soluciones óptimas locales estaba repartida en soluciones factibles (mayoría), soluciones no factibles y soluciones donde se alcanzaba el límite de iteraciones.

La causa principal de que el algoritmo siguiera encontrando soluciones no factibles después de aplicar las dos técnicas de pre-procesamiento anteriores, se debía principalmente a que algunas de las ecuaciones del modelo tenían un mal escalamiento, es decir, los coeficientes de las ecuaciones variaban considerablemente en magnitud, lo que provocaba este tipo de inestabilidades numéricas que provocaban el fallo en el algoritmo. Por tal motivo, fue necesario realizar un mejor escalamiento a algunas de las ecuaciones. El procedimiento consiste en observar los valores de los coeficientes de todas las ecuaciones del modelo. Por ejemplo, en el caso de la ecuación de dominio del compresor (8) en el compresor tipo Bethany-k1 de la topología A, se observó que las magnitudes de sus coeficientes se encuentran aproximadamente tres órdenes de magnitud mayores al del resto de las restricciones. Por tanto, se escala esta restricción dividiéndola toda por  $1.0 \times 10^3$ .

Siguiendo este procedimiento, se determinaron los factores de escalamiento apropiados para cada instancia en cada uno de los compresores utilizados en la evaluación, los cuales se muestran en la Tabla 4. Esta evaluación se realizó para las mismas topologías de la sección anterior. En esta parte del experimento se llevó a cabo la evaluación de la técnica del escalamiento a la ecuación de la

Tipo de compresor	Topología A		Topología B		Topología C	
	Ecuación eficiencia	Ecuación dominio	Ecuación eficiencia	Ecuación dominio	Ecuación	Ecuación dominio
Snarlin-k1	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+04	1.0e+01	1.0e+01
Rakeey-k1	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+04	1.0e+01	1.0e+01
Rakeey-k2	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+02
Hamper-k1	1.0e+01	1.0e+06	1.0e+01	1.0e+05	1.0e+01	1.0e+01
Bellvan-k1	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+02
Bellvan-k2	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+02
Bellvan-k3	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01
Bethany-k1	1.0e+01	1.0e+04	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+03
Bethany-k2	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+02	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01

Cuadro 4: Factores de escalamiento

eficiencia (escenario E2) y ecuación del dominio (escenario E3). Los resultados obtenidos al aplicar el escalamiento a estas dos restricciones para las topologías A, B y C, se muestran en las Tablas 8, 6 y 7 respectivamente. En cada fila se muestra el número de soluciones óptimas locales encontradas para cada compresor en cada escenario.

Como puede apreciarse en las Tablas 8, 6 y 7, los resultados obtenidos al aplicar las tres técnicas de pre-procesamiento son muy alentadores en las tres topologías, ya que se logra encontrar en la mayoría de las instancias probadas soluciones óptimas locales en los nueve compresores utilizados. Haciendo una comparación entre los tres escenarios respecto al número de soluciones óptimas locales encontradas en una de las topologías, se observa que cuando se compara el escenario E1 con el escenario E2 se logra un mejoramiento hasta de un 10%. Al comparar los escenarios E2 y E3 se obtiene una mejora de un 3% y por último comparando el escenario E1 con el escenario E3 se logra obtener una mejora hasta de un 12%. Como puede verse en las tres tablas, el mejor escenario es el E3, ya que en éste se logra obtener el mayor número de instancias con soluciones óptimas locales. Esto se logró porque se le aplicó un mejor escalamiento a una de las ecuaciones del modelo (ecuación del dominio).

Para comprobar estos resultados se realizaron las siguientes pruebas de hipótesis:

- (a)  $H_0$ : El promedio de iteraciones en el escenario E1 es menor o igual que en el escenario E2 vs.  
 $H_1$  : El promedio de iteraciones en el escenario E1 es mayor que en el escenario E2
- (b)  $H_o$  : El promedio de iteraciones en el escenario E2 es menor o igual que en el escenario E3 vs.  
 $H_1$  : El promedio de iteraciones en el escenario E2 es mayor que en el escenario E3 para cada topología

Tipo de Compresor	# instancias probadas	soluciones óptimas locales		
		E1	E2	E3
Snarlin-k1	12	11	12	12
Rakeey-k1	10	10	10	10
Rakeey-k2	17	14	17	16
Hamper-k1	19	12	16	17
Bellvan-k1	10	10	10	10
Bellvan-k2	10	10	10	10
Bellvan-k3	17	12	14	17
Bethany-k1	18	14	14	13
Bethany-k2	16	12	15	15
<b>Total</b>	<b>129</b>	<b>105</b>	<b>118</b>	<b>120</b>

Cuadro 5: Comparación de técnicas (escenarios) en la red en línea.

Tipo de Compresor	# instancias probadas	soluciones óptimas locales		
		E1	E2	E3
Snarlin-k1	17	17	17	18
Rakeey-k1	15	14	15	15
Rakeey-k2	16	7	8	8
Hamper-k1	11	1	1	3
Bellvan-k1	9	9	9	9
Bellvan-k2	9	9	9	9
Bellvan-k3	17	9	14	14
Bethany-k1	12	8	9	9
Bethany-k2	5	5	5	5
<b>Total</b>	<b>112</b>	<b>79</b>	<b>87</b>	<b>90</b>

Cuadro 6: Comparación de técnicas (escenarios) en la red tipo árbol.

Tipo de Compresor	# instancias probadas	soluciones óptimas locales		
		E1	E2	E3
Snarlin-k1	23	21	23	23
Rakeey-k1	19	18	19	19
Rakeey-k2	25	20	23	25
Hamper-k1	31	15	16	20
Bellvan-k1	15	15	15	15
Bellvan-k2	15	15	15	15
Bellvan-k3	22	22	22	22
Bethany-k1	20	18	16	17
Bethany-k2	19	19	18	17
<b>Total</b>	<b>189</b>	<b>163</b>	<b>167</b>	<b>173</b>

Cuadro 7: Comparación de técnicas (escenarios) en la red con ciclo.

Los resultados de esta prueba de hipótesis se muestran a continuación en forma resumida en la Tabla 7, donde se muestra el valor P para cada hipótesis. Para más detalle sobre esta prueba puede verse el Apéndice F en Villalobos Morales (2002).

Red en línea		Red tipo árbol		Red con ciclo	
E1 y E2	E2 y E3	E1 y E2	E2 y E3	E1 y E2	E2 y E3
P = 0.0154	P = 0.0158	P = 0.0212	P $\cong$ 0	P = 0.008	P $\cong$ 0

Cuadro 8: Resultados de prueba de hipótesis.

Como puede apreciarse en la tabla, la prueba fue significativa para cada topología, a un nivel de significancia  $\alpha = 0,05$ . Es decir, se concluye que hay evidencia suficiente para rechazar  $H_0$ , en favor de la hipótesis alternativa que indica que el promedio de iteraciones en E1 es mayor que en E2. Similarmente vemos que el promedio de iteraciones en E2 es mayor que en el escenario E3 para las tres topologías.

**Conclusiones:** Como pudo observarse, la fase de preprocesamiento es de gran importancia para algoritmos que presentan dificultades en su proceso de búsqueda. En particular en este problema se obtuvieron muy buenos resultados en cada una de las evaluaciones realizadas en este experimento al aplicar algunas de las técnicas más comunes de la fase de preprocesamiento. Los resultados obtenidos avalan categóricamente el uso de estas técnicas, gracias a éstas se logro obtener una gran cantidad de soluciones óptimas locales en la mayoría de los compresores utilizados en cada topología y se logró también reducir el esfuerzo computacional empleado por el algoritmo. Lo anterior fue demostrado estadísticamente, utilizando una prueba de hipótesis para confirmar científicamente los resultados obtenidos en esta evaluación.

---

## 5. Conclusiones y Recomendaciones

---

### 5.1. Conclusiones

Este artículo consistió en el estudio de un problema de optimización cuyo objetivo es la minimización del consumo de combustible incurrido por las estaciones compresoras en una red de gas natural. La resolución de este tipo de problema en la industria del transporte del gas natural es de gran interés, ya que las estaciones compresoras consumen una cantidad considerable del gas transportado, ocasionando que su costo de transportación sea bastante alto.

Al analizar la estructura matemática del problema se observan diversas características que lo hacen difícil de resolver, entre ellas figuran la no convexidad de la función objetivo, del dominio de operación factible del compresor y de las ecuaciones que definen el flujo en los ductos. Una dificultad del problema es que cuando se intenta utilizar un algoritmo de optimización, se presentan dificultades para encontrar soluciones factibles al PMCC. Es por ello que este artículo se enfocó en el estudio y evaluación de técnicas de preprocesamiento. Las técnicas de preprocesamiento consisten en, antes de optimizar el problema, transformarlo en uno equivalente que tenga mejores propiedades para ser resuelto desde el punto de vista computacional.

Los resultados obtenidos en la evaluación de las técnicas de preprocesamiento, avalan categóricamente su uso. Las técnicas aplicadas tuvieron un impacto positivo en el algoritmo. Se logró obtener una gran cantidad de instancias (89%) con soluciones óptimas locales para diferentes topologías reales de la industria del gas natural en varios compresores centrífugos. El algoritmo por si solo (sin la fase de preprocesamiento) no pudo encontrar soluciones factibles para la mayoría de instancias del problema. También se logró que el esfuerzo computacional empleado por el algoritmo se redujera notablemente. Los resultados fueron avalados por pruebas de hipótesis utilizando estadística no paramétrica.

## 5.2. Recomendaciones para Trabajos Futuros

Una primera recomendación es ampliar el estudio a un mayor número de instancias. En el presente estudio nos basamos en una instancia por cada una de tres topologías distintas y ciertamente esta base de datos puede ser ampliada. Otra recomendación es que, a partir de las soluciones obtenidas en la evaluación realizada con las técnicas de preprocesamiento, se realice un estudio más completo de la fase de optimización del algoritmo, utilizando éstas como puntos iniciales. Sería de gran utilidad que la evaluación se llevara a cabo entre varios algoritmos no lineales disponibles en el área de optimización para analizar su comportamiento y en base a los parámetros evaluados en cada uno de ellos elegir el que mejor desempeño presente para el problema.

Una de las áreas de oportunidad más importantes es el desarrollar heurísticas que encuentren soluciones factibles iniciales que sirvan como puntos iniciales para la optimización del algoritmo. Esto podría ayudar a seleccionar en forma más metódica el punto de inicio, en lugar de tener que partir de un punto arbitrario. Así mismo, otra área de oportunidad es el emplear técnicas de búsqueda local como GRASP (Díaz et al., 1996) y Búsqueda Tabú (Glover y Laguna, 1997) para mejorar las soluciones obtenidas por los métodos convencionales.

Entre las áreas de investigación de mayor interés figuran el considerar otras variaciones del problema cómo manejar el número de compresores en la estación compresora como una variable de decisión (entera), lo cual hace que el problema se convierta en un problema entero mixto no lineal, lo cual es desde luego un proyecto de mayor complejidad. El tema tratado en este trabajo de investigación es de gran importancia. Se espera que los resultados obtenidos en esta investigación sean de gran utilidad para los trabajos posteriores que aborden este importante problema de la industria del gas natural.

**Agradecimientos** Agradecemos los comentarios y observaciones de un árbitro anónimo que ayudaron a mejorar la presentación del presente trabajo. Este trabajo de investigación fue apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (apoyo J33187-A) y por el Programa de Apoyo a la Investigación Científica y Tecnológica de la UANL (apoyos CA363-00, CA555-01).

## Referencias

- [1] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali y M. Shetty (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley, New York, EUA.
- [2] A. Brooke, D. Kendrick y A. Meeraus (1992). *GAMS: A User's Guide*, Release 2.25. The Scientific Press, South San Francisco, EUA.
- [3] A. Díaz, F. Glover, H. M. Ghaziri, J. L. González, M. Laguna, P. Moscato y F. T. Tseng (1996). *Optimización Heurística y Redes Neuronales*. Paraninfo, Madrid, España.
- [4] A. Drud (1992). CONOPT: A large scale GRG code. *ORSA Journal on Computing*, 6(2):207-216.
- [5] R. Fourer, D. M. Gay y B. W. Kernighan (1990). A modeling language for mathematical programming. *Management Science*, 36(5):519-554.
- [6] M. R. Garey y D. S. Johnson (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York, EUA.
- [7] F. Glover y M. Laguna (1997). *Tabu Search*. Kluwer, Boston, EUA.
- [8] S. Kim (1999). Minimum-Cost Fuel Consumption on Natural Gas Transmission Network Problem. *Disertación doctoral*, Departamento de Ingeniería Industrial, Texas A&M University, EUA.
- [9] C. A. Luongo, B. J. Gilmour y D. W. Schroeder. Optimization in natural gas transmission networks: A tool to improve operational efficiency. Presentado en *3rd SIAM Conference on Optimization*, Boston, EUA, Abril, 1989

- [10] G. L. Nemhauser y L. A. Wolsey. Integer Programming. En G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan y M. J. Todd, editores, Optimization, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol. 1. Capítulo 6, 447-521. Elsevier, Amsterdam, Holanda, 1989.
- [11] A. J. Osiadacz. Simulation and Analysis of Gas Networks. Gulf Publishing Company, Houston, EUA, 1987.
- [12] P. B. Percell y M. J. Ryan. Steady-state optimization of natural-gas pipeline network operation. En *Proceedings of the 19th PSIG Annual Meeting*. Tulsa, EUA, Octubre, 1987.
- [13] R. Z. Ríos-Mercado. Natural gas pipeline optimization. En P. M. Pardalos y M.G. Resende, editores, *Handbook of Applied Optimization*, Capítulo 18.8.3, 813-825. Oxford University Press, New York, EUA, 2002
- [14] R. Z. Ríos-Mercado, S. Wu, L. R. Scott y E. A. Boyd. A reduction technique for natural gas transmission network optimization problems. *Annals of Operations Research*, 117(1-4):199-224, 2002.
- [15] Y. Villalobos Morales. Pre-procesamiento de un Problema de Optimización de Redes de Gas Natural. Tesis de maestría, Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas, FIME, Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, NL, 2002. Disponible en: <http://yalma.fime.uanl.mx/pisis/ftp/pubs/pubs.html>
- [16] P. J. Wong y R. R. Larson. Optimization of natural-gas pipeline systems via dynamic programming. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC13(5):475-481, 1968.
- [17] S. Wu. Steady-State Simulation and Fuel Cost Minimization of Gas Pipeline Networks. *Disertación doctoral*, Departamento de Matemáticas, University of Houston, EUA, 1998.
- [18] S. Wu, R. Z. Ríos-Mercado, E. A. Boyd y L. R. Scott. Model relaxations for the fuel cost minimization of steady-state gas pipeline networks. *Mathematical and Computer Modelling*, 31(2-3):197-220, 2000.

## Programas de Postgrado Impartidos por el DII



# INFÓRMATE

Las postulaciones ya están abiertas



**Teléfonos:**

(56 2) 689 8150 - 978 4002

**E-mail:**

[diplomas@dii.uchile.cl](mailto:diplomas@dii.uchile.cl)

### Magíster en Gestión de Operaciones

CENTRO DE GESTIÓN DE OPERACIONES



El objetivo del Magíster en Gestión de Operaciones es capacitar profesionales mediante la formación en esquemas de gestión, uso de modelos y tecnologías de información de excelencia, que sean capaces de resolver problemas complejos en el ámbito de la gestión de operaciones en las organizaciones.

**Duración del programa:** 3 semestres que incluyen 8 cursos obligatorios, cursos electivos y una tesis.

**Condiciones de Admisión:** Poseer grado académico de licenciado en Ingeniería, o equivalente.

**Para mayor información:** Julie Lagos, Secretaría Docente MGO. Departamento de Ingeniería Industrial, República 701, Santiago.

Teléfono: 6784017, e-mail [mgo@dii.uchile.cl](mailto:mgo@dii.uchile.cl), Web: [www.dii.uchile.cl/mgo](http://www.dii.uchile.cl/mgo)

# MAGCEA

MAGÍSTER en ECONOMÍA APLICADA

## REQUISITOS DE ADMISION

Título profesional, nacional o extranjero, que exija al menos 5 años de estudios o el grado de Licenciado en campos disciplinarios afines a la especialidad.

## CALENDARIO ACADEMICO

Periodos de postulaciones:

- Semestre de Otoño (Octubre a Noviembre)
- Semestre Primavera (Abril a Mayo)

Modalidad: jornada parcial y completa

El **Magíster en Economía Aplicada (Magcea)** busca formar profesionales de gran competencia analítica y una sólida base en Economía, con el objeto de satisfacer las necesidades y desafíos que plantean las economías abiertas. Los graduados quedan preparados tanto para el trabajo académico, la investigación, el desempeño en organismos estatales o privados en el ámbito nacional e internacional, como también para continuar estudios de nivel Doctorado.

## MAYOR INFORMACION PUEDE SOLICITARSE A:

e-mail : [magcea@dii.uchile.cl](mailto:magcea@dii.uchile.cl)  
fonos : (562) 678 40 73/ (562)678 40 84  
fax : (562) 689 29 05.  
Sitio en Internet: [www.dii.uchile.cl/~magcea/](http://www.dii.uchile.cl/~magcea/)



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FISICAS Y MATEMATICAS  
DEPARTAMENTO DE  
INGENIERIA INDUSTRIAL

Magíster en Gestión y Políticas Públicas

# Magíster en Gestión y Políticas Públicas

*Excelencia  
académica*

*Multidisciplinario*

*Amplio  
reconocimiento  
en Chile y  
América Latina*

FECHA DE INICIO  
Junio de 2006

DURACION  
Un año y medio

POSTULACIONES  
Hasta el 15 de noviembre de 2005 para las personas que postulan a becas de instituciones  
Hasta el 15 de abril de 2006 para las personas que cuentan con fondos propios

ANTECEDENTES Y POSTULACIONES  
Comité de Admisiones  
Av. República 701 - Santiago, Chile  
Teléfono (562) 978 4067 - Fax (562) 689 4987  
E-mail: [mgpp@dii.uchile.cl](mailto:mgpp@dii.uchile.cl)

[www.mgpp.cl](http://www.mgpp.cl)



Desde 1996 entre los 10 mejores programas de América Latina (revista América Economía).

## Universidad de Chile

### MAGISTER EN GESTION Y DIRECCION DE EMPRESAS

Doble grado con ESADE (España) e intercambios internacionales. Cuerpo académico de excelencia.



LA MEJOR INVERSIÓN PARA  
IMPULSAR TU CARRERA

#### MODALIDADES:

Tiempo completo y medio tiempo

#### POSTULACIONES 2006:

Hasta el 25 de Noviembre de 2005  
(primer cierre)

Inicio de clases: Marzo de 2006



Teléfono: (56 2) 689 8150 · e-mail: [mba@dii.uchile.cl](mailto:mba@dii.uchile.cl)  
[www.mbauchile.cl](http://www.mbauchile.cl)

Auspician:



EL MERCURIO



Lidera, sé el impulsor  
de la tecnología de tu empresa



MBE

## Magister Ingeniería de Negocios con TI

TECNOLOGÍA AL SERVICIO DE LA GESTIÓN

El objetivo del Programa de Magister en Ingeniería de Negocios con Tecnologías de Información es formar un profesional especialista capaz de sacarle pleno partido a las Tecnologías de Información -particularmente Internet- en las empresas e instituciones y que pueda integrar gestión y tecnología en el diseño de los negocios, teniendo, además, las habilidades necesarias para iniciar y facilitar la innovación en ellos.

PLAZO DE POSTULACION  
OTOÑO 2006: 15 de Diciembre

SOLICITAR FORMULARIOS DE POSTULACIÓN  
A LA SECRETARÍA DEL PROGRAMA,  
FONO 978 4835 - 978 49 35,  
O EMAIL: [anamaria@dii.uchile.cl](mailto:anamaria@dii.uchile.cl)

Información en [www.mbe-uchile.cl](http://www.mbe-uchile.cl)



## Doctorado en Economía de la Universidad de Chile



El Centro de Economía Aplicada del DII en conjunto con el Departamento de Economía de la Universidad de Chile imparten el Doctorado en Economía.

El objetivo de este Doctorado es fortalecer la disciplina económica en la región, formar economistas teóricamente sólidos y con un profundo conocimiento de las economías latinoamericanas y efectuar estudios empíricos de las realidades latinoamericanas existentes. Este Doctorado de Economía forma parte de un network de las tres mejores Universidades Latinoamericanas en Economía: El Instituto Tecnológico Autónomo de México ITAM, Universidad Torcuato Di Tella (Argentina) y Universidad de Chile

Mayor Información:  
e-mail: econdoct@dii.uchile.cl  
fonos: (562)678 4073 / (562)678 4084  
fax: (562)689 2905

Requisitos de Admisión  
- Título Universitario  
- Cartas de Recomendación  
- Examen de Admisión  
- Admisión especial a través del Magister en Economía impartido por la Universidad de Chile



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
INGENIERÍA INDUSTRIAL

Calendario Académico  
Postulaciones: durante los meses de noviembre y mayo de cada año  
Examen de admisión: enero y julio