Implementación de una heurística para la programación automática de horarios de una escuela secundaria

Guillermo A. Durán [*] [**]
Nazareno Faillace [**]

Resumen

Desde 2009 en Argentina se está llevando a cabo el proyecto Nueva Escuela Secundaria (NES) con el objetivo de reestructurar el nivel medio de la educación pública modificando los planes de estudio. Esto supone, entre otros, el desafío de elaborar horarios escolares que incluyan nuevas asignaturas, docentes y proyectos así como también un uso eficiente de los recursos edilicios de la escuela. A diferencia de la universidad, en la escuela secundaria los alumnos son agrupados según el año que estén cursando y no tienen libertad de elegir a qué asignaturas asistir durante el ciclo lectivo, dado que están preestablecidas por la currícula. El problema consiste en designar una asignatura a cada hora cátedra de cada curso, de manera tal que se cumplan los requerimientos del sistema educativo y de la disponibilidad docente. En la actualidad, los horarios escolares en las escuelas secundarias son elaborados manualmente, dando lugar a un amplio margen de mejora. Para desarrollar una herramienta que permita automatizar este procedimiento garantizando la elaboración de horarios de buena calidad, hemos implementado una heurística que divide el problema en etapas que combinan Programación Lineal Entera (PLE) y un algoritmo de búsqueda local (*stochastic hill-climbing*). El objetivo es aumentar el cumplimiento de características deseables del horario, como la compactación de horas de una misma asignatura o la reducción de horas inactivas de los docentes, respetando las condiciones que garantizan la factibilidad.

[*] Departamento. de Matemática, FCEyN-UBA , Argentina, Departamento de Ingeniería Industrial, FCFM, Universidad de Chile, Santiago, Chile.
[**] Instituto de Cálculo FCEyN-UBA y CONICET, Argentina

Al aplicar la herramienta desarrollada a los horarios de una escuela secundaria pública de la Ciudad de Buenos Aires, según un sistema de penalizaciones elaborado para medir cualitativamente un horario, el resultado de la automatización mostró una mejora del 55,82 % y del 73,28 % con respecto a los horarios confeccionados manualmente en 2017 y 2018, respectivamente. El incremento de la calidad se vio reflejado, entre otros, en una mejor distribución de los recursos edilicios, en una disposición temporal equilibrada de las asignaturas y en horarios de trabajo más favorables para los docentes.

Palabras Clave: Programación lineal entera, Horarios escolares, Scheduling Problems

1. Introducción

El problema de la planificación de horarios de universidades y escuelas ha sido estudiado en detalle y la cantidad de trabajos publicados sobre ese tema ha ido aumentado a lo largo de los años (véase, por ejemplo, [2, 5, 4, 6, 8, 9]). La importancia de la programación de un buen horario radica en el impacto que tiene sobre la organización laboral de los docentes y el uso eficiente de recursos pedagógicos para la enseñanza que reciben los estudiantes, como, por ejemplo, salas de informática, laboratorios de ciencias o clases de apoyo escolar.

En particular, en este trabajo estudiamos una subclase de este tipo de problemas: la elaboración de horarios para escuelas secundarias (conocido en la literatura como *High School Scheduling Problem*, HSSP). La naturaleza del HSSP puede ser resumida de la siguiente manera: las clases de distintos conjuntos de alumnos deben ser programadas durante el horario laboral de los docentes teniendo en cuenta su disponibilidad y su especialización. El HSSP puede ser considerado como un problema menos restrictivo que el de programación de horarios de una universidad, puesto que en el caso de las escuelas secundarias, por ejemplo, no es necesario minimizar la superposición de clases que involucran a los mismos estudiantes.

En la confección del horario escolar se tienen en cuenta dos tipos de restricciones. Por un lado, las restricciones duras son aquellas que un horario debe cumplir para considerarse factible y poder ser aplicado. Entre ellas se encuentran las relacionadas a la disponibilidad horaria de los docentes, a la cantidad de horas cátedra semanales de las asignaturas y que los alumnos no tengan horas cátedra libres. Por otro lado, las restricciones blandas son aquellas relacionadas a peticiones de alumnos, docentes y directivos, que deben ser satisfechas tanto como sea posible pero que no interfieren con la factibilidad del horario. Por ejemplo, es deseable que no hayan tres horas cátedra consecutivas de la misma asignatura o que los docentes no tengan horas cátedra inactivas en sus días laborales. En general, debido a la complejidad del mundo real, es muy difícil encontrar una solución que no viole ninguna de las restricciones blandas. Por esta razón, se utiliza una función de penalidad para evaluar cuán buena es una solución. Diremos que un horario factible es de *buena calidad* si minimiza, en la medida de lo posible, la violación de las restricciones blandas.

Dado que los condicionamientos propios de la vida real hacen que el problema pertenezca a la clase $\mathcal{NP}$-completo [11], a lo largo del tiempo se ha encarado desde numerosos enfoques. Se han utilizado técnicas basadas en *constraint programming* [3, 6, 8] y meta-heurísticas como búsqueda tabú [7], recocido simulado [1] y algoritmos evolutivos [4, 9], entre otros. Por otra parte, las aplicaciones prácticas de soluciones al HSSP están íntimamente relacionadas al sistema educativo (y por ende al país) donde se llevan a cabo. Actualmente, en la gran mayoría de las escuelas secundarias argentinas, los horarios son armados manualmente. Los directivos o docentes encargados de tal tarea concuerdan casi unánimemente que es compleja, tediosa, consume gran cantidad de tiempo y en ciertos casos no es transparente, por lo que ven con entusiasmo el desarrollo de una herramienta matemático-computacional que permita automatizarla. Por esta razón, decidimos diseñar una heurística que emplea modelos de Programación Lineal Entera (PLE), un algoritmo de búsqueda local y la búsqueda en entornos variados, de manera tal que pueda emplearse para elaborar horarios escolares en el marco del sistema educativo argentino y que sea fácilmente adaptable a países con sistemas educativos similares.

Como se verá en la siguiente sección, el horario escolar del sistema educativo argentino se puede dividir en dos partes: horario de clases y horario extraclase. Debido a que su conjunto de restricciones y complejidad difieren notablemente, optamos por dividir la resolución del problema en dos etapas, una para cada horario. De esta manera, el armado del horario escolar se lleva a cabo de manera incremental: horarios de clase factibles son obtenidos a partir de un modelo de PLE, luego son mejorados a través de un algoritmo de búsqueda local y finalmente se elige al mejor de ellos para completarlo con la asignación de las horas extraclase mediante dos modelos de PLE.

El artículo se estructura de la siguiente manera. En la sección 2 se describe el problema que tratamos, dando algunos detalles del sistema educativo. En la sección 3 se describe el procedimiento de la heurística y las etapas en las que se divide el problema. En la sección 4 se comparan los resultados obtenidos con los horarios elaborados manualmente para el 2017 y 2018. Finalmente, en la sección 5 se exponen las conclusiones y el trabajo a futuro.

2. Descripción del problema

Las escuelas secundarias públicas de la Ciudad de Buenos Aires generalmente cuentan con dos turnos: mañana y tarde. El plan de estudios se divide en cinco años y en cada uno de esos años los estudiantes son distribuidos en dos o tres divisiones, con el fin de reducir la cantidad de estudiantes por aula. De aquí en adelante denominaremos *curso* a cada uno de esos conjuntos de alumnos. Por ejemplo, si se tienen dos divisiones por año, se tendrá un total de diez cursos. Cada curso tiene asignada un aula y en cada hora cátedra de la jornada escolar tiene designada una materia. En el sistema educativo argentino los estudiantes no pueden elegir a qué asignaturas asistir, por lo que permanecen en la misma aula todo el día y los profesores son los que rotan. Las aulas son destinadas a los mismos cursos año a año, por lo tanto su distribución no es parte del problema.

Generalmente cada curso tiene un total de 35 horas cátedra de clase dispuestas de Lunes a Viernes. Están distribuidas homogéneamente para el turno mañana, y, para el turno tarde, con un mínimo de 6 y un máximo de 8 horas cátedra diarias. Cada hora cátedra tiene una duración de 40 minutos. Diremos que un curso del turno tarde tiene prehora un determinado día si ingresa durante el horario correspondiente a la séptima hora del turno mañana. Es decir, la séptima hora del turno mañana se superpone con la prehora del turno tarde. Por esta razón, al momento de asignar qué curso tiene prehora un determinado día, no sólo es importante tener en cuenta la cantidad de aulas libres con las que cuenta la escuela, sino también con la disponibilidad de los docentes que enseñan en ambos turnos. Por otro lado, los estudiantes no pueden tener horas cátedra inactivas entre dos horas de clase. En general, las clases del turno mañana se desarrollan de $7:40$ a $12:40$ hs. y las clases del turno tarde de $12:20$ a 18 hs., pues algunos cursos tienen prehora. Cada turno cuenta con dos recesos de 10 minutos.

En ciertas ocasiones, puede ocurrir que los estudiantes de un curso puedan elegir qué asignatura cursar en una determinada franja horaria (por ejemplo, Inglés o Francés). Incluso puede suceder que los alumnos que elijan una asignatura sean agrupados con alumnos de otro curso que hayan elegido la misma durante dichas franjas horarias. Por ejemplo, si los dos cursos de segundo año pueden elegir entre Francés e Inglés, se agruparán a aquellos alumnos que hayan elegido el mismo idioma independientemente de su división. De aquí en adelante nos referiremos a esta situación como una simultaneidad, dado que se debe dictar esa asignatura al mismo tiempo en los cursos implicados. En nuestro modelo, para cada simultaneidad consideramos que las asignaturas a elegir son una sola (en el ejemplo, Inglés-Francés) que debe ser programada en las mismas horas cátedra para los cursos correspondientes.

Por otro lado, existe una serie de preferencias en lo referido a la distribución horaria de las materias, que serán incluidas al modelo como restricciones blandas y cuya violación será sancionada por la función de penalidad en la fase de búsqueda local. En general, es deseable que las asignaturas no ocupen más de tres horas cátedra diarias. Más aún, se espera que su carga horaria semanal sea distribuida en bloques de dos horas adyacentes. Por ejemplo, si Matemática en primer año tiene una carga horaria semanal de 5 horas cátedra, la distribución ideal consiste en dos bloques en dos días y una hora cátedra en otro día. Además, es preferible que no hayan bloques de tres horas cátedra consecutivas (que llamaremos *triples*) de la misma asignatura. Vale la pena mencionar que no pueden haber más de tres horas cátedra de una asignatura un mismo día, lo cual será tenido en cuenta al momento de elaborar horarios de clase factibles.

Con respecto a los docentes, se debe tener en cuenta que no todos tienen disponibilidad completa, pues tienen cargos en distintas instituciones. Por esta razón, antes de que comience el armado de horarios del siguiente ciclo lectivo, cada docente debe presentar a las autoridades del colegio una declaración jurada con su disponibilidad horaria. Además, existe la restricción de que un docente no puede estar enseñando en dos cursos al mismo tiempo así como también los cursos no pueden estar transitando dos asignaturas a la vez (siendo las simultaneidades excepciones de ambas restricciones).

Otro factor a tener en cuenta es la situación actual de cambio en las escuelas secundarias en Argentina y, en particular, en la Ciudad de Buenos Aires llevado a cabo por el proyecto Nueva Escuela Secundaria (NES). Una de las modificaciones que implica el proyecto es dividir los cinco años de la secundaria en dos ciclos: un ciclo de formación general común a las escuelas de todas las orientaciones (1^{ero} y 2^{do} año) y un ciclo de formación orientada (3^{ero} a 5^{to} año). Al mismo tiempo, la propuesta aspira a implementar nuevos métodos como, por ejemplo, las parejas pedagógicas, que consiste en que dos profesores den clase de manera conjunta, articulando los conocimientos de ambas asignaturas. Naturalmente, la puesta en marcha de todos estos cambios presentan nuevos desafíos en la confección de los horarios de las escuelas secundarias, como conjugar la disponibilidad simultánea de distintos docentes, distribuir la carga semanal de una nueva asignatura de manera tal que sea atractiva para los docentes que quieran tomar el cargo y el uso de recursos esenciales para ciertas orientaciones (por ejemplo, Informática).

Por último, cada turno tiene actividades en contraturno, sean clases de Educación Física, apoyo escolar o proyectos extracurriculares. Las dos últimas pertenecen a lo denominado éxtraclase'y la asistencia a ellas es opcional y no existen divisiones de cursos. En lo que respecta a Educación Física, su horario es confeccionado por sus profesores, y se adapta al horario de clases; razón por la cual no contemplamos su elaboración.

De esta forma, el horario escolar se divide en dos partes. Por un lado, el horario de clases, compuesto por las horas cátedra a los que los alumnos, divididos en cursos, deben asistir obligatoriamente. Por el otro, el horario extraclase, conformado por las clases de apoyo y los proyectos, en los cuales no existe distinción por curso y cuya asistencia es opcional. Debido a que la elaboración del horario extraclase resulta un problema de tamaño mucho menor (menos materias y docentes, no hay división por cursos) y que tiene menor jerarquía que el horario de clases, decidimos seguir la metodología que actualmente llevan a cabo las autoridades escolares. Esto consiste en confeccionar primero el horario de clases y luego adaptar el de extraclase, de manera tal que la cursada obligatoria pueda estructurarse sin tener en cuenta las actividades opcionales.

3. Resolución del problema

Diseñamos la heurística teniendo en cuenta la prioridad de cada una de las partes que conforman al horario escolar. En primer lugar, el horario de clases es el que tiene mayor jerarquía. Por esta razón, el objetivo de la Etapa I es encontrar un horario de clases factible que viole tan pocas restricciones blandas como sea posible. Para lograrlo, utilizamos un modelo de PLE para generar horarios de clase factibles. A continuación, empleamos cada uno de ellos como punto de partida para el algoritmo de búsqueda local, con el fin de hallar horarios de clase de mejor calidad. El objetivo del algoritmo de búsqueda local es explorar el espacio de soluciones candidatas hasta encontrar un óptimo o hasta alcanzar un límite de tiempo, utilizando muy poca memoria [10]. Otra ventaja es que permite hallar soluciones razonables en un espacio de búsqueda muy extenso, donde los algoritmos exactos resultan inapropiados. Para finalizar con la Etapa I, nos quedamos con el horario de clases que presente el menor valor de la función de penalidad.

Posteriormente, para completar el horario escolar, llevamos a cabo la Etapa II: confeccionar el horario extraclase adaptándolo al resultado obtenido de la Etapa I. Dado que las clases de apoyo repercuten en el desempeño de los estudiantes y los proyectos son actividades complementarias a la enseñanza, las primeras tienen mayor prioridad y presentan más restricciones. Por lo tanto, en un primer momento se asignan las clases de apoyo mediante un modelo de PLE. Por último, se asignan las horas de proyecto con otro modelo de PLE para concluir con la elaboración del horario escolar.

Al dividir el problema en etapas, no existe garantía de que la solución obtenida sea la óptima. Sin embargo, dado que se trata de un problema $\mathcal{NP}$-completo, nuestro objetivo es hallar una buena solución en un término de tiempo aceptable. Los modelos de PLE han sido implementados con la API de CPLEX 12.8.1 para Python en una computadora con procesador Intel Core i5 7400 a 3.5 GHZ y con 8-GB RAM.

3.1. Modelo de PLE para creación de horarios iniciales

El objetivo de este modelo es generar horarios de clase que cumplan con la mayoría de las restricciones que aseguran su factibilidad. La experiencia proporcionada por la investigación en el campo del HSSP indica que, en general, lo más eficiente es tener la menor cantidad de restricciones duras posible, debido a que obstaculizan a los algoritmos de optimización local. Al partir desde un horario factible, el vecindario de soluciones válidas es más amplio con menos restricciones duras [12]. Esto significa que dentro del modelo habrán restricciones blandas cuya violación no permitirá que un horario sea aplicable en la práctica. Este tipo particular de restricciones reciben el nombre de *restricciones duras suavizadas*. Por ende, el modelo de PLE no contempla este tipo de restricciones y, posteriormente, en la definición de la función de penalidad les otorgamos un valor de penalidad por ser violadas muy superior al del resto de las restricciones blandas.

En nuestro caso, el conjunto de restricciones duras suavizadas son las relacionadas a la disponibilidad de los docentes. En primer lugar, observamos que suavizar dichas restricciones permite que el algoritmo de búsqueda local tenga más libertad al momento de recorrer el vecindario de una determinada solución. Además, permite que el modelo de PLE sea resuelto en menor cantidad de tiempo. Sin embargo, consideraremos como restricción dura la disponibilidad de los docentes en el caso de las simultaneidades. Por lo tanto, los horarios obtenidos con el modelo ubican a las asignaturas con simultaneidades en horarios en los que los docentes que deben dictarlas están disponibles. Además el modelo maximizará la cantidad de bloques de dos horas que formen dichas asignaturas.

A continuación introducimos algunos elementos de la notación utilizada en el modelo de PLE, resumida en la Tabla 1.

Tabla 1: Descripción de los conjuntos utilizados en el modelo de PLE de la Etapa I y sus características en el caso de estudio

Notación	Descripción	Característica en el caso de estudio
M	Conjunto de las asignaturas	$M = \{0, \dots, 29\}$
Δ	Conjunto de días de la semana	$\Delta = \{0, \dots, 4\}$
H	Conjunto de horas cátedra	$H = \{0, \dots, 79\}$
H_{TM}	Conjunto de horas cátedra del turno mañana	$H_{TM} = \{h \in H\colon \left\lfloor \frac{h}{8} \right\rfloor \equiv 0 \pmod{2}\}$
H_{TT}	Conjunto de horas cátedra del turno tarde	$H_{TT} = \{h \in H\colon \left\lfloor \frac{h}{8} \right\rfloor \equiv 1 \pmod{2}\}$
H_d	Conjunto de horas cátedra correspondientes al día $d \in \Delta$	$H_d = \{h \in H\colon\ h \equiv d \pmod{16}\}$
P	Conjunto de profesores	$P = \{0, \dots, 49\}$
C	Conjunto de cursos	$C = \{0, \dots, 21\}$
C_{TM}	Conjunto de cursos del turno mañana	$C_{TM} = \{0, \dots, 11\}$
C_{TT}	Conjunto de cursos del turno tarde	$C_{TT} = \{12, \dots, 21\}$
$cgs_{i,c}$	Constante que representa la carga horaria semanal de horas cátedra de la asignatura i en el curso c. Si la asignatura i no se dicta en el curso c, entonces $cgs_{i,c} = 0$.	
K	Conjunto conflictivo	
CK_{TM}	Conjunto de conjuntos conflictivos del turno mañana	$\lvert CK_{TM}\rvert = 40$
CK_{TT}	Conjunto de conjuntos conflictivos del turno tarde	$\lvert CK_{TT}\rvert = 42$
CK_{PH}	Conjunto de conflictos por prehora	$\lvert CK_{PH}\rvert = 379$
S	Conjunto de simultaneidades	$\lvert S\rvert = 4$

En primer lugar, se considera $H = \{0, \dots, 79\}$ al conjunto de horas cátedra. Consideramos que hay 16 horas cátedra diarias (8 para cada turno). Así, por ejemplo, la hora 0 representa la prehora del Lunes para el turno mañana y la hora 79 representa la última hora cátedra del Viernes para el turno tarde. También se define C el conjunto de cursos de la escuela. En el caso de estudio, $C = \{0, \cdots, 21\}$.

Llamamos M al conjunto de asignaturas que se dictan en la escuela. En el caso de estudio, $M = \{0, \cdots, 29\}$. Como se debe tener en cuenta que un docente no puede estar en dos cursos al mismo tiempo (excepto en el caso de las simultaneidades), se denominará como *conjunto conflictivo* a un conjunto de tuplas de asignaturas y cursos que comparten docentes. Por ejemplo, si la asignatura $m_1 \in M$ es dictada en el curso 3 por el mismo docente que dicta la asignatura $m_{12} \in M$ en el curso 8, luego el conjunto conflictivo que representa esta situación es $\{(m_1, 3), (m_{12}, 8)\}$. Por esta razón, para cierta hora cátedra h y conjunto conflictivo K, no puede ocurrir que más de una tupla $(asignatura, curso) \in K$ sea asignada a h; de lo contrario, un docente estaría siendo asignado a dos cursos al mismo tiempo. Las simultaneidades son consideradas excepciones y, por lo tanto, se incluye en el conjunto conflictivo una sola tupla que representa a los cursos que forman parte de la simultaneidad. Notamos como CK_{TM} al conjunto de conjuntos de conflictos del turno mañana y CK_{TT} al del turno tarde.

Por otro lado, como hay docentes que enseñan durante los dos turnos, se debe evitar que estén dando clases simultáneamente durante la séptima hora del turno mañana y la prehora del turno tarde, pues ambas ocurren durante el mismo periodo de tiempo. Por esta razón, se construye un conjunto de tuplas que agrupa asignaturas que son dictadas por un docente que enseña en ambos turnos siguiendo la siguiente idea: sea CK_{PH} el conjunto en cuestión, supongamos que un mismo docente dicta la asignatura m_4 en el curso 0 (que corresponde al turno mañana) y a los cursos 12 y 13 (que corresponden al turno tarde); entonces, se agregará a CK_{PH} las tuplas $(m_4, 0, m_4, 12)$ y $(m_4, 0, m_4, 13)$. De esta manera, se podrá indicar con el modelo que si la asignatura m_4 en el curso 0 es asignada en una séptima hora, entonces en la prehora de ese día no puede asignarse m_4 en los cursos 12 ni 13, o viceversa. Notamos al conjunto de estas tuplas como CK_{PH} y se denominará *conjunto de conflictos por prehora.*

Con respecto a las simultaneidades, se notará cada una como s. La simultaneidad está representada por una tupla cuya primera componente es la asignatura a dictar y la segunda es el conjunto de cursos donde debe ser dictada simultáneamente. Por ejemplo, si la asignatura $m \in M$ debe ser dictada simultáneamente en los cursos 6 y 7, entonces $s = (m, \{6, 7\})$ representa este requerimiento. Se nota como S al conjunto de simultaneidades.

Las variables de decisión son las siguientes, con $i \in M$, $h \in H$, $c \in C$:

$$x_{ihc} = \begin{cases} 1 & \text{si la asignatura } i \text{ se dicta en la hora } h \text{ en el curso } c \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$u_{ihc} = \begin{cases} 1 & \text{si la asignatura } i \text{ tiene un bloque en el curso } c \text{ que comienza en la hora } h \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A continuación, presentamos los conjuntos de restricciones del modelo:

R1: Un curso no puede tener asignadas materias en horas cátedra que no corresponden a su turno:

$$\sum_{i \in M} \sum_{h \in H_{TT}} x_{ihc} = 0 \quad \forall c \in C_{TM} \tag{1}$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{h \in H_{TM}} x_{ihc} = 0 \quad \forall c \in C_{TT} \tag{2}$$

R2: Cantidad de horas cátedra máximas y mínimas por día. En el caso de estudio, la cantidad máxima y mínima para el turno mañana es 7 y para el turno tarde 6 y 8 respectivamente:

$$\sum_{i\in M}\sum_{h\in H_d} x_{ihc} \leq 7 \quad \forall c \in C_{TM}, \forall d \in \Delta \tag{3}$$

$$\sum_{i\in M}\sum_{h\in H_d} x_{ihc} \geq 7 \quad \forall c \in C_{TM}, \forall d \in \Delta \tag{4}$$

$$\sum_{i\in M}\sum_{h\in H_d} x_{ihc} \leq 8 \quad \forall c \in C_{TT}, \forall d \in \Delta \tag{5}$$

$$\sum_{i\in M}\sum_{h\in H_d} x_{ihc} \geq 6 \quad \forall c \in C_{TT}, \forall d \in \Delta \tag{6}$$

R4: A lo sumo una asignatura por hora cátedra

$$\sum_{i\in M} x_{ihc} \leq 1 \quad \forall c \in C, \forall k \in H \tag{7}$$

R5: Se debe satisfacer la carga horaria semanal de la asignatura

$$\sum_{h\in H} x_{ihc} = cgs_{i,c} \quad \forall c \in C, \forall i \in M \tag{8}$$

R6: si no hay prehora, no se deben dictar asignaturas en la prehora. En el caso de estudio, el turno mañana no tiene prehoras

$$\sum_{h\in\{0,16,32,48,64\}} x_{ihc} = 0 \quad \forall i \in M, \forall c \in C \tag{9}$$

R7: los alumnos no pueden tener horas libres. Para esto, se pide que se asigne una asignatura a todas las horas entre la primera y la sexta, inclusive. De esa manera, las únicas horas en las que puede no asignarse una asignatura son la prehora y la séptima

$$\sum_{i\in M} x_{ihc} = 1 \quad \forall c \in C_{TM}, \forall h \in \{h \in H_{TM} \colon h \not\equiv 0 \pmod{8} \wedge h \not\equiv 7 \pmod{8}\} \tag{10}$$

$$\sum_{i\in M} x_{ihc} = 1 \quad \forall c \in C_{TT}, \forall h \in \{h \in H_{TT} \colon h \not\equiv 0 \pmod{8} \wedge h \not\equiv 7 \pmod{8}\} \tag{11}$$

R8: un docente no puede estar en distintos cursos al mismo tiempo. Para esto utilizaremos los conjuntos de conjuntos de conflictos de ambos turnos y los conflictos por prehora

$$\sum_{(i,c)\in K} x_{ihc} \leq 1 \quad \forall h \in H, \forall K \in CK_{TM} \tag{12}$$

$$\sum_{(i,c)\in K} x_{ihc} \leq 1 \quad \forall h \in H, \forall K \in CK_{TT} \tag{13}$$

$$x_{k_1,h,k_2} + x_{k_3,h+1,k_4} \leq 1 \quad \forall h \in \{h \in H_{TM}\colon\ h \equiv 7 \pmod 8\},\ \forall k = (k_1,k_2,k_3,k_4) \in CK_{PH} \tag{14}$$

R9: se fija la simultaneidad del dictado de asignaturas cuando es requerido. Además, se pide que las horas de cada una de las simultaneidades sean ubicadas teniendo en cuenta la disponibilidad de todos los docentes implicados en ella. De define H_s el conjunto de horas cátedra donde están disponibles todos los docentes implicados en la simultaneidad s:

$$x_{s_1,h,s_{2_k}} = x_{s_1,h,s_{2_j}} \quad \forall h \in H, \forall s_{2_k},\ s_{2_j} \in s_2,\ s_{2_k} \neq s_{2_j}, \forall s \in S \tag{15}$$

$$\sum_{h\in H_s} x_{s_1,h,s_{2_j}} = cgs_{(s_1,s_{2_j})} \quad \forall s_{2_j} \in s_2 \forall s \in S \tag{16}$$

R10: se determina la formación de bloques para las simultaneidades. Dada $s = (s_1, s_2)$ una simultaneidad, se tomará como representante del conjunto de cursos de s a $s_r = \text{mín}\, s_2$. Definimos el conjunto $B_s = \{h \in H_s\colon h + 1 \in H_s\}$ el conjunto de horas que pueden encabezar bloques. Se define como β_s la cantidad de bloques que puede formar s_1. Así, (17) establece que, si h no puede encabezar un bloque, u_{ihc} debe valer cero; (18) obliga que se formen todos los bloques posibles; (19) determina que si un bloque empieza en h, otro no puede empezar en $h + 1$ (es decir, los triples se cuentan como un solo bloque) y, finalmente, (20) relaciona a las variables u con las variables x.

$$u_{s_1,h,s_r} = 0 \quad \forall h \in H \setminus B_s, \forall s \in S \tag{17}$$

$$\sum_{h\in B_s} u_{s_1,h,s_r} = \beta_s \quad \forall s \in S \tag{18}$$

$$u_{s_1,h,s_r} + u_{s_1,h+1,s_r} \leq 1 \quad \forall h \in B_s, \forall s \in S \tag{19}$$

$$x_{s_1,h,s_r} + x_{s_1,h+1,s_r} \geq 2 - (1 - u_{s_1,k,s_r}) \cdot 30 \quad \forall h \in B_s, \forall s \in S \tag{20}$$

La función objetivo a minimizar es:

$$\sum_{i\in M}\sum_{c\in C}\sum_{h\in H} x_{ihc}$$

Se eligió esta función objetivo dado que el conjunto de restricciones $R5$ hacen que tenga el mismo valor para toda solución factible. Recordar que el objetivo del modelo es hallar horarios de clase que cumplan con las restricciones duras ($R1$ a $R10$). Por lo tanto, cualquier solución factible debe ser óptima.

Para el caso de estudio, el *solver* resolvió el modelo en 0,22 segundos y en 0,35 segundos encontró otras 25 soluciones factibles, sumando así un total de 26 horarios de clases iniciales. En la siguiente subsección se describe qué algoritmo de búsqueda local se aplicará a cada uno de ellos con el objetivo de transformarlos en horarios de clase factibles y minimizar, en la medida de lo posible, la violación de las restricciones blandas.

3.2. Aplicación del Algoritmo de Búsqueda Local

Para poder aplicar un algoritmo de búsqueda local, es necesario especificar la representación del problema, el objetivo y la función de evaluación [13]. Estos tres elementos son esenciales para manipular las soluciones candidatas a óptimos, definir el propósito del problema y establecer una forma de comparar la calidad de dos soluciones. El horario de clases es representado como lo que se conoce en el ámbito de las escuelas secundarias con el nombre de grilla: básicamente tiene la estructura de una matriz con tantas columnas como cursos y tantas filas como horas de clase semanales. En la fila i columna j se encuentra el nombre de la asignatura que se imparte en el curso j durante la hora i. En el caso de estudio, al haber 22 cursos y un máximo de 8 horas diarias de clase, la grilla tiene una dimensión de 40×22 (la hora 1 es la prehora del Lunes mientras que la hora 40 es la última hora cátedra del Viernes).

El objetivo del algoritmo de búsqueda local será minimizar el valor de la función de penalidad Ψ. Sea $\mathcal{G}$ el espacio de grillas que cumplen con las restricciones duras (pero no necesariamente con las restricciones duras suavizadas), se define $\Psi\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ como la función de penalidad que, cuantificando la violación de las restricciones blandas y duras suavizadas, permite comparar la calidad entre distintos horarios de clases. Es decir, sean G_1 y G_2 grillas que representan distintos horarios de clases, diremos que G_1 es de mejor calidad que G_2 si $\Psi(G_1) < \Psi(G_2)$. Para definir Ψ mantuvimos una estrecha comunicación con las autoridades de la escuela, de manera tal que la función de penalidad reflejara de manera fiel la prioridad que se le asigna al cumplimiento de cada restricción blanda y a las relaciones entre ellas. Por ejemplo, es muy importante que una asignatura con una carga horaria semanal de dos horas forme un bloque, incluso si eso implica que un docente tenga una o dos horas inactivas más. Por otro lado, Ψ penaliza fuertemente la violación de las restricciones duras suavizadas, puesto que deseamos que el algoritmo de búsqueda local proporcione soluciones que las respeten y, por ende, que sean aplicables.

Como hemos mencionado anteriormente, también resulta necesario definir la noción de vecindad en nuestro problema. Dada una grilla G que representa un horario de clases, una grilla G' es vecina de G si y sólo si G' respeta las restricciones duras y se obtiene realizando un solo intercambio en G de las asignaturas de dos horas de clase de un mismo curso. Dichas asignaturas deben ser distintas. En la Figura 1 se muestra un ejemplo.

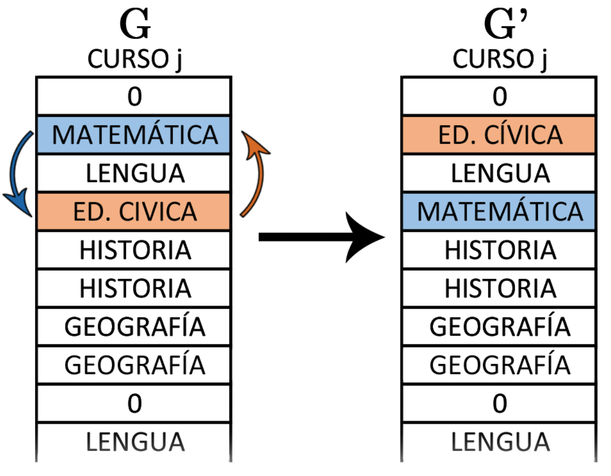

Figura 1: Ejemplo de generación de un vecino a partir del intercambio de horas entre dos materias en un curso.

El algoritmo de búsqueda local que empleamos está basado en el procedimiento de *hill-climbing*. El mismo parte de un estado inicial s y recorre su vecindario hasta hallar un vecino s' con menor valor de la función objetivo; en ese caso, el estado actual pasa a ser s' y se repite el procedimiento hasta no hallar vecinos con menor valor en la función objetivo o hasta alcanzar un límite de iteraciones o tiempo. La sencillez de este método es la causa de varias desventajas, como que el resultado final está fuertemente ligado al estado inicial o que es propenso a estancarse rápidamente en óptimos locales. En consecuencia, a lo largo de los años se han añadido modificaciones al *hill-climbing*, con el objetivo de sortear algunas de sus dificultades.

Como hemos anticipado en la sección anterior, uno de los cambios introducidos es el número de estados iniciales: con la primera parte de la Etapa I se generaron horarios de clase que respetan las restricciones duras a los que se les aplicarán el algoritmo de búsqueda local. De esta manera, esperamos recorrer más ampliamente el espacio de búsqueda.

Otra modificación que introducimos al método de *hill-climbing* es la componente probabilística que lo convierte en el método conocido en la literatura como *hill-climbing* estocástico [13]. En *hill-climbing*, el criterio para pasar de una grilla a una vecina es que la penalidad decrezca. Sin embargo, resulta interesante experimentar qué sucede si, con cierta probabilidad, se permitiesen movimientos que empeoren la penalidad. La probabilidad de elegir al nuevo vecino v_n para ser el nuevo estado actual tiene una distribución Bernoulli con parámetro p, donde p depende de la diferencia de penalidad entre el estado actual v_c y el vecino en cuestión v_n y viene dado de la siguiente manera [13]:

$$p(v_c, v_n) = \frac{1}{1 + \exp\left(\dfrac{\Psi(v_n) - \Psi(v_c)}{T}\right)}$$

Notar la inclusión del parámetro T, que permanece constante a lo largo de la ejecución del algoritmo. Mientras más grande sea el valor de T, menor será la importancia de la mejora relativa entre los puntos v_n y v_c. En particular, si $T \to \infty$, la probabilidad de aceptación se aproxima a 0,5, transformando al *hill-climbing* estocástico en un paseo al azar. Por otro lado, si $T \to 0$, el *hill-climbing* estocástico pasa a comportarse como el *hill-climbing* ordinario. Por tanto, hay que encontrar T que no sea demasiado grande ni demasiado pequeño.

Para hallarlo, consideramos la escala que manejan las penalidades totales, que se encuentran en el orden de 10^4, y estudiamos la función que define a p. Se debe tener en cuenta cuánto se le permitirá empeorar el valor de la función de penalidad a un vecino. Por ejemplo, si se considerara T tal que hay probabilidades no nulas de elegir un vecino que empeore la penalidad por un valor lo suficientemente grande, podría ocurrir que, en este vecino, se asigne una hora cátedra a un docente en la que no está disponible. Teniendo en cuenta este factor y con un poco de experimentación, concluimos que el intervalo $[50, 100]$ proporciona valores apropiados para T. Más precisamente, elegimos $T = 50$ pues demostró descender más rápido y al mismo tiempo aceptar vecinos peores (en promedio, el 33 % empeora la penalidad). Notar la probabilidad de elegir un vecino con la misma penalidad que la actual es de 0,5, sin importar T.

Por otra parte, consideramos importante introducir una leve modificación en el recorrido del vecindario que permite ir mejorando gradualmente el horario de clases de cada curso. La iteración comienza recorriendo el vecindario de la grilla actual efectuando intercambios en el horario del Curso 1. Si alguno de los vecinos es elegido, se efectúa el intercambio de horas en el horario del Curso 1. Si ningún vecino es elegido, no se realizan cambios. Independientemente de si se ha ejecutado o no una variación, se repite el procedimiento en el Curso 2. De esta manera, la iteración concluye al recorrer el vecindario del último curso (en el caso de estudio, el Curso 22). En el Algoritmo 1 se muestra el pseudocódigo de hill-climbing estocástico aplicado a cada grilla obtenida con el modelo de PLE de la sección anterior.

Para cada uno de los horarios de clases iniciales, ejecutamos el método de *hill-climbing* estocástico con 1000 iteraciones. En la Tabla 2 se muestran los datos sobre los tiempos de ejecución para el caso de estudio, con el hardware mencionado anteriormente.

Tabla 2: Tiempos de ejecución de *hill-climbing* estocástico para el caso de estudio

	Tiempo (h:mm:ss)
Promedio	0: 30: 46
Desvío estándar	0: 03: 48
Máximo	0: 40: 35
Mínimo	0: 23: 03

Luego de haberles aplicado el algoritmo a las 26 grillas iniciales, 21 superaron la penalidad de la **grilla** elaborada manualmente por las autoridades de la escuela (penalidad estándar). De esas 21, 18 cumplieron con todas las restricciones duras suavizadas.

Con el desarrollo de un método que permita hallar buenos horarios de cursada en poco tiempo culmina el trabajo dedicado a resolver la Etapa I del problema. A continuación, se llevará a cabo la resolución de la Etapa II: distribuir las horas extracurriculares.

3.3. Modelo de PLE para la asignación de clases de apoyo

La notación empleada para plantear el problema de Programación Lineal Entera que permitirá asignar las clases de apoyo, se presenta en la Tabla 3.

Algoritmo 1 *Hill-climbing* estocástico aplicado a cada grilla obtenida a partir del modelo de PLE de la Sección 3.1

Entrada: G grilla, $iter\_max$ cantidad máxima de iteraciones

```
procedure HillClimbingEstocastico(G, iter_max)
    mejor_grilla ← G
    penalidad_actual ← Ψ(G)
    minima_penalidad ← Ψ(G)
    iter ← 0
    mientras iter ≤ iter_max hacer                                  ▷ loop 1
        para curso ∈ C hacer                                        ▷ loop 2
            S ← intercambios posibles de horas
            para s ∈ S hacer                                        ▷ loop 3
                J ← vecino de G intercambiando las materias de las horas en s
                si J cumple las restricciones duras entonces
                    nueva_penalidad ← Ψ(J)
                    u ← número aleatorio con distribución uniforme en [0, 1]
                    si u < p(G, J) entonces
                        penalidad_actual ← nueva_penalidad
                        G ← J
                        si nueva_penalidad < minima_penalidad entonces
                            mejor_grilla ← G
                            minima_penalidad ← nueva_penalidad
                        fin si
                        break loop 3                ▷ Pasar al próximo curso
                    fin si
                fin si
            fin para
        fin para
        iter ← iter + 1
    fin mientras
    devolver mejor_grilla
fin procedure
```

Tabla 3: Descripción de los conjuntos utilizados en el modelo de PLE para la asignación de clases de apoyo y sus características en el caso de estudio

Notación	Descripción	Característica en el caso de estudio
M	Conjunto de las asignaturas sobre las que se dan clases de apoyo	$M = \{0, \dots, 19\}$
M_{TM}	Conjunto de las asignaturas sobre las que se dan clases de apoyo para el turno mañana	$\lvert M_{TM}\rvert = 16$
M_{TT}	Conjunto de las asignaturas sobre las de que se dan clases de apoyo para el turno tarde	$\lvert M_{TT}\rvert = 14$
Δ	Conjunto de días de la semana	$\Delta = \{0, \dots, 4\}$
H	Conjunto de horas cátedra	$H = \{0, \dots, 79\}$
H_{TM}	Conjunto de horas cátedra de la mañana	$H_{TM} = \{h \in H \colon \left\lfloor \frac{h}{8} \right\rfloor \equiv 0 \pmod 2\}$
H_{TT}	Conjunto de horas cátedra de la tarde , salvo las prehoras, pues el turno mañana siempre tiene séptima	$H_{TT} = \{h \in H \colon \left\lfloor \frac{h}{8} \right\rfloor \equiv 1 \pmod 2 \wedge h \not\equiv 0 \pmod 8\}$
H_d	Conjunto de horas cátedra correspondientes al día $d \in \Delta$	$H_d = \{h \in H \colon\ h \equiv d \pmod{16}\}$
$H_d^{(TM)}$	Conjunto de horas cátedra correspondientes a la mañana del día $d \in \Delta$	$H_d \cap H_{TM}$
$H_d^{(TT)}$	Conjunto de horas cátedra correspondientes a la tarde del día $d \in \Delta$	$H_d \cap H_{TT}$
P	Conjunto de profesores que dictan clases de apoyo	$P = \{0, \dots, 26\}$
K_{TM}	Conjunto de horas que resultan inconvenientes para el turno mañana	$K_{TM} = \{h \in H_{TT} \colon h \bmod 16 \geq 12\}$
K_{TT}	Conjunto de horas que resultan inconvenientes para el turno tarde	$K_{TM} = \{h \in H_{TM} \colon h \bmod 16 \leq 4\}$
lim	Constante que representa el límite preferible de clases de apoyo en la misma hora cátedra, por cuestiones de espacio.	$lim = 3$
T	Diccionario cuya clave es una asignatura y un turno y su valor es la cantidad de horas diarias máximas de apoyo preferibles.	
D	Diccionario cuya clave es un docente y su valor son las horas en las que puede dar clases de apoyo	
F	Diccionario cuya clave es un docente y su valor es un conjunto de horas favorables para dar clases de apoyo	$F_{(p)} \subseteq D_{(p)}$
C	Diccionario con el cargo de clases de apoyo de cada docente	

Por un lado se introduce el diccionario T donde se establece un tope para la cantidad de horas de clases de apoyo diarias de una asignatura con el fin de lograr una mejor distribución semanal. Esto es relevante ya que los horarios de gimnasia ocupan a los estudiantes en distintos horarios y días, por lo que la mejor manera de maximizar su accesibilidad a las clases de apoyo es procurar que estas estén bien distribuidas. El tope se determina según la cantidad de horas de apoyo que se brindan de la asignatura en ese turno: a menor oferta, menor es el tope. En el caso de estudio se utilizaron los siguientes topes en función de la oferta $O_{(i,t)}$ de clases de apoyo de la asignatura i para el turno t:

$$T_{(i,t)}(O_{(i,t)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } O_{(i,t)} < 2 \\ 1 & \text{si } O_{(i,t)} = 2 \\ 2 & \text{si } O_{(i,t)} \in \{3,4,5\} \\ 3 & \text{si } O_{(i,t)} \in \{6,7,8\} \\ 4 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Naturalmente, al tratarse de una restricción blanda, se aplicarán penalidades a la violación de los topes, pero no determinarán la factibilidad de una solución.

Asimismo, se introducen dos diccionarios que incumben a los docentes. Por un lado, un diccionario D con las horas en las que cada docente puede dictar clases de apoyo; es decir, las horas de disponibilidad del docente menos las horas que ya tiene ocupadas con clases. Por otro lado, un diccionario F con las horas favorables para cada docente: las horas favorables son horas en las que el docente está disponible y que son horas inactivas u horas próximas a a horas activas. Por tanto, para cada docente p, $F_{(p)} \subseteq D_{(p)}$.

Por último, se introduce un diccionario C con el cargo de cada docente en cuanto a clases de apoyo. En C, la clave es un docente y el valor es un conjunto de ternas $(asignatura, turno, carga)$ que representa que ese docente debe dar *carga* horas de clase de apoyo de *asignatura* para *turno*.

Sean $p \in P$, $i \in M$, $h \in H$, $d \in \Delta$ y $t \in \{0,1\}$, se definen las variables del problema:

$$x_{pih} = \begin{cases} 1 & \text{si el profesor } p \text{ da apoyo de } i \text{ en la hora } h \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

y_{it}: cantidad de clases de apoyo de la asignatura i en horas poco convenientes para el turno t, $y_{it} \in \mathbb{Z}$

v_{itd}: cantidad de horas excesivas de clase de apoyo de la asignatura i del turno t en el dia d, para (i,t) tales que $O_{(i,t)} \geq 2, v_{itd} \in \mathbb{Z}$

u_{ip}: cantidad de horas de clase de apoyo de la asignatura i que no son conveniente para el profesor $p, u_{ip} \in \mathbb{Z}$

w_h: sobrecarga de horas de clase de apoyo en la hora $h, w_h \in \mathbb{Z}$

A continuación se presentan los conjuntos de restricciones del problema:

R1: un profesor no puede estar en dos lugares al mismo tiempo:

$$\sum_{i \in M} x_{pih} \leq 1 \quad \forall p \in P, \forall h \in H$$

R2: la séptima hora del turno mañana se superpone con la prehora del turno tarde:

$$\sum_{i \in M} x_{p,i,h} + \sum_{i \in M} x_{p,i,h+1} \leq 1 \quad \forall p \in P, \forall h \in \{h \in H \colon h \equiv 7 \pmod{16}\}$$

R3: no se pueden dictar clases de apoyo durante la séptima hora del lunes del turno tarde:

$$x_{p,i,15} = 0 \quad \forall p \in P, \forall i \in M$$

R4: debe cumplirse la cantidad de horas de apoyo semanales. Las clases de apoyo para el turno mañana deben darse durante las horas de la tarde y viceversa. Las clases de apoyo solo pueden darse en las horas en las que el profesor no esté dando clase. Recordar que los elementos de $C_{(p)}$ son de la forma $c = (c_1, c_2, c_3)$, $c_1 \in M$, $c_2 \in 0, 1$ y c_3 es la carga horaria:

$$\sum_{h \in H_{TT} \cap D_{(p)}} x_{p,c_1,h} = c_3 \quad \forall p \in P, \forall c \in \{c = (c_1, c_2, c_3) \in C_{(p)} \colon c_2 = 0\}$$

$$\sum_{h \in H_{TM} \cap D_{(p)}} x_{p,c_1,h} = c_3 \quad \forall p \in P, \forall c \in \{c = (c_1, c_2, c_3) \in C_{(p)} \colon c_2 = 1\}$$

R5: se desea ubicar las clases de apoyo en horarios convenientes para los alumnos de ambos turnos:

$$\sum_{p \in P} \sum_{h \in K_{TM}} x_{pih} \leq y_{i0} \quad \forall i \in M_{TM}$$

$$\sum_{p\in P}\sum_{h\in K_{TT}} x_{pih} \leq y_{i1} \quad \forall i \in M_{TT}$$

R6: se penaliza la concentración de clases de apoyo de una asignatura en el mismo día:

$$\sum_{p\in P}\sum_{h\in H_d^{(TT)}} x_{pih} \leq T_{(i,0)} + v_{i0d} \quad \forall d \in \Delta\, \forall i \in M,\, O_{(i,0)} > 1$$

$$\sum_{p\in P}\sum_{h\in H_d^{(TM)}} x_{pih} \leq T_{(i,1)} + v_{i1d} \quad \forall d \in \Delta\, \forall i \in M,\, O_{(i,1)} > 1$$

R7: se desea que las horas de clase de apoyo se integren bien a los horarios de los docentes, preferentemente llenando horas inactivas que hayan quedado de la confección del horario de clases:

$$\sum_{h\in H\setminus F_{(p)}} x_{pih} = u_{ip} \quad \forall i \in M\, \forall p \in P$$

R8: es preferible que no hayan demasiadas clases de apoyo dictándose al mismo tiempo:

$$\sum_{p\in P}\sum_{i\in M} x_{pih} \leq lim + w_h \quad \forall h \in H$$

La función objetivo a minimizar para el caso de estudio es la siguiente:

$$\sum_{p\in P}\sum_{i\in M}\sum_{h\in H} x_{pih} + 25\cdot \sum_{i\in M}\sum_{t\in\{0,1\}} y_{it} + 25\cdot \sum_{\substack{i\in M\\ O_{(i,t)}>1}}\sum_{t\in\{0,1\}}\sum_{d\in\Delta} v_{itd} + 20\cdot \sum_{i\in M}\sum_{p\in P} u_{ip} + 15\cdot \sum_{h\in H} w_h$$

Los coeficientes utilizados para representar a la penalidad por infringir a las restricciones blandas fueron obtenidos mediante un ajuste experimental: las autoridades de la escuela otorgaron un orden de prioridad y se ajustaron los coeficientes hasta que el resultado de la asignación les resultó satisfactorio. Este es un problema de menores dimensiones que el resuelto para generar los horarios de clases iniciales. En efecto, con el hardware mencionado al comienzo de la sección, la asignación de clases de apoyo es resuelta en 0,08 segundos. Continuamos entonces con la asignación de los proyectos.

3.4. Modelo de PLE para la asignación de proyectos extraescolares

Hay dos tipos de actividades que se consideraban proyectos: en las que participan los estudiantes y en las que no. Luego, como ocurría en el caso de las clases de apoyo, se penalizará que la asignación de proyectos en los que participan alumnos a horarios que les resultan inconvenientes. También se le otorgará prioridad a ocupar horas inactivas de los docentes que hayan quedado luego de la distribución de las horas de clase y de las horas de apoyo.

Con respecto a los proyectos, en el caso de estudio no se impusieron límites a cuántos pueden haber por día o por hora cátedra. Si existieran tales límites, las restricciones del problema de PLE que las representan serían similares a las de la sección anterior. Para resolver este problema, se introducen algunos diccionarios y conjuntos.

Se define como R al diccionario donde las claves son los docentes y los valores es el conjunto de proyectos que tiene a cargo cada uno. Así pues, $R_{(p)}$ es un conjunto de tuplas $r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ donde r_1 es el proyecto, r_2 es el turno, r_3 es la carga horaria semanal y r_4 vale 1 si participan los alumnos y 0 en caso contrario.

Además, se introducen distintas penalidades por asignar proyectos donde deben participar alumnos a horarios poco favorables para los ellos. Para ambos turnos se definen las horas: κ_{TM} a partir de las cuales es demasiado tarde para el turno mañana y κ_{TT} antes de la cual es demasiado temprano para el turno tarde. En el caso de estudio, se estableció que κ_{TM} es la tercera hora de la tarde y que κ_{TT} es la cuarta hora del turno mañana. En consecuencia, la función de penalidad que depende de la hora h se define como:

$$\rho(h) = \begin{cases} (\kappa_{TT} + 1 - (h \bmod 16))^2 & \text{si } h \in K_{TT} \\ ((h \bmod 16) - \kappa_{TM} + 1)^2 & \text{si } h \in K_{TM} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Así, por ejemplo, la penalidad por asignar un proyecto en la segunda hora del turno mañana del martes se calcula como:

$$\rho(18) = (4 + 1 - (18 \bmod 16))^2 = 9$$

La notación utilizada para este modelo se encuentra en la Tabla 4.

Sean $p \in P$, $i \in M$, $h \in H$ y $t \in \{0, 1\}$ se definen las variables de decisión del problema:

$$x_{pih} = \begin{cases} 1 & \text{si el profesor } p \text{ da el proyecto } i \text{ en la hora } h \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

y_{itk} :cantidad de veces que el proyecto i ocurre en la hora inconveniente h para el turno t (definido para $i \in M_{\mathcal{A}}$), $y_{itk} \in \mathbb{Z}$

u_{ip}: cantidad de horas de proyecto i que no son convenientes para el profesor $p, u_{ip} \in \mathbb{Z}$

Tabla 4: Descripción de los conjuntos utilizados en el modelo de PLE para la distribución de proyectos exatraescolares y sus características en el caso de estudio

Notación	Descripción	Característica en el caso de estudio
M	Conjunto de proyectos	$M = \{0, \ldots, 20\}$
M_{TM}	Conjunto de proyectos para el turno mañana	$\|M_{TM}\| = 14$
M_{TT}	Conjunto de proyectos para el turno tarde	$\|M_{TT}\| = 13$
$M_{\mathcal{A}}$	Conjunto de proyectos donde participan alumnos	$\|M_{\mathcal{A}}\| = 11$
H	Conjunto de horas cátedra	$H = \{0, \ldots, 79\}$
H_{TM}	Conjunto de horas cátedra de la mañana	$H_{TM} = \{h \in H \colon \left\lfloor \frac{h}{8} \right\rfloor \equiv 0 \pmod 2\}$
H_{TT}	Conjunto de horas cátedra de la tarde , salvo las prehoras, pues el turno mañana siempre tiene séptima	$H_{TT} = \{h \in H \colon \left\lfloor \frac{h}{8} \right\rfloor \equiv 1 \pmod 2 \wedge h \not\equiv 0 \pmod 8\}$
P	Conjunto de profesores que llevan a cabo proyectos	$P = \{0, \ldots, 27\}$
K_{TM}	Conjunto de horas que resultan inconvenientes para el turno mañana	$K_{TM} = \{h \in H_{TT} \colon h \bmod 16 \geq 12\}$
K_{TT}	Conjunto de horas que resultan inconvenientes para el turno tarde	$K_{TM} = \{h \in H_{TM} \colon h \bmod 16 \leq 4\}$
D	Diccionario cuya clave es un docente y su valor son las horas en las que puede llevar a cabo proyectos	
F	Diccionario cuya clave es un docente y su valor es un conjunto de horas favorables para llevar a cabo proyectos	$F_{(p)} \subseteq D_{(p)}$
C	Diccionario con el cargo de clases de apoyo de cada docente	
R	Diccionario donde las claves son los docentes y los valores es el conjunto de proyectos que tiene a cargo cada uno	

Los conjuntos de restricciones para el problema son los siguientes:

R1: un profesor no puede estar en dos lugares al mismo tiempo:

$$\sum_{i \in M} x_{pih} \leq 1 \quad \forall p \in P, \forall h \in H$$

R2: la séptima hora del turno mañana se superpone con la prehora del turno tarde:

$$\sum_{i \in M} x_{p,i,h} + \sum_{i \in M} x_{p,i,h+1} \leq 1 \quad \forall p \in P, \forall h \in \{h \in H \colon h \equiv 7 \pmod{16}\}$$

R3: no se pueden dictar proyectos durante la séptima hora del Lunes del turno tarde:

$$x_{p,i,15} = 0 \quad \forall p \in P, \forall i \in M$$

R4: debe cumplirse la cantidad de horas de proyecto. Los proyectos para el turno mañana deben darse en el turno tarde y viceversa. Los proyectos solo pueden darse en las horas en las que el profesor no esté dando clase:

$$\sum_{h \in D_{(p)} \cap H_{TT}} x_{p,r_1,h} = r_3 \quad \forall p \in P, \forall (r_1, 0, r_3, r_4) \in R_{(p)}$$

$$\sum_{h \in D_{(p)} \cap H_{TM}} x_{p,r_1,h} = r_3 \quad \forall p \in P, \forall (r_1, 1, r_3, r_4) \in R_{(p)}$$

R5: se desea ubicar los proyectos en los que participan alumnos en horarios convenientes para los alumnos de ambos turnos:

$$\sum_{p \in P} x_{pih} \leq y_{i0h} \quad \forall h \in K_{TM} \forall i \in M_{\mathcal{A}}$$

$$\sum_{p \in P} x_{pih} \leq y_{i1h} \quad \forall h \in K_{TT} \forall i \in M_{\mathcal{A}}$$

R6: se desea que las horas de proyectos se integren bien a las fichas de los docentes, preferentemente ocupando horas inactivas:

$$\sum_{h \in H \setminus F_{(p)}} x_{pih} = u_{ip} \quad \forall i \in M \, \forall p \in P$$

La función a minimizar es la siguiente:

$$\sum_{p \in P} \sum_{i \in M} \sum_{h \in H} x_{pih} + 10 \cdot \sum_{i \in M} \sum_{t \in \{0,1\}} \sum_{h \in H} \rho(h) y_{ith} + 20 \cdot \sum_{i \in M} \sum_{p \in P} u_{ip}$$

Al igual que ocurría con el modelo para asignar las clases de apoyo, los pesos fueron ajustados experimentalmente y este problema es de rápida resolución: el solver necesitó sólo 0,1 segundos. La asignación de horas para los proyectos es el último paso en la confección del horario escolar, por lo tanto el procedimiento de construcción termina una vez obtenido el resultado de este problema de PLE.

4. Comparación con la elaboración manual

4.1. Caso de estudio

Hemos tomado como caso de prueba a una escuela pública de la Ciudad de Buenos Aires. Contamos con los datos utilizados para elaborar los horarios que rigieron durante el ciclo lectivo de 2017 y de 2018. En el caso de prueba, el turno mañana está compuesto por doce cursos y el turno tarde por diez, sumando un total de veintidós cursos y 770 horas de clase que deben ser programadas. La escuela cuenta con un plantel de 50 docentes y con la existencia de prehora para los cursos del turno tarde. Debido a que los docentes y directivos ocasionalmente deben reunirse en un Taller Docente los Lunes a las 17: 20 horas, ese día no pueden programarse clases en la séptima hora para el turno tarde. En ambos turnos, los alumnos tienen dos recesos de diez minutos: el primero, entre la segunda y tercera hora y el segundo, entre la cuarta y la quinta.

Por otro lado, la escuela cuenta con los siguientes recursos edilicios: dos salas de informática, cuyo uso debe ser distribuido entre seis asignaturas; un laboratorio de biología; un laboratorio de físico-química; un salón para actividades artísticas, requerido por cuatro asignaturas; y un salón de usos múltiples. Debido a que la oferta de recursos excede la demanda, suele suceder que ciertas asignaturas se ven obligadas a prescindir de ellos o a turnarse para utilizarlos. Lo preferible es que la superposición horaria en el requerimiento de los mismos sea la mínima posible.

A contraturno, la escuela ofrece clases de apoyo escolar de 16 materias para el turno mañana y de 14 materias para el turno tarde, dictadas por 27 profesores del plantel docente. Por cuestiones de espacio físico, las autoridades de la escuela establecen que puedan dictarse a lo sumo tres clases de apoyo simultáneamente. Por otra parte, se ofrecen once proyectos en los que pueden participar los alumnos.

4.2. Resultados de la aplicación de la heurística desarrollada

Para evaluar el desempeño de los horarios elaborados utilizando la herramienta que desarrollamos en este trabajo, utilizamos como indicadores las penalizaciones por violar las restricciones blandas y las restricciones duras suavizadas. La suma de ellas es el valor de la función de penalidad Ψ para el horario de clases. Describimos entonces los indicadores de desempeño:

- *Horas separadas de asignatura*: dada una asignatura que se dicta en un día durante dos o más horas, se prefiere que dichas horas sean consecutivas.
- *Bloques de asignatura*: se entiende por bloque a un conjunto de dos o más horas consecutivas en las que se imparte la misma materia. Se desea que las materias conformen la mayor cantidad de bloques de dos horas posible.
- *Cantidad de triples*: mientras que es posible dictar tres horas de una materia en un mismo día, se prefiere que esto ocurra la menor cantidad de veces posible.
- *Horas inactivas de los docentes*: es preferible que los docentes tengan la menor cantidad de horas inactivas durante su horario laboral. Como el trabajo del docente es remunerado según el cargo, una hora inactiva es tiempo perdido para el docente.
- *Excesiva demanda de recursos*: la escuela cuenta con un conjunto de recursos y cada uno cuenta con una demanda distinta. Se prefiere que la superposición horaria del requerimiento de recursos sea la menor posible.
- *Cantidad excesiva de prehoras*: se desea que, por una cuestión de espacio físico, no hayan más de 6 cursos del turno tarde con prehora por día.
- *Intervalos interruptores*: es preferente que los intervalos de los alumnos no interrumpan los bloques de las materias.

Además, incluimos la penalidad por no respetar las restricciones duras suavizadas para mostrar que los horarios generados automáticamente también las cumplen. Agregamos el requerimiento de no dictar clases en el turno tarde durante la séptima hora del Lunes como otra restricción dura suavizada.

En el la Tabla 5 se encuentra la comparación entre las penalidades del horario de clases elaborado manualmente para el año 2017 y del generado con la heurística que desarrollamos, así como también la diferencia relativa entre ambos, calculada como:

$$\left(\frac{\texttt{penalidad\_grilla\_automatica}}{\texttt{penalidad\_grilla\_manual}} - 1\right) \cdot 100$$

Como se puede observar, el horario de cursada generado automáticamente supera al elaborado manualmente en todas las categorías, salvo en las que el horario estándar no incurría en ninguna penalidad. Por ejemplo, en el horario

Tabla 5: Comparación entre las penalidades del horario de clases elaborado manualmente para el año 2017 y del generado con la heurística que desarrollamos

	Grilla automática	Grilla manual	Diferencia relativa
Penalidad por no respetar disponibilidad docente	0	0	0 %
Penalidad por séptima hora del Lunes TT	0	0	0 %
Penalidad por horas inactivas de los docentes	1.877,73	5.267,55	−64,35 %
Penalidad por intervalos interruptores	950	1.500	−36,67 %
Penalidad por falta de bloques de asignaturas	4.485	6.325	−29,09 %
Penalidad por cantidad de *triples*	600	4.200	−85,71 %
Penalidad por horas separadas de asignaturas	0	2.600	−100 %
Penalidad por cantidad excesiva de prehoras	0	0	0 %
Penalidad por excesiva demanda de recursos	1.760	2.000	−12 %
Penalidad total	9.672,73	21.892,55	−55,82 %

de cursada estándar ocurría siete veces que se dictaban tres horas de la misma asignatura en un sólo día, mientras que esto ocurre una sola vez en el horario generado automáticamente. Asimismo, se logró reducir completamente la ocurrencia de asignaturas que se dictaban en horas separadas a lo largo de un mismo día y se mejoró la eficiencia del uso de los recursos. Con respecto a las horas extracurriculares, en el horario generado automáticamente sólo dos horas de apoyo y cinco horas de proyectos fueron asignadas a horarios poco convenientes para los alumnos.

Al aplicar la heurística a la elaboración automática del horario escolar para el 2018, el solver logró resolver el problema y poblar el *pool* de soluciones en 0,63 segundos. Se obtuvieron así 28 horarios iniciales a los que se les aplicó paralelamente el método de *hill-climbing* estocástico. Como era de esperar, la etapa de optimización fue la que consumió la mayor cantidad de tiempo: una hora y cuarenta y ocho minutos. Al horario con menor penalización que cumpliera con las restricciones duras suavizadas se le aplicó la distribución de horas de extraclase que, como ocurrió en el caso del horario de 2017, demoró menos de un segundo. En total, la generación del horario escolar tardó casi dos horas. En la Tabla 6 se encuentra la comparación entre las penalidades de los horarios elaborados manual y automáticamente. Es importante aclarar que entre los dos años hubieron varios cambios. Por un lado, hubieron modificaciones en el plantel docente debido a renuncias y a jubilaciones. Los cargos de los docentes que no están más en la escuela se presentan a concurso. Si para Febrero todavía ningún docente reclama las horas correspondientes a esos cargos, se confecciona el horario escolar sin tener en cuenta su posible disponibilidad horaria. Una vez confeccionado el horario, el docente que desee concursar por esas horas deberá adaptar su disponibilidad horaria a ellas. Por esta razón,

Tabla 6: Comparación entre las penalidades del horario de clases elaborado manualmente para el año 2018 y del generado con la heurística que desarrollamos

	Grilla automática	Grilla manual	Diferencia relativa
Penalidad por no respetar disponibilidad docente	0	0	0 %
Penalidad por séptima hora del Lunes TT	0	0	0 %
Penalidad por horas inactivas de los docentes	1.688,10	4.602,62	−63,32 %
Penalidad por intervalos interruptores	1.150	1.700	−32,35 %
Penalidad por falta de bloques de asignaturas	3.105	6.095	−49,06 %
Penalidad por cantidad de *triples*	1.200	7.200	−83,33 %
Penalidad por horas separadas de asignaturas	650	5.200	−87,50 %
Penalidad por cantidad excesiva de prehoras	0	0	0 %
Penalidad por excesiva demanda de recursos	480	6.160	−92,21 %
Penalidad total	8.273,10	30.957,62	−73,28 %

consideramos que las asignaturas que no tienen asignados profesores todavía, son dictadas por docentes con total disponibilidad horaria. De esta manera, en el proceso de optimización hay mayor libertad para intercambiar horarios y, al mismo tiempo, queda conformado para el futuro docente un horario que no posea muchas horas inactivas. Debido a la cantidad de cargos que debe ser cubiertos y la ductilidad que esto le proporciona al proceso de elaboración del horario, se han podido formar más bloques de asignaturas.

Otra modificación que vale la pena mencionar es la introducción de nuevas asignaturas debido a la disposición de la NES. Muchas de esas asignaturas requieren el uso de las salas de computación. A pesar de esto, la escuela no ha sido adecuada a la nueva demanda, lo que significa un mayor requerimiento de los mismos recursos con los que se contaba el año anterior. La mayor diferencia en cuanto a penalidad respecto al horario estándar se encuentra en esta categoría, por lo que se demuestra que el algoritmo ha contribuido al uso eficiente de los recursos.

Entre otros logros, se ha logrado disminuir la cantidad de bloques de tres horas consecutivas de la misma asignatura: en el horario estándar habían doce, mientras que en el horario obtenido con el programa hay sólo dos. Con respecto a las horas extraclase, sólo han quedado asignadas a horarios poco convenientes para los alumnos dos horas de clases de apoyo y cuatro horas de proyectos.

5. Conclusiones y trabajo futuro

En general, la elaboración manual de horarios es una tarea que comienza alrededor de Noviembre y debe estar terminada para mediados de Febrero, cuando comienza el nuevo año escolar y debe comunicarse a los docentes cómo quedan conformados sus horarios de trabajo. No es que la tarea requiera la dedicación exclusiva de todo ese tiempo, sino que, como debe efectuarla un directivo o un docente, quienes a su vez tienen otras ocupaciones mas urgentes, la confección del horario se lleva a cabo espaciada y progresivamente. En comparación, el programa desarrollado en este trabajo permite confeccionar un horario en poco menos de dos horas. Por lo tanto, si debieran modificarse algunas características como la disponibilidad de ciertos docentes, se podría volver a ejecutar la herramienta para que elabore nuevos horarios acorde a las nuevas exigencias; siempre y cuando el ciclo lectivo no haya comenzado aún. Como se ha mostrado en las secciones anteriores, el programa no sólo efectúa la tarea rápidamente sino que también genera horarios que son mejores que los elaborados manualmente, según las prioridades que establecieron los directivos. Por tanto, puede concluirse que la heurística cumple con el objetivo propuesto: armar horarios de calidad rápidamente.

Concluimos que la utilización de métodos de búsqueda local permiten proponer una función de penalidad que represente mejor a los criterios que guían la elaboración de horarios en la vida real y su implementación es relativamente sencilla. Además, la aplicación de los algoritmos de búsqueda local permitió plantear ciertas hipótesis sobre el *espacio* de los horarios de cursada: todo parece apuntar a que existen extensos lomos y que los valles son planos, dado que todas las ejecuciones de *hill-climbing* básico culminaron al agotar la cantidad máxima de pasos laterales y no por la ausencia de vecinos de igual o menor penalidad (mínimo local). En este contexto, la variante estocástica del *hill-climbing* es la más próspera, puesto que ofrece una probabilidad de aceptar un empeoramiento razonable de la penalidad, permitiendo el escape de las mesetas, amén de tener un tiempo de ejecución que se ajusta a la meta de este trabajo.

Como ocurre en muchos problemas de Investigación Operativa, es esencial tener presente la opinión y el procedimiento que realiza la persona encargada de realizar la tarea manualmente. Ya que debe llevar a cabo el trabajo regularmente, ha adquirido mucha destreza en esta tarea y muchas de las ideas o técnicas que desarrolló pueden servir de inspiración al momento de automatizar el proceso. Tal es el caso de este trabajo. La ubicación prioritaria de las asignaturas que se dictan con simultaneidad y la división de la elaboración del horario en dos etapas, así como también los valores elegidos para las penalizaciones, fueron decisiones basadas en técnicas que utilizaban los directivos y la profesora que armaba manualmente el horario. Mantuvimos un diálogo con ellos a lo largo de la elaboración del trabajo y quedaron muy satisfechos con los resultados que brindó este programa.

Tomando la herramienta desarrollada en este trabajo como base, se pueden añadir ciertas mejoras. Por un lado, implementar un algoritmo que permita ajustar un horario ya armado a un cambio repentino (como el cambio en la disponibilidad de algún docente) realizando la menor cantidad de alteraciones posible. Otra mejora consiste en incluir en el modelo la preferencia que tienen los docentes por dictar clases en ciertas horas del turno mañana o del turno tarde. Esto supone también la implementación de una función que calcule el balance de cuántas preferencias de cada docente están siendo satisfechas. Asimismo, se pueden agregar más capas de complejidad a la función de penalidad para reflejar aún mejor la realidad. Por ejemplo, la función que penaliza horas inactivas de los docentes podría tener en cuenta no sólo la cantidad, sino también qué horas tienen libres: las horas libres más cercanas al mediodía podrán ser ocupadas en la Etapa II con clases de apoyo o proyectos, por lo que no deberían recibir igual penalización que las que se encuentran alejadas.

Más en general, si bien el orden de prioridades establecido por los directivos de la escuela con la que se trabajó es razonable, también sería interesante encontrar una escala de preferencias para el cumplimiento de las restricciones blandas más homogéneo u objetivo, que pudiese aplicarse a todas las escuelas y que no necesariamente dependa del criterio de cada autoridad.

Referencias

[1] Abramson, D., Krishnamoorthy, M., Dang, H.,. Simulated annealing cooling schedules for the school timetabling problem. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, (16), 1999.

[2] Bondy J.A. and Murty U.S.R. *Graph theory with applications.* North-Holland, 1976.

[3] Chorbev I., Loskovska S., Dimitrovski I., Mihajlov D. Solving the high school scheduling problem modelled with constraints satisfaction using hybrid heuristic algorithms. En W. Bednorz, editor, *Greedy Algorithms.* InTech, 2008.

[4] Côte , P., Wong, T., Sabourin, R. Application of a hybrid multi-objective evolutionary algorithm to the uncapacitated exam proximity problem. En Burke, E.K., Trick, M., editor, *Selected Papers from the 5th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling, Lecture Notes in Computer Science*, volume 3616. Springer, 2005.

[5] Csima J. *Investigations on a Time-Table Problem.* PhD thesis, Institute of Computer Science, University of Toronto, 1965.

[6] Deris, B., Omatu, S., Ohta, H., Samat, D. University timetabling by constraint-based reasoning: A case study. *Journal of Operational Research Society*, 12(48):1178–1190, 1997.

[7] Di Gaspero, L., Schaerf, A. Tabu search techniques for examination timetabling. En Burke, E.K., Erben, W., editor, *Selected Papers from the 3rd International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling, Lecture Notes in Computer Science*, volume 2079. Springer, 2001.

[8] Nonobe, K., Ibaraki, T. A tabu search approach to the constraint satisfaction problem as a general problem solver. *European Journal of Operational Research.*

[9] N. Saptarini, I. W. Suasnawa, y P. Ciptayani. Senior high school course scheduling using genetic algorithm. *Journal of Physics: Conference Series*, 953:012067, 01 2018.

[10] Stuart Russell y Peter Norvig. *Artificial Intelligence: a Modern Approach.* Pearson Education, 2003.

[11] Valouxis C., Gogos C., Alefragis P., Housos H. Decomposing the high school timetable problem. *Practice and Theory of Automated Timetabling.*

[12] van der Kooy N. J. The high school scheduling problem: Improving local search fairness evaluation. Master's thesis, Mathematical Institute, University of Leiden, 2017.

[13] Zbigniew Michalewicz y David B. Fogel. *How to Solve It: Modern Heuristics.* Springer, 2004.