Asignación de árbitros para las ligas profesionales de básquet de Argentina mediante Investigación de Operaciones

Guillermo Durán *
Mario Guajardo **
Facundo Gutiérrez ***

Resumen

A partir de la temporada 2014-2015, las ligas profesionales de básquet de Argentina transformaron su programación de un formato en que los partidos se jugaban solamente durante los fines de semana a uno símil NBA, en que se disputan partidos a lo largo de toda la semana. Esta transformación ha generado nuevos desafíos para los organizadores de la liga. Uno de estos desafíos es la asignación de árbitros a partidos. En este trabajo, abordamos este problema de asignación, mediante una herramienta basada en programación lineal entera. El objetivo es minimizar el costo total de los viajes realizados por los árbitros y al mismo tiempo satisfacer una serie de condiciones. La resolución del problema se realiza en una serie de etapas, resolviendo subproblemas más pequeños, cuyas soluciones forman parte de la entrada en siguientes etapas. En las comparaciones realizadas con la fase regional de la temporada 2015-2016, donde la asignación de árbitros fue realizada de forma manual, el uso de la técnica de resolución presentada reporta una reducción superior al 25 % en los costos de los viajes efectuados. Posteriormente, los resultados de este trabajo han sido utilizados para la asignación de árbitros de la Primera División durante las temporadas 2016-2017 y 2017-2018. Además,

*Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile. Departamento de Matemática e Instituto de Cálculo, FCEyN, Universidad de Buenos Aires and CONICET, Argentina

**Department of Business and Management Science, NHH Norwegian School of Economics, Bergen, Norway

***Departamento de Matemática e Instituto de Cálculo, FCEyN, Universidad de Buenos Aires

en la última temporada nuestro enfoque también ha sido adoptado por la Segunda División.

Palabras Clave: Asignación de Árbitros, Básquet, Programación Lineal Entera, Traveling Umpire Problem, Sports Scheduling

1. Introducción

El básquet es uno de los deportes más populares de la Argentina. La creación de la Liga Nacional en 1985 significó un gran impulso para este deporte en todo el país. Hoy la Liga Nacional de Básquet (LNB), la primera división del básquet de la Argentina, es altamente profesional y está muy expandida a lo largo y a lo ancho de todo el país. Prueba de ello es que los 20 equipos de la temporada actual (2017-2018), provienen de 10 provincias distintas. Esto conlleva a que las distancias a recorrer por los equipos sean potencialmente muy extensas y, por lo tanto, es importante considerarlas al realizar la programación de partidos. En la Figura 1 se muestra la ubicación geográfica de los 20 equipos de la LNB.

Desde la temporada 2014-2015, la programación de los partidos es realizada mediante el uso de técnicas de Investigación Operativa [5]. Los equipos eligen un conjunto de *giras deseables* de modo de disputar partidos de manera consecutiva al jugar de visitante. Por ejemplo, un equipo de Formosa (ciudad situada a 1200 km al norte de Buenos Aires) podría elegir como una gira deseable viajar a Buenos Aires y jugar de visitante contra tres equipos allí. En lo que sigue del trabajo, se asume que la programación de los partidos ya fue realizada y es un dato de entrada para el modelo. Notemos que al hacer esto, se está priorizando optimizar los viajes de los equipos por el del cuerpo arbitral, pues no se tienen en cuenta los viajes de los árbitros a la hora de realizar la programación de los partidos. Esto se justifica dado que la cantidad de personas que deben movilizarse cuando viajan los integrantes del plantel de un equipo, es sustancialmente mayor que la cantidad total de árbitros.

La programación de torneos ha generado una corriente de literatura que ha proliferado intensamente en los últimos años, conocida como *sports scheduling* (ver por ejemplo, revisiones literarias en [9] y [10]). Gran parte de la atención de la literatura se ha enfocado en aplicaciones a la programación de partidos de un torneo. Por ejemplo, en Sudamérica se ha reportado implementaciones

Figura 1: Mapa de Argentina con los equipos de La Liga Nacional, temporada 2017-2018.

para la programación de partidos en ligas de fútbol [2, 6, 8, 7, 11, 12], básquet [5] y vóley [3]. En contraste, hay pocos trabajos enfocados en la programación de árbitros. Aparte de excepcionales aplicaciones que inlcuyen torneos de cricket en Inglaterra [14], béisbol en Estados Unidos [13], y fútbol en Chile [1], otras publicaciones se han limitado a abordar aspectos metodólogicos y experimentos computacionales. En [13], particularmente, se formuló un problema conocido como *Traveling Umpire Problem* (TUP). Este problema busca capturar los aspectos más esenciales que aparecen al realizar una asignación arbitral eficiente. Formalmente, el problema está formulado de la siguiente manera: Dado un conjunto de n árbitros y $2n$ equipos, los equipos juegan un *double-round robin* compacto, lo cual da un total de $4n-2$ fechas. Se busca en cada fecha asignar un árbitro a cada partido (notar que todos los árbitros son necesarios en cada fecha). Además hay cinco restricciones que definen el problema.

1. Cada juego debe ser asignado a un árbitro.

A su vez cada árbitro debe:

2. Dirigir un partido por fecha
3. Visitar todas las localías al menos una vez a lo largo del campeonato
4. Visitar a lo sumo una vez una localía en toda ventana de $n - d_1$ fechas consecutivas
5. Dirigir a lo sumo una vez a un equipo en $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - d_2$ fechas consecutivas.

Un resultado derivado en [4] muestra que el *Traveling Umpire Problem* resulta NP-completo para $0 \leq d_1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $d_2 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$.

Si bien el TUP captura aspectos generales del problema de asignación de árbitros a partidos, las aplicaciones en la práctica incorporan otras condiciones ad hoc a las particularidades de cada liga. Nuestro trabajo se enfoca en el modelamiento y resolución del problema de asignación de árbitros a la Liga Nacional de Básquet de Argentina. Los resultados de este trabajo han sido adoptados en las dos temporadas más recientes de esta liga, además de la última temporada de la Segunda División, conocida como Liga Argentina. El resto del artículo se organiza de la siguiente forma. En la Sección 2, presentamos una descripción del problema a resolver, incluyendo detalles sobre el formato de los torneos del básquet profesional argentino. En la Sección 3 formulamos un modelo de programación lineal entera para el problema y un enfoque de resolución diseñado para la generación de soluciones para su adopción en la práctica. En la Sección 4 analizamos los resultados obtenidos en comparación a la solución precedente. La Sección 5 concluye el artículo y delinea alternativas para trabajo futuro.

2. Descripción del problema

A partir de la temporada 2015-2016, un total de 20 equipos conforman la Liga Nacional, divididos en dos conferencias (norte y sur) de 10 equipos cada una. En esa temporada la serie regular se disputó en dos fases (regional y nacional), ambas de todos contra todos ida y vuelta. En la fase regional sólo los equipos de una misma conferencia disputaron partidos entre sí, mientras que en la fase nacional juegan todos contra todos. En total, el torneo entonces cuenta en su serie regular con 560 partidos (180 en la fase regional y 380 en la fase nacional). Al finalizar la serie regular, los dos primeros de cada conferencia clasificaron directamente a los *play-off* de semifinales, mientras que del tercero al sexto se enfrentaron en los *play-off* de cuartos de final al mejor de cinco partidos. Además, los últimos de cada conferencia disputaron la serie de permanencia entre sí. La temporada 2016-2017 se disputó de manera similar, y fue la primera en la que la herramienta desarrollada en este artículo fue utilizada para la asignación de árbitros.

Cada partido de la serie regular fue arbitrado por 2 árbitros, y los partidos de *play-off* fueron dirigidos por 3 árbitros. En ese entonces el plantel arbitral para los partidos de la Liga estaba conformado por 20 árbitros, 10 de categoría A (la principal) y 10 de categoría A1. Para cada árbitro, se conoce la ciudad de residencia de cada árbitro, dato necesario a la hora de calcular los costos de los viajes que realizan.

El formato en la temporada 2017-2018 para la Primera División varió levemente disminuyendo el número de partidos global en alrededor de 50. Además, a partir de esta temporada, la herramienta fue utilizada para la asignación de los partidos de la Segunda División, sumando consecuentemente al plantel arbitral a 26 árbitros nuevos divididos en categorías A2 y A3. Por disposición de la Asociación que organiza los torneos (AdC), en la primera parte de la competencia los jueces de categoría A y A1 no estaban habilitados para dirigir a los equipos de la Liga Argentina. Como veremos, esto reduce el espacio de búsqueda factible, lo que ayuda a mejorar los tiempos de corrida del modelo. Para la segunda parte de la competencia, los árbitros de categoría A y A1 fueron habilitados a dirigir también partidos de la Liga Argentina.

A partir de 2017-2018, el arbitraje pasó a ser de tres árbitros para la Liga Nacional, aunque siguió siendo de 2 árbitros para la Liga Argentina. Salvo una pequeña cantidad de excepciones a pedido del comisionado técnico, la terna arbitral en los partidos de la Liga debía ser conformada por un árbitro de categoría A, uno de categoría A1, y otro de categoría A2 o A3 que actúa como tercer árbitro.

El objetivo es el de asignar a cada partido una dupla o terna arbitral (según corresponda), de forma de satisfacer todas las restricciones impuestas por el comisionado técnico de la AdC, minimizando los costos de viajes y hoteles incurridos por los árbitros. Estas restricciones están relacionadas con las mencionadas en el *Traveling Umpire Problem*. Por ejemplo, deben pasar tres partidos intermedios de un equipo para que un árbitro pueda estar habilitado a volver a dirigirlo, motivado por razones deportivas.

El problema en la práctica está sujeto a cambios durante la temporada. Por ejemplo, un árbitro puede lesionarse, o ser seleccionado para dirigir en una competencia internacional, inhabilitándolo durante ese período para dirigir. También pueden haber cambios de categorías dentro del plantel arbitral, así como también nuevos árbitros deben poder ser fácilmente incorporados. Por ejemplo, esto ocurrió cuando por primera vez en la historia de la Liga Nacional, se incluyó en tres partidos distintos a tres mujeres dentro de la terna arbitral. También pueden haber reprogramaciones en la programación de los partidos, cambiando el día en que originalmente se habían programado.

Considerando la gran cantidad de partidos y múltiples condiciones, confeccionar una asignación arbitral para la temporada entera simultáneamente es un problema demasiado grande. Además, si la solución fuese computada para toda la temporada en su inicio, no será necesariamente implementable, pues durante el transcurso del campeonato suelen ocurrir eventualidades como las previamente mencionadas, que hacen que se tenga que cambiar la solución propuesta. Por eso, para resolver el problema procederemos primero a formular un modelo y luego optaremos por resolverlo secuencialmente para ventanas de tiempo limitadas (usualmente de dos semanas). De esta forma, el modelo puede ajustarse durante cada período según las eventualidades que hayan ocurrido. Una vez que se tiene la corrida para una ventana de tiempo anterior, estos datos pasan a ser utilizados como dato de entrada para la corrida en la siguiente ventana de tiempo.

3. Resolución del problema

En esta sección vamos a presentar el enfoque que se utiliza para llegar a la formulación del modelo y su consecuente resolución. Primeramente es necesario notar que las fechas y las localías de los partidos ya están definidas de antemano, y es una parte clave de la entrada del modelo. Además de las distancias que deben viajar los árbitros, es necesario conocer entre qué pares de sedes un árbitro puede dirigir en días consecutivos (con un día intermedio libre se considera posible para un árbitro dirigir entre cualquier par de sedes, posiblemente incurriendo en un gasto relacionado con la estadía en un hotel). Recordemos que en el básquet generalmente hay partidos todos los días de la semana durante la fase regular (y no sólo los fines de semana como en otros deportes).

La idea central en la que ronda el modelo es en hacer un seguimiento de la ubicación de cada árbitro a lo largo del tiempo. Si en una fecha en particular hay un partido que debe ser dirigido por dos árbitros que enfrenta a A (local) contra B (visitante), el modelo deberá conseguir que dos árbitros del plantel estén en la ubicación del equipo A en esa fecha (penalizando en función del costo de movilizar a cada uno de los árbitros desde su ubicación anterior a la localía de A). Para denotar que un árbitro no está dirigiendo y se encuentra en su domicilio, agregamos un equipo ficticio. Para modelar esta situación lo que hacemos es añadir un partido en la localía de este equipo ficticio en todos los días y no acotamos superiormente la cantidad de árbitros que pueden dirigir en este partido. Por lo tanto lo que decide el modelo es en qué partidos dirige cada árbitro (tanto real como ficticio) a lo largo del tiempo. Además, como los árbitros deben comenzar y finalizar la temporada en sus domicilios, se agregan dos días extras al principio y al final de la temporada.

Los modelos fueron implementados en el lenguaje de modelado OPL y resueltos usando Cplex 12.6.3, en una computadora con 4 procesadores corriendo a 3.4GHz y con una memoria RAM de 16GB.

3.1. Modelo para la asignación de árbitros

Planteamos a continuación un modelo de programación lineal entera para decidir qué arbitro debe dirigir en cada partido. El modelo realiza la asignación considerando los partidos sólo hasta un cierto tiempo que llamamos t_{ventana}. La función objetivo es el costo total de los viajes que realizan todos los árbitros hasta t_{ventana}, incluyendo los costos asociados a estadías en hotel.

Los datos de entrada del modelo utilizados son los siguientes:

- Conjunto $\mathcal{E}$ de los equipos. Los equipos reales tienen todos índices positivos, y utilizamos el cero como índice del equipo ficticio que representa el domicilio de los árbitros. De esta forma, nos queda que $\mathcal{E} = \{0\} \overset{d}{\cup} \mathcal{E}_1 \overset{d}{\cup} \mathcal{E}_2$, donde $\mathcal{E}_1$ denota a los equipos de la Liga (primera división) y $\mathcal{E}_2$ denota a los equipos de la Liga Argentina (segunda división).
- Conjunto $\mathcal{P}$ de partidos. Cada elemento de $\mathcal{P}$ es un partido y está dado por una tupla de la forma $(t, k, l) =$ (Día, Local, Visitante), que denotan el día (contando desde el comienzo del campeonato) en el que se juega

un partido, el índice del equipo que es local y el índice del equipo que hace de visitante respectivamente. Es decir, $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $k, l \in \mathcal{E}$.

- Conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{A}_I \overset{d}{\cup} \mathcal{A}_{II} \overset{d}{\cup} \mathcal{A}_{III} \overset{d}{\cup} \mathcal{A}_{IV}$, de los árbitros separados por su correspondiente categoría. Además, se tiene un subconjunto de árbitros $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}_{III} \cup \mathcal{A}_{IV}$, formado por aquellos que pueden actuar de tercer árbitro en los partidos de la Primera División.

- Conjunto $\mathcal{Q}_{\text{local}} = \{(i,k) : i \in \mathcal{A}$ no puede dirigir a $k \in \mathcal{E}$ en condición de local$\}$. En la mayoría de los casos esto se debe a que un árbitro y un equipo residen en el mismo lugar. A su vez, se tiene el conjunto $\mathcal{Q}_{\text{visitante}}$ definido de manera análoga.

- Conjunto $\mathcal{V}$ de los viajes posibles a realizar. Cada elemento de $\mathcal{V}$ representa un viaje posible y está dado por una tupla de la forma (s,t,k,m,n), lo cual denota un viaje que se comienza en $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ desde la ubicación del equipo $k \in \mathcal{E}$, y finaliza en la localía del equipo $m \in \mathcal{E}$ en el día $t+s$ que disputa su partido contra el rival $n \in \mathcal{E}$.

  Para generar este conjunto se toma cada partido $(t,k,l) \in \mathcal{P}$ y para cada $s \in \{1,2\}$, se toman todos los partidos de la forma $(t+s,m,n) \in \mathcal{P}$, y se agrega el viaje (s,t,k,m,n) a $\mathcal{V}$. De la misma forma, se genera $\widehat{\mathcal{V}}$, agregando (s,t,k,m) a $\widehat{\mathcal{V}}$ (esta definición tendrá sentido más adelante al describir las variables utilizadas). Notar que será necesario sólo considerar los viajes que son realmente factibles en la realidad, dado que generando $\mathcal{V}$ de esta forma, para $s=1$ se están generando muchos viajes que no tienen por qué ser posibles de realizar en días consecutivos.

- Conjunto $\mathcal{C}_E = \{(k,m) :$ es posible dirigir en $k \in \mathcal{E}\backslash\{0\}$ y en la sede de $m \in \mathcal{E}\backslash\{0\}$ en días consecutivos$\}$. Análogamente se define $\mathcal{C}_A = \{(i,m) :$ es posible dirigir en el domicilio del árbitro $i \in \mathcal{A}$ y en la localía del equipo $m \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ en días consecutivos$\}$

- Parámetros d_{km} que denotan el costo en el que se incurre al realizar un viaje desde la ubicación del equipo $k \in \mathcal{E}\backslash\{0\}$ y la del equipo $m \in \mathcal{E}\backslash\{0\}$. Análogamente se definen r_{ik} que denotan el costo que realiza un árbitro $i \in \mathcal{A}$ desde su domicilio a la ubicación del equipo $k \in \mathcal{E}$.

- Parámetros z_i^A que denotan la zona de la residencia del árbitro $i \in \mathcal{A}$. Análogamente se definen z_k^E, que denotan la zona del equipo $k \in \mathcal{E}\backslash\{0\}$. Notar que equipos distintos pueden ser de la misma zona (por ejemplo, los equipos que hacen de local en la Ciudad de Buenos Aires).

- Parámetro h que denota el costo diario que se incurre por el uso de un hotel.

Para la formulación del modelo, introducimos dos tipos de variables binarias. Primeramente, tenemos la variable x_{ip} para cada árbitro $i \in \mathcal{A}$ y para cada partido $p \in \mathcal{P}$. De esta forma, nos queda que $x_{ip} = 1$ si y sólo si el árbitro $i \in \mathcal{A}$ es asignado a dirigir el partido $p \in \mathcal{P}$. Además, para modelar correctamente los viajes que se realizan, introducimos la variable z_{iv} para cada $i \in \mathcal{A}$ y $v \in \widehat{\mathcal{V}}$, donde $z_{iv} = 1$ si y sólo si el árbitro $i \in \mathcal{A}$ realiza un viaje de largo $s \in \{1, 2\}$, el día $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ desde la localía del equipo $k \in \mathcal{E}$ hacia la localía de $m \in \mathcal{E}$ (recordar que $v = (s, t, k, m)$).

Con estos elementos, podemos plantear el modelo de programación lineal entera que resuelva el problema presentado de la siguiente forma:

1. La función objetivo busca minimizar el costo total proveniente de los viajes realizados por el plantel arbitral. Se asume en lo que sigue que al viajar entre dos destinos el costo no depende del sentido del viaje. Además, si un árbitro viaja entre la sede de dos equipos que no son de la zona en la que vive el árbitro en cuestión, entonces se incurre en un gasto de estadía de hotel. En lo que sigue, es conveniente tener en cuenta que el índice cero en $\mathcal{E}$ se utiliza para denotar que un árbitro está en su casa, por lo tanto $k > 0$ hace referencia a un un equipo real. Tengamos presente que $v \in \widehat{\mathcal{V}}$ es de la forma $v = (s, t, k, m)$.

$$\begin{aligned} \min : \quad & \overbrace{\sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{v \in \widehat{\mathcal{V}} \\ k>0 \\ m>0}} z_{iv} \cdot d_{km}}^{\text{viajes entre ciudades de equipos}} + \overbrace{\sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{v \in \widehat{\mathcal{V}} \\ k>0 \\ m=0}} z_{iv} \cdot r_{ik}}^{\text{viajes que llegan a un domicilio}} + \\ & + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{v \in \widehat{\mathcal{V}} \\ k=0 \\ m>0}} z_{iv} \cdot r_{im}}_{\text{viajes que salen de un domicilio}} + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{v \in \widehat{\mathcal{V}} \\ k>0 \\ m>0 \\ z_i^A \neq z_k^E}} z_{iv} \cdot s \cdot h}_{\text{costo de hotel}} \end{aligned} \tag{1}$$

2. Durante un período podemos tener cotas inferiores de los partidos que puede dirigir un cierto árbitro. Recordemos también que $p \in \mathcal{P}$ es de la forma $p = (t, k, l)$.

$$\sum_{\substack{p \in \mathcal{P}: \\ t \leq t_{\text{ventana}} \\ k>0}} x_{ip} \geq \alpha_i \quad \forall i \in \mathcal{A} \tag{2}$$

3. Análogamente podemos tener cotas superiores para los partidos que dirige cada árbitro. En particular si un árbitro no puede dirigir durante un período (porque está lesionado por ejemplo), la cota superior será cero.

$$\sum_{\substack{p\in\mathcal{P}:\\ t\leq t_{\text{ventana}}\\ k>0}} x_{ip} \leq \beta_i \quad \forall i \in \mathcal{A} \tag{3}$$

4. Para que un árbitro pueda volver a dirigir a un equipo deben pasar γ partidos intermedios del equipo donde ese árbitro no lo dirija (usualmente $\gamma = 3$). Además, denotamos por $\mathcal{P}_{k,q}$ a los partidos $q, q+1, \ldots, q+\gamma$ inclusive del equipo $k \in \mathcal{E}$ en orden cronológico. Llamamos T_k a la cantidad de partidos que juega el equipo $k \in \mathcal{E}$ a lo largo del torneo.

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_{k,q}} x_{ip} \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{E}\setminus\{0\}, \forall q \in \{1,\ldots,T_k-\gamma\} \tag{4}$$

5. De manera similar, para que un árbitro pueda volver a dirigir a un equipo en condición de local, debe pasar un partido intermedio del equipo jugando de local donde ese árbitro no lo dirija. Análogamente, llamando $\mathcal{P}^{\text{local}}_{k,q}$ a los partidos de local del equipo $k \in \mathcal{E}$ en orden cronológico, tenemos la siguiente restricción.

$$\sum_{p\in\mathcal{P}^{\text{local}}_{k,q}} x_{ip} \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{E}\setminus\{0\}, \forall q \in \{1,\ldots,T_k-\gamma_{\text{local}}\} \tag{5}$$

6. Por cuestiones de descanso, un árbitro i no puede estar más de δ_i días consecutivos fuera de su domicilio, usualmente $\delta_i = 14$ para todo i, pero puede variar dependiendo del árbitro. Sea también $p^0_t = (t,0,0) \in \mathcal{P}$, que es el partido ficticio agregado en cada día calendario para modelar que un árbitro está en su domicilio.

$$\sum_{q\leq t\leq q+\delta_i-1} x_{ip^0_t} \geq 1 \quad \forall i \in \mathcal{A}, \forall q \in \{1 ... t_{\text{ventana}}-\delta_i+1\} \tag{6}$$

7. También relacionado con el descanso necesario, se impone un máximo de tres partidos dirigidos por un árbitro en una ventana de cinco días.

$$\sum_{\substack{p\in\mathcal{P}:\\ q\leq t\leq q+4\\ k>0}} x_{ip} \leq 3 \quad \forall i \in \mathcal{A}, \forall q \in \{1,\ldots,t_{\text{ventana}}-4\} \tag{7}$$

8. Algunos árbitros tienen prohibido dirigir a ciertos equipos. Usualmente esto se debe a que un árbitro de una cierta zona no puede dirigir a los equipos que se encuentran en la misma zona (por ejemplo, un árbitro de la ciudad de Córdoba, no puede dirigir a Atenas o a Instituto).

$$\sum_{(t,k,l)=p\in\mathcal{P}} x_{ip} = 0 \quad \forall (i,k) \in \mathcal{Q}_{\text{local}} \tag{8}$$

Análogamente, en condición de visitante se tiene la siguiente restricción.

$$\sum_{(t,k,l)=p\in\mathcal{P}} x_{ip} = 0 \quad \forall (i,l) \in \mathcal{Q}_{\text{visitante}} \tag{9}$$

9. En los partidos de la Primera División, actualmente se arbitra con tres árbitros. La composición de la terna arbitral suele estar conformada por un árbitro de $\mathcal{A}_I$, uno de $\mathcal{A}_{II}$ y otro de $\widehat{\mathcal{A}}$.

$$\sum_{i\in\mathcal{A}'} x_{ip} = 1 \quad \forall (t,k,l) = p \in \mathcal{P} : k \in \mathcal{E}_1, t \leq t_{\text{ventana}} \tag{10}$$

Tenemos tres restricciones de este tipo, según si $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_I, \mathcal{A}_{II}$ o $\widehat{\mathcal{A}}$

10. En los partidos de la Segunda División, actualmente se arbitra con dos árbitros. La composición de la dupla arbitral suele estar conformada por un árbitro de $\mathcal{A}_I \cup \mathcal{A}_{II} \cup \mathcal{A}_{III}$ y otro de categoría $\mathcal{A}_{III} \cup \mathcal{A}_{IV}$.

$$\sum_{i\in\mathcal{A}'} x_{ip} = 1 \quad \forall (t,k,l) = p \in \mathcal{P} : k \in \mathcal{E}_2, t \leq t_{\text{ventana}} \tag{11}$$

Tenemos dos restricciones de este tipo, según si $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_I \cup \mathcal{A}_{II} \cup \mathcal{A}_{III}$ o bien $\mathcal{A}_{III} \cup \mathcal{A}_{IV}$

11. Ningún árbitro puede dirigir dos partidos en un mismo día.

$$\sum_{\substack{(t,k,l)=p\in\mathcal{P}: \\ t=q}} x_{ip} \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{A}, q \in \{1, \dots, t_{\text{ventana}}\} \tag{12}$$

12. De manera similar, ningún árbitro puede emprender más de un viaje en un mismo día.

$$\sum_{\substack{(s,t,k,m)=v\in\widehat{\mathcal{V}} \\ t=q}} z_{iv} \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{A}, q \in \{1, \dots, t_{\text{ventana}}\} \tag{13}$$

13. En caso de que un árbitro realice un viaje que involucre dos días, es decir, con un día intermedio, entonces no puede emprender un viaje en ese día intermedio.

$$\sum_{\substack{(s,t,k,m)=v\in\widehat{\mathcal{V}}\\ t=q\\ s=2}} z_{iv} + \sum_{\substack{(s,t,k,m)=v\in\widehat{\mathcal{V}}\\ t=q+1}} z_{iv} \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{A}, q \in \{1,\ldots,t_{\text{ventana}}\} \tag{14}$$

14. Si un árbitro dirige los partidos $p_1 = (t,k,l)$ y $p_2 = (t+1,m,n)$ (es decir, $x_{ip_1} = x_{ip_2} = 1$), queremos que la variable $z_{i\hat{v}}$ con $\hat{v} = (1,t,k,m)$ valga 1 para indicar que ese viaje fue realizado. Análogamente, buscamos que si $z_{i\hat{v}} = 1$, entonces valga que $x_{ip_1} = x_{ip_2} = 1$.

$$\begin{cases} x_{ip_1} + x_{ip_2} & \leq & 1 + z_{i\hat{v}} \\ 2 \cdot z_{i\hat{v}} & \leq & x_{ip_1} + x_{ip_2} \end{cases} \tag{15}$$

$$\forall i \in \mathcal{A}, \forall q \leq (t_{\text{ventana}} - 1), p_1 = (q,k,l) \in \mathcal{P}, v = (1,q,k,m,n) \in \mathcal{V}$$

Donde $\hat{v} = (1,q,k,m)$ y $p_2 = (q+1,m,n)$

15. Si un árbitro dirige los partidos $p_1 = (t,k,l)$ y $p_2 = (t+2,m,n)$ (es decir, $x_{ip_1} = x_{ip_2} = 1$), queremos que la variable $z_{i\hat{v}}$ con $v = (2,t,k,m)$ valga 1 para indicar que ese viaje fue realizado, a no ser que se deba a que el árbitro dirigió en tres días consecutivos (para lo cual debe hacer un viaje de $s = 1$ en el día intermedio).

$$\begin{cases} x_{ip_1} + x_{ip_2} & \leq & 1 + z_{i\hat{v}} + \displaystyle\sum_{\substack{(s,t,k,a)=\bar{v}\in\widehat{\mathcal{V}}\\ t=q\\ s=1}} z_{i\bar{v}} \\ 2 \cdot z_{i\hat{v}} & \leq & x_{ip_1} + x_{ip_2} \end{cases} \tag{16}$$

$$\forall i \in \mathcal{A}, \forall q \leq (t_{\text{ventana}} - 2), p_1 = (q,k,l) \in \mathcal{P}, v = (2,q,k,m,n) \in \mathcal{V}$$

Donde $\hat{v} = (2,q,k,m)$ y $p_2 = (q+2,m,n)$

16. Para poder seguir la ubicación de los árbitros, necesitamos que arbitren al menos un partido (ya sea real o ficticio) cada dos días.

$$\sum_{\substack{(t,k,l)=p\in\mathcal{P}\\ t=q}} x_{ip} + \sum_{\substack{(t,k,l)=p\in\mathcal{P}\\ t=q+1}} x_{ip} \geq 1 \quad \forall i \in \mathcal{A}, q \in \{1,\ldots,t_{\text{ventana}}-1\} \tag{17}$$

17. Debemos tener en cuenta en que si se realiza un viaje sin un día intermedio, entonces este viaje debe ser factible.

$$z_{i\hat{v}} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{A}, \forall \hat{v} = (1, t, k, m) \in \widehat{\mathcal{V}} : (k, m) \in \mathcal{C}_E \tag{18}$$

$$z_{i\hat{v}} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{A}, \forall \hat{v} = (1, t, k, m) \in \widehat{\mathcal{V}} : k = 0, (i, m) \in \mathcal{C}_A \tag{19}$$

$$z_{i\hat{v}} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{A}, \forall \hat{v} = (1, t, k, m) \in \widehat{\mathcal{V}} : m = 0, (i, k) \in \mathcal{C}_A \tag{20}$$

El esquema que representa el seguimiento de un árbitro en el tiempo puede verse en la Figura 2.

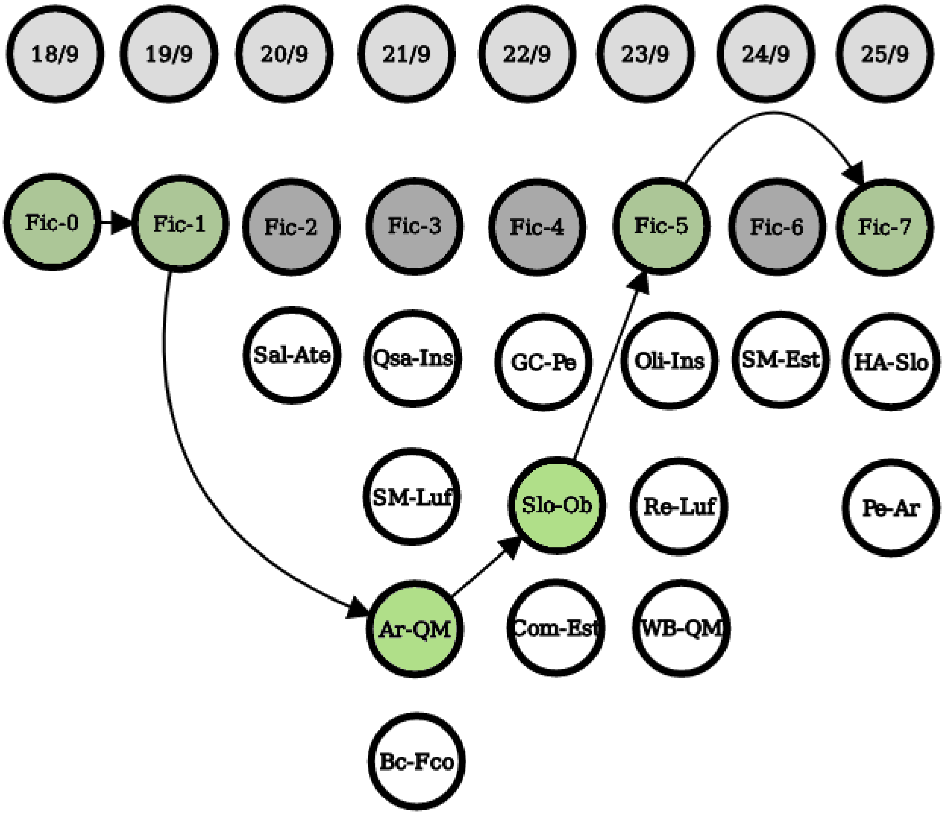

Figura 2: Representación visual del seguimiento de un árbitro en el tiempo

3.2. Resolución secuencial del modo por períodos

Para la obtención de una solución, consideramos horizontes de tiempo reducido y resolvemos los subproblemas correspondientes. La solución en la práctica es implementada en forma de horizonte rodante. A continuación explicamos este enfoque.

Al comienzo de cada período recibimos las indicaciones a tener en cuenta por parte del comisionado técnico de la AdC, así como también todo cambio que haya ocurrido respecto de lo que les presentamos en la corrida del período anterior. A continuación lo que se realiza es fijar la asignación recibida que finalmente se optó por utilizar en el período anterior (posiblemente relajando algunas restricciones en caso de que los cambios realizados por el comisionado técnico no cumplan las condiciones dadas).

Una vez recibidas las indicaciones para el período actual, hay que modelarlas debidamente. Por ejemplo, si se sabe que en el período en cuestión los árbitros de $\mathcal{A}_I$ no pueden dirigir más de un partido en la Liga Argentina (segunda división) durante este período, entonces deberemos agregar restricciones del tipo:

$$\sum_{\substack{(t,k,l)=p\in\mathcal{P}:\\ t\leq t_{\text{ventana}}\\ k\in\mathcal{E}_2}} x_{ip} \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{A}_I \tag{21}$$

De manera similar debemos tratar toda restricción ad hoc que pueda ocurrir en las indicaciones recibidas. Junto con las indicaciones, tenemos el día en el que termina el período en cuestión, llamémoslo f. Luego, realizamos una asignación utilizando el modelo mencionado, tomando como $t_{ventana} = f + \eta$, es decir hasta el día $f + \eta$. En la realidad solemos tomar $\eta = 5$. La elección de este parámetro se explica a continuación.

Condición del "fin del mundo"

Como ya dijimos, no realizamos la asignación de la temporada completa porque ocurren a lo largo de la misma enventualidades (como reprogramaciones en el fixture o lesiones de árbitros), que harian que la asignación de árbitros realizada deba cambiar completamente. En el caso de las reprogramaciones que van apareciendo aún en nuestra asignación parcial, lo que se hace es volver al último período que no contiene la reprogramación en cuestión y seguir el proceso de asignación del mismo modo desde allí, pero con los subsecuentes cambios en los conjuntos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{V}$.

Por lo tanto, al no asignar la temporada completa, se optó por resolver el problema sólo para un período más pequeño. De aquí resulta natural que si no se tiene algún cuidado, puedan existir problemas si simplemente se ubican las soluciones de dos períodos consecutivos una atrás de la otra, pues los problemas no son independientes (en particular, puede que sea necesario realizar viajes entre los últimos días de un período y los primeros del siguiente). Este fenómeno que ocurre al "pegar" soluciones óptimas es lo que llamamos condición del "fin del mundo". El nombre refiere a que al resolver un período ignorando lo que ocurre en el siguiente, el modelo podría optar por decisiones que si bien para el período en cuestión pueden ser mejores, implican decisiones muy malas en los períodos siguientes (o incluso pueden resultar infactibles en los períodos que siguen), debido a que el modelo no está viendo más allá del fin del período en cuestión (como si el "mundo" terminara allí).

Teniendo esto en mente, el método de resolución por el que se opta es el de resolver el problema con el modelo hasta la fecha $f + \eta$, y luego presentar como solución final lo que arroja el modelo hasta la fecha f. Una vez tomada esta decisión, resta elegir adecuadamente el parámetro η. Para ello se optó por resolver los mismos 5 periódos para $\eta \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde el fixture de los cinco períodos corresponden a la Fase Regional de la temporada 2015-2016 (luego se repitió para la temporada 2016-2017).

Para $\eta \in \{0, 1\}$, en ninguno de los dos casos resulta factible resolver períodos intermedios culpa de las decisiones tomadas en períodos anteriores. Para $\eta = 2$ resultó factible asignar en todos los períodos, aunque el valor de la función objetivo es considerablemente mayor que para $\eta \in \{3, 4, 5\}$. En este último caso, para $\eta \in \{3, 4, 5\}$, no hay diferencias considerables en cuanto al valor de la función objetivo al finalizar el quinto período, y cualquiera de las tres opciones creemos podría considerarse una elección sensata del parámetro η.

Las Figuras 3 y 4 muestran el esquema de solución para $\eta = 0$ y $\eta > 0$, respectivamente.

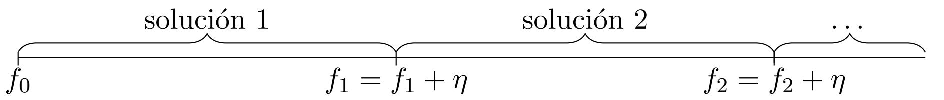

Figura 3: Solapamiento de soluciones con $\eta = 0$

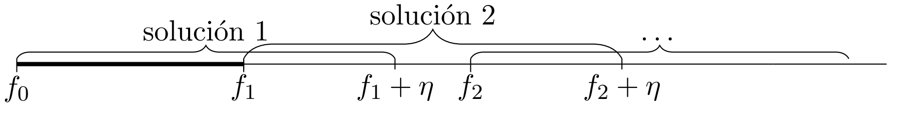

Figura 4: Solapamiento de soluciones con $\eta > 0$

Resolución de instancias grandes

Usualmente, los períodos a considerar son cercanos a 15 días (a veces unos días más, a veces unos días menos). Por lo tanto, utilizamos el modelo para resolver una instancia que ronda los 20 días (ya que tomamos $\eta = 5$). Además de la cantidad de días a considerar, la cantidad de partidos en un período afecta considerablemente los tiempos de resolución.

En caso de que no se encuentre solución óptima al cabo de una hora, se parte el período en cuestión en subperíodos hasta que cada uno de estos se resuelva de forma óptima. Los subperíodos no son disjuntos sino que se solapan, más aún, se toma $\eta = 3$ y se utiliza el mismo método que mencionamos antes para incrementalmente hallar una solución factible que corresponda a todo el período en cuestión.

Una vez que se tiene una solución factible de todo el período, se fijan las asignaciones realizadas que involucran a los árbitros de categorías $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_I$. Finalmente, se busca la solución a este nuevo problema, que ahora involucra a todo el período de tiempo (pero no a todos los árbitros). Puede verse esto como una heurística de búsqueda local, donde el vecindario de una asignación, está compuesto por todas las asignaciones factibles que difieren de la asignación parcial en $\mathcal{A}_I$ (en realidad, se relajan algunas asignaciones más donde un árbitro de $\mathcal{A}_I$ podría oficiar, por ejemplo en algunos partidos extra de la Liga Argentina).

Finalizada la corrida del modelo fijando los partidos de árbitros de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_I$, se toma esta nueva asignación y se fijan las asignaciones que involucran a árbitros de las categorías $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{II}$, y se procede análogamente. Una vez terminado este proceso con $\mathcal{A}_{II}, \mathcal{A}_{III} \cup \widehat{\mathcal{A}}$, y $\mathcal{A}_{IV} \cup \widehat{\mathcal{A}}$, se da por terminada una iteración. Estas iteraciones se vuelven a repetir hasta que la variación en la solución final de

2 iteraciones consecutivas sea ínfima, y se da por terminada la solución del período con el resultado de la última iteración. En la práctica, este enfoque es razonable pues existe poca relación entre los problemas de las categorías $\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_{II}, \mathcal{A}_{III} \cup \widehat{\mathcal{A}}$, y $\mathcal{A}_{IV} \cup \widehat{\mathcal{A}}$.

La Tabla 1 muestra la medición de tiempos para la resolución de una instancia conjunta de Primera y Segunda División, mientras que la Tabla 2 muestra lo mismo para una instancia sólo de Primera.

Tabla 1: Medición de tiempos para instancias comenzando el 1/2/2018 y finalizando el 14/2/2018. Se toman partidos de la Liga Nacional y la Liga Argentina. En cada columna se tiene el tiempo hasta alcanzar el valor óptimo para $\mathcal{A}'$, fijando los valores en $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Solución factible se encuentra en todos los casos en cuestión de segundos.

Días	Partidos	$\mathcal{A}_I$	$\mathcal{A}_{II}$	$\mathcal{A}_{III} \cup \widehat{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}_{IV} \cup \widehat{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$
5	29	14 seg.	8 seg.	16 seg.	11 seg.	18 min.
6	35	18 seg.	53 seg.	30 seg.	29 seg.	$>$ 1 h.
7	41	47 seg.	105 seg.	50 seg.	237 seg.	$\vdots$
8	46	48 seg.	8 min.	104 seg.	22 min.	$\vdots$
9	53	109 seg.	36 min.	13 min.	46 min.	$\vdots$
10	56	11 min.	$>$ 1 h.	30 min.	$>$ 1 h.	$\vdots$
11	65	19 min.	$\vdots$	$>$ 1 h.	$\vdots$	$\vdots$
12	70	$>$ 1 h.	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13	79	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
14	84	$>$ 1 h.	$>$ 1 h.	$>$ 1 h.	$>$ 1 h.	$>$ 1 h.

Tabla 2: Medición de tiempos para instancias comenzando el 11/4/2018 y finalizando el 24/4/2018. Se toman sólo los partidos de la Liga Nacional. En cada columna se tiene el tiempo hasta alcanzar el valor óptimo para $\mathcal{A}'$, fijando los valores en $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Solución factible se encuentra en todos los casos en cuestión de segundos. Al no haber partidos de La Liga Argentina, sólo hace falta considerar $\widehat{\mathcal{A}}$.

Días	Partidos	$\mathcal{A}_I$	$\mathcal{A}_{II}$	$\widehat{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$
5	15	10 seg.	11 seg.	14 seg.	25 seg.
6	19	12 seg.	15 seg.	21 seg.	54 seg.
7	20	13 seg.	16 seg.	23 seg.	85 seg.
8	24	16 seg.	26 seg.	35 seg.	159 seg.
9	26	17 seg.	28 seg.	42 seg.	11 min.
10	32	29 seg.	53 seg.	89 seg.	$>$ 1 h.
11	35	48 seg.	88 seg.	103 seg.	$\vdots$
12	39	11 min.	5 min.	20 min.	$\vdots$
13	43	18 min.	26 min.	54 min.	$\vdots$
14	46	$>$ 1 h.	$>$ 1 h.	$>$ 1 h.	$>$ 1 h.

4. Comparación con la asignación manual

El modelo que presentamos fue utilizado para ayudar a la confección de la asignación arbitral (todas las decisiones finales fueron tomadas por el comisionado técnico de la liga) durante las temporadas 2016-2017 y 2017-2018. En esta última temporada, además de utilizarse para los partidos de la Liga, también fue utilizada para la Liga Argentina.

Gracias a la colaboración del comisionado técnico, pudimos obtener la asignación realizada de forma manual en la Fase Regional 2015-2016. Esta temporada en particular nos es de interés porque en ella la programación de los partidos tiene en cuenta maximizar la elección de las giras de visitante preferidas por los equipos, que es la condición que se sigue usando hasta la actualidad para la realización del fixture. Por lo tanto, la estructura del problema es similar a la que tratamos actualmente, y resulta una buena instancia de estudio.

Utilizando el modelo para este período, se logra cumplir con las restricciones vistas anteriormente y se incurre en un costo estimado de U$S 41.747, y una totalidad de 294.672 kilómetros viajados por el plantel de árbitros. Mientras que la designación arbitral real de la fase regional que nos fue facilitada por el comisionado técnico tiene un total de gastos estimado de U$S 57.576 y un total de 419.400 kilómetros viajados por el plantel de árbitros, lo cual da una mejora a favor del modelo superior al 25 %, tanto en distancia viajada como en costos. Cabe destacar además que la asignación manual no cumplió con todas las restriciones que el problema tiene.

5. Conclusiones

Este trabajo ha reportado una nueva aplicación de sports scheduling, particularmente enfocado en la asignación de árbitros a partidos, un problema mucho menos estudiado en la literatura que el de la programación de partidos. Mediante un modelo de programación lineal entera y un enfoque de descomposición, nuestros resultados reportan una significativa reducción (alrededor de 25 %) en comparación a la solución obtenida manualmente por los programadores del torneo. Debido a los buenos resultados, nuestro enfoque ha sido utilizado para la asignación de árbitros de la Liga Nacional durante las temporadas 2016-2017 y 2017-2018, y por La Liga Argentina (segunda división) en la temporada 2017-2018.

Dado que para la programación del fixture se tiene en cuenta maximizar la cantidad de giras de visitante preferidas por los equipos [5], podemos notar que un árbitro jamás podrá realizar esa misma gira (ya que debe pasar una cierta cantidad de partidos de un equipo para que un árbitro pueda volver a dirigirlo). Por ello, algo que se podría intentar a futuro es tener en cuenta el problema de asignar árbitros a la hora de realizar la programación de partidos. Por ejemplo, supongamos que al programar los partidos se decide que un equipo haga una gira de 3 partidos, jugando de visitante en Mar del Plata un lunes y un miércoles, en Buenos Aires el viernes y finalizado ese partido vuelva a su ubicación. En este caso, un árbitro que dirige en Mar del Plata el lunes no puede dirigir en el partido del miércoles de ese equipo. Sin embargo, algo que podría tener sentido es que otros equipos hagan giras donde el martes y el jueves visitan a equipos en los cuales un mismo árbitro pueda dirigir en días consecutivos desde Mar del Plata (por ejemplo en Bahía Blanca o en Buenos Aires). De alguna manera, estamos evidenciando que habría giras que dependiendo cómo son distribuidas en la semana, pueden ser complementarias y ayudar a la asignación de árbitros, sin modificar sustancialmente la primera etapa de la realización de la programación de los partidos (sino solamente teniendo criterios de esta índole a la hora de distribuir los partidos en el calendario).

Posiblemente, la integración del problema de asignación de árbitros con el de la programación de partidos implique mayor dificultad a problemas que ya por separado son difíciles, por lo cual la generación de métodos de resolución es también una línea de investigación futura relevante.

Agradecimientos: A la directiva y los clubes de la AdC por su compromiso con la implementación de este proyecto, especialmente a Fabián Borro, su presidente, a Sergio Guerrero, su Secretario Técnico, y a Eduardo Bellón y Luis Cornejo, comisionados técnicos responsables de la asignación arbitral. El primer autor está parcialmente financiado por el Instituto Sistemas Complejos de Ingeniería, ISCI, Chile (CONICYT PIA FB0816) y el subsidio ANPCyT PICT 2015-2218 (Argentina).

Referencias

[1] F. Alarcón, G. Durán, y M. Guajardo. Referee assignment in the chilean football league using integer programming and patterns. *International Transactions in Operational Research*, 21(3):415–438, 2014.

[2] F. Alarcón, G. Durán, M. Guajardo, J. Miranda, H. Muñoz, L. Ramírez, M. Ramírez, D. Sauré, M. Siebert, S. Souyris, et al. Operations research transforms the scheduling of chilean soccer leagues and south american world cup qualifiers. *Interfaces*, 47(1):52–69, 2017.

[3] F. Bonomo, A. Cardemil, G. Durán, J. Marenco, y D. Sabán. An application of the traveling tournament problem: The argentine volleyball league. *Interfaces*, 42(3):245–259, 2012.

[4] L. de Oliveira, C. C. de Souza, y T. Yunes. On the complexity of the traveling umpire problem. *Theoretical Computer Science*, 562:101–111, 2015.

[5] G. Durán, S. Durán, J. Marenco, F. Mascialino, y P. A. Rey. Programación matemática para los fixtures de los torneos profesionales del básquet de la argentina en un formato nba. *Revista de Ingenieria de Sistemas Volumen XXX*, 2016.

[6] G. Durán, M. Guajardo, J. Miranda, D. Sauré, S. Souyris, A. Weintraub, y R. Wolf. Scheduling the chilean soccer league by integer programming. *Interfaces*, 37(6):539–552, 2007.

[7] G. Durán, M. Guajardo, y D. Sauré. Scheduling the south american qualifiers to the 2018 fifa world cup by integer programming. *European Journal of Operational Research*, 262(3):1109–1115, 2017.

[8] G. Durán, M. Guajardo, y R. Wolf-Yadlin. Operations research techniques for scheduling chile's second division soccer league. *Interfaces*, 42(3):273–285, 2012.

[9] G. Kendall, S. Knust, C. C. Ribeiro, y S. Urrutia. Scheduling in sports: An annotated bibliography. *Computers & Operations Research*, 37(1):1–19, 2010.

[10] R. V. Rasmussen y M. A. Trick. Round robin scheduling–a survey. *European Journal of Operational Research*, 188(3):617–636, 2008.

[11] D. Recalde, R. Torres, y P. Vaca. Scheduling the professional ecuadorian football league by integer programming. *Computers & Operations Research*, 40(10):2478–2484, 2013.

[12] C. C. Ribeiro y S. Urrutia. Scheduling the brazilian soccer tournament: Solution approach and practice. *Interfaces*, 42(3):260–272, 2012.

[13] M. A. Trick, H. Yildiz, y T. Yunes. Scheduling major league baseball umpires and the traveling umpire problem. *Interfaces*, 42(3):232–244, 2012.

[14] M. Wright. Scheduling english cricket umpires. *Journal of the Operational Research Society*, 42(6):447–452, 1991.