
PROBLEMAS DE *Cutting Stock* Y *Pricing* PARA PRODUCTOS PERECIBLES

ALEJANDRO CATALDO ^{*}
PABLO A. REY ^{**}
CARLOS RIESCO ^{*}
ANTOINE SAURÉ ^{***}

Resumen

Este trabajo presenta una versión integrada de los problemas de Cutting Stock y Pricing aplicado en la problemática que enfrentan las empresas agroindustriales que disponen diariamente de piezas enteras de insumo que deben ser trozadas para obtener productos finales (problema de Cutting Stock). A su vez, dada la naturaleza perecible de sus productos, una correcta fijación de precios, relacionada a las políticas de inventario, resulta relevante para evitar la caducidad de los productos finales (problema de Pricing). Para resolver el problema conjunto de trozado y fijación de precios, aquí definido como “Cutting Stock and Pricing Problem”, se propone un enfoque de solución basado en la formulación y resolución de dos modelos de programación entera no lineal. El primero considera variables de precio, producción e inventario, siendo un caso particular del problema de Lot-Sizing, mientras que el segundo considera variables de producción, inventario y precio, siendo un caso particular de un problema de flujo en redes. Los resultados obtenidos muestran que el primero de estos modelos tiene un mejor desempeño en tiempo de resolución en todas las instancias resueltas. También se observó, en todos los casos, que el inventario de productos finales converge a cero a medida que avanzan los períodos en el horizonte de evaluación.

Palabras Clave: Cutting Stock, Pricing, Optimización, Productor perecibles, Agroindustria.

^{*}Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile

^{**}Departamento de Ingeniería Industrial, Escuela de Ingeniería Universidad Tecnológica Metropolitana, Santiago, Chile.

^{***}Telfer School of Management, University of Ottawa, Ottawa, Canadá.

1. Introducción

En una economía que cada día requiere de productos más competitivos, ya no basta con que sólo los procesos productivos estén a la vanguardia del desarrollo tecnológico. Además, se requiere que los procesos productivos deben ser de alto estándar para así generar una reducción en los costos operacionales. De esta manera, es necesario que la planificación que acompaña a estos procesos asegure el aprovechamiento máximo de las capacidades productivas, la minimización de costos y las mermas asociadas a estos, manteniendo la competitividad de las empresas en el mercado [32].

En el caso de las empresas agroindustriales, éstas deben tener un cuidado especial en su planificación ya que disponen diariamente de insumos que, por la naturaleza del rubro, son perecibles (por ejemplo, vacunos o pollos). Lo anterior impone una limitante sumamente importante a la ventana de tiempo en que estos productos pueden ser procesados y posteriormente vendidos. Por lo tanto, este tipo de empresas debe planificar muy bien sus rutinas de producción y el manejo de la información con que cuentan, con el fin de mejorar su rentabilidad [35]. En algunos casos, los insumos productivos de este tipo de empresas corresponden a piezas enteras que deben ser trozadas de alguna manera específica para así obtener productos finales. A modo de ejemplo, si se troza una pieza de pollo entero de una manera particular, se pueden obtener dos productos finales: una mitad de pollo y dos cuartos de pollo. A este tipo de problema de producción se le conoce como *Cutting Stock Problem* [4] y [17], en él se busca determinar, para cada período, la cantidad de cada uno de los productos finales a producir a través del proceso de corte o trozado de productos iniciales (insumos) y decidir cuánto almacenar de estos productos finales. Los objetivos de este tipo de problemas apuntan a minimizar las pérdidas de materia prima y los costos totales de producción. Los principales modelos y métodos para enfrentar el problema de *Cutting Stock* se discuten en [4] y [17].

Por otro lado, la naturaleza perecible de los productos que producen las empresas agroindustriales, obliga a estas empresas a intentar vender sus productos antes de que alcancen su fecha de expiración (o de caducidad). Se entiende que, pasada esa fecha, el producto pierde la totalidad de su valor llegando, incluso, a producir un costo para las empresas al tener que deshacerse de los productos que se han transformado en desperdicio. De este modo, una política adecuada de fijación dinámica de precios, que actualice periódicamente el precio de los productos finales en función de la cantidad de unidades en

inventario y su fecha de expiración, es una alternativa estudiada para generar mayores ingresos y reducir las mermas por obsolescencia [25].

El estudio combinado de problemas de producción, gestión de inventarios y políticas dinámicas de fijación de precios lleva ya más de dos décadas de desarrollo [10, 11]. Es bajo este contexto que surge la motivación por enfrentar un problema de producción del tipo Cutting Stock, en el cual existe una relación directa entre los insumos y la producción de los productos finales a través del trozado de los primeros, en conjunto con la determinación de políticas dinámicas de precios. Lo anterior, considerando un horizonte de tiempo dividido en períodos y bajo condiciones de perecibilidad de los productos finales. Esto último implica que se puede almacenar inventario de productos finales de un período a otro, pero siempre y cuando no se haya alcanzado su fecha de expiración. Todas estas decisiones se toman buscando maximizar la utilidad total que obtiene la empresa agroindustrial con respecto a una demanda que depende de manera determinística de los precios de los productos finales.

El documento se estructura de la siguiente manera. En la Sección 2 se presenta una revisión bibliográfica sobre el estado del arte sobre problemas de Cutting Stock y Pricing, incluyendo también problemas de Lot Sizing. En la Sección 3 se provee una descripción detallada del problema en estudio. En la Sección 4 se describen modelos construidos para tomar las decisiones de trozado y precio. Además, se detallan los enfoques de solución correspondientes. En la Sección 5 se resumen los principales resultados obtenidos sobre el desempeño de los dos modelos y provee un análisis de sensibilidad para el modelo que mostró un mejor desempeño en su tiempo de resolución. Por último, en la Sección 6 se presentan nuestras principales conclusiones y comentarios finales.

2. Revisión Bibliográfica

Los problemas de Cutting Stock y Lot Sizing surgen cuando existe una presión económica para producir artículos anticipadamente con respecto al período en el que serán demandados, y posiblemente vendidos, con el fin de minimizar el desperdicio que se puede generar en su proceso productivo. Sin embargo, los costos de almacenamiento asociados a la producción anticipada de artículos ejercen una presión en sentido opuesto que busca evitar tal anticipación. Cuando existe este trade-off asociado a la producción anticipada de artículos, y se cree que la aplicación de determinados patrones de corte disminuirá el desperdicio resultante en el proceso productivo, a un mayor costo de almacenamiento, entonces se está frente a una problemática que combina

dos problemas de optimización combinatorial bien conocidos en la literatura de planificación de la producción conocidos como problemas de *Cutting Stock* y *Lot Sizing* [23].

Sobre el problema de *Cutting Stock*, Gilmore y Gomory [22] proveen una de las primeras definiciones de este problema, formulando y presentando un método de generación de columnas para su resolución. Desde entonces, su enfoque metodológico ha sido utilizado por muchos investigadores. Por ejemplo, Kallrat et al. [28] y Giannelos et al. [21] describen cómo resolver problemas de *Cutting Stock* en la industria productora de papel. A través de su trabajo, los autores demuestran los beneficios que genera en la industria papelera el uso de modelos matemáticos para apoyar la toma de decisiones de producción. Cheng et al. [12], y más recientemente Cherri et al. [13], proveen una muy buena descripción del estado del arte para problemas de *Cutting Stock*.

Algunos modelos de *Cutting Stock* han sido construidos para enfrentar problemas en la industria de la carne. En particular, Albornoz et al. [3] presentan un modelo aplicado a la industria del ganado. El modelo propuesto por estos autores busca maximizar el beneficio de los productores de carne de cerdo teniendo en cuenta decisiones de producción, inventarios y la perecibilidad de los diferentes productos finales. Mediante los resultados obtenidos, los autores logran validar sus modelos y demostrar que para la industria de la carne es relevante optimizar las decisiones de corte utilizadas en su proceso productivo. En otro trabajo de este tipo, Whitaker y Cammell [40] presentan un nuevo modelo de *Cutting Stock* aplicado a la industria de la carne en Nueva Zelanda. En este trabajo, los autores formulan patrones de corte para distintas partes del animal faenado, lo cual les permite reducir significativamente la dimensionalidad del problema facilitando su resolución.

Con respecto a los problemas de *Lot Sizing*, Amorim et al. [6] nos presentan una revisión exhaustiva de los modelos de producción y reposición de productos perecibles propuestos en la literatura principalmente en la última década. En una primera instancia nos presentan diferentes definiciones de lo que se puede considerar como un producto perecible, para luego mostrar una tabla comparativa de los diferentes modelos de producción y planificación propuestos. Los mismos autores, en su trabajo [5], enfatizan la importancia de incorporar modelos de *Lot Sizing* a la hora de planificar la producción y distribución de productos perecibles, demostrando que permiten lograr una disminución significativa de los costos asociados. Por su parte, Fragkos et al. [20] proponen una descomposición temporal de los problemas de *Lot Sizing* con capacidad limitada y tiempos de setup. Los autores también describen los beneficios de este enfoque de solución, tanto desde el punto de vista de los resultados obtenidos como del uso eficiente de herramientas de resolución modernas.

Respecto a los enfoques de solución para problemas de Lot Sizing, Levi et al. [30] presentan un problema que considera múltiples productos y capacidades limitadas de producción e inventario. En su trabajo, los autores demuestran que este problema es NP-completo y proponen un enfoque basado en la solución óptima de la relajación lineal de la formulación del problema. Por su parte, Jiangtao et al. [27] consideran múltiples productos perecibles, con una capacidad de almacenamiento limitada, y describen un enfoque de solución basado en un modelo de cantidad económica de pedido. En el mismo contexto, Luo [31] describe el impacto que tienen las variaciones de precio en este tipo de problemas y Chu et al. [15] resuelven el problema de Lot Sizing para productos perecibles mediante una heurística con resultados que no están lejos del óptimo. En otro estudio, Pahl y Voß [36] concluyen que el aumento de los costos, los retrasos en las entregas, el empeoramiento de la calidad y la insatisfacción de los clientes son efectos negativos que pueden evitarse contabilizando la depreciación de los productos en el proceso productivo. En este sentido, los autores destacan la importancia de incluir la perecibilidad de los productos en las decisiones de planificación. Para mayores detalles respecto al estado del arte en problemas de Lot Sizing sugerimos revisar los trabajos de Bushuev et al. [8] y Karimi et al. [29].

En la literatura también se encuentran diversos estudios sobre el problema combinado de Cutting Stock y Lot Sizing. Por ejemplo, Gramani et al. [24] resuelven el problema combinado considerando en su formulación los costos de producción, inventario y setup, además de los costos por concepto de las mermas de los cortes. Como enfoque de solución, los autores proponen una heurística basada en relajación lagrangiana, utilizando el método del subgradiente para resolver los duales lagrangianos. Por su parte, Wu et al. [41] proponen un método de selección progresiva para resolver este tipo de problemas. Los autores muestran que los resultados obtenidos se acercan a los de la heurística lagrangiana de Gramani et al. y que a través de su enfoque de solución se obtiene un mejor desempeño que aquel obtenido mediante el uso de paquetes comerciales de optimización. En el mismo sentido, Nonås y Thorstenson [24] describen una aplicación de los modelos de Lot Sizing y Cutting Stock en la industria de placas de acero, y presentan diferentes algoritmos de resolución para este tipo de problemas. Melega et al. [34], por su parte, presentan una formulación general para el problema combinado proponiendo una integración a través de los períodos de decisión y entre los diferentes niveles de producción. Para más referencias sobre este problema combinado de Cutting Stock y Lot Sizing, sugerimos revisar el artículo publicado por Melega et al. [33], artículo en el que proveen una clasificación de la literatura existente sobre este tipo de problemas.

Desde la perspectiva de los problemas de Pricing, Chew et al. [14] presentan un modelo que permite determinar los precios óptimos para las diferentes versiones de un producto perecible de tal forma de minimizar el canibalismo entre ellas, además de sugerir la cantidad óptima de orden de nuevos productos. En la misma dirección, Abdollahpour et al. [2] presentan una revisión de diversos modelos de fijación de precios orientados a la industria agroindustrial. En su trabajo, los autores sugieren una estrategia para identificar el modelo adecuado de pricing a utilizar dadas las características de la empresa. Anjos et al. [7] presentan una familia de funciones que permiten determinar una política de pricing. Los autores también demuestran que estas políticas permiten una actualización de los precios dependiendo del comportamiento de los clientes, mejorando así el desempeño de los modelos existentes. En otros trabajos, Cataldo y Ferrer [9] muestran cómo formular y resolver un modelo para apoyar decisiones de precio combinadas con decisiones de composición de productos para empresas de televisión por cable. Por otro lado, Pérez et al. [37] muestran cómo incluir en los modelos de fijación de precios restricciones sobre la disposición a pagar de los consumidores. En dicho artículo, los autores aplican su enfoque a la industria de telecomunicaciones.

Por último, en la literatura se encuentran algunos trabajos que abordan de manera conjunta los problemas de Lot Sizing y Pricing. Por ejemplo, Abad et al. [1] presentan una modificación a los modelos que determinan la cantidad económica de pedido, la cual considera que los productos son perecibles y que se puede satisfacer demanda atrasada. Dye et al. [18] también presentan un modelo de manejo de inventarios del tipo cantidad económica de pedido, el cual permite determinar el precio óptimo de venta permitiendo la opción de crédito inter-compañías. En esta misma dirección, Sana et al. [38] y Feng et al. [19] presentan modelos de manejo de inventario y fijación de precios. Particularmente, Feng et al. consideran productos de repostería que están sujetos a perecibilidad y cuya demanda es sensible a cambios en los precios. Los autores muestran que estos dos factores repercuten en variaciones en la demanda y, por lo tanto, en la utilidad de la empresa. Finalmente, Sana et al. [39] describen un modelo combinado que considera la producción de peces y aves de corral con el fin de aprovechar las mermas de una industria para alimentar a la otra a través de productos como por ejemplo la harina de pescado.

Basados en nuestra revisión bibliográfica, podemos concluir que el problema integrado de Cutting Stock y Pricing no ha sido abordado en la literatura. En consecuencia, creemos que el desarrollo y resolución de un modelo de este tipo, con consideraciones de perecibilidad de los productos, es un aporte al estado del arte para ambos tipos de problemas. Adicionalmente, este problema

está inspirado en un caso real, como es el de producción y fijación de precios en el faenado y trozado de productos agroindustriales.

3. Descripción del Problema

Como se ha mencionado en las secciones anteriores, en este artículo se considera la problemática que enfrenta una empresa agroindustrial al momento de tomar sus decisiones de producción y fijación de precios, definiendo así un problema combinado de Cutting Stock y Pricing. Específicamente, se considera el caso de una empresa que en cada período de decisión recibe una cantidad conocida de piezas enteras y debe decidir cómo trozarlas, de manera de transformar cada una de estas piezas en productos finales. Para ilustrar lo anterior, si se considera que la pieza entera corresponde a un pollo entero recién faenado, una forma de trozar esta pieza permite producir una unidad de medio pollo, una unidad de cuarto de pollo y dos unidades de un octavo de pollo. Ahora bien, una forma alternativa de trozar esta unidad de pollo entero permite producir cuatro unidades de cuarto de pollo. A estas distintas maneras de trozar una pieza les llamaremos patrones de corte. Para efectos de la descripción y posterior formulación de este problema, asumiremos que existe un patrón de corte que mantiene la pieza entera sin trozar y que, por lo tanto, la pieza entera también corresponde a un producto final.

Para determinar el precio óptimo al que se debe ofrecer cada producto final en el mercado, se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- (i) El precio de cada producto final debe respetar ciertas reglas de factibilidad predefinidas
- (ii) El precio de cada producto final debe respetar una relación de consistencia con el precio de los demás productos finales.

Por ejemplo, para el caso (i), se podría considerar un producto que alcanza su demanda máxima en los r_{min} pesos y su demanda mínima en los r_{max} pesos. De este modo, una regla de factibilidad de precios debería garantizar que se cumpla con $r_{min} \leq p \leq r_{max}$, donde p es el precio del producto en pesos. Para el caso (ii), por ejemplo, se podría considerar que dado que una unidad de medio pollo (M) está compuesta de dos unidades de cuarto de pollo (C), entonces se debería garantizar que $p_M \leq 2p_C$.

Sobre el horizonte de tiempo considerado en la planificación, éste es dividido en unidades de tiempo de igual tamaño, las cuales llamamos períodos. De este modo, las decisiones de producción y fijación de precios se toman en

cada período. También se asume que se conoce la cantidad de unidades en inventario de cada producto final al comienzo del horizonte de planificación ($t = 0$) y el valor residual de cada unidad del producto final al finalizar el horizonte de planificación.

Los productos finales se encuentran relacionados entre sí a través del proceso de producción de los mismos, el cual corresponde a un problema de Cutting Stock. Además, es importante mencionar que la demanda por cada producto final se asume independiente de los otros productos finales, y determinística y lineal respecto al precio del producto final. Adicionalmente, dado que los productos agroindustriales son perecibles, se asume conocida la cantidad de días de vida útil para cada producto final (por ejemplo, en el caso de la industria avícola, la vida útil los productos finales es de no más de 12 días).

Sobre los costos del problema, se considera el costo de producción de los productos finales que está asociado exclusivamente al trozado de las piezas enteras y el costo de almacenamiento, asumiendo que sólo se permite guardar productos finales y que, por lo tanto, no se pueden almacenar piezas enteras de un período a otro.

En consecuencia con lo anterior, se define la siguiente notación para ser usada posteriormente en la formulación de los dos modelos que permiten abordar el problema de Cutting Stock y Pricing.

Conjuntos

T : Conjunto finito de períodos de igual tamaño en los que se divide el horizonte de planificación.

F : Conjunto finito de productos finales (o indistintamente sub-productos) que son el resultado del trozado de una pieza entera. Incluye a la pieza entera no trozada como producto final para la venta.

K : Conjunto finito de patrones de corte (formas de trozar la pieza entera).

Ω : Conjunto finito de precios factibles para los productos finales.

Índices

t, u : Índice asociado a los períodos de tiempo $t, u \in T$.

f : Índice asociado a los productos finales $f \in F$.

k : Índice asociado a los patrones de corte $k \in K$.

Parámetros

- δ : Vida útil, en días, para cada producto final.
- c_k : Costo en el que se incurre al utilizar el patrón de corte k para trozar una pieza entera.
- a_{kf} : Cantidad de producto final f que se obtiene al utilizar el patrón de corte k para trozar una pieza entera.
- q^t : Cantidad de piezas enteras que deben ser trozadas durante el período t .
- h_f^t : Costo de almacenar una unidad del producto final f desde el período t al período $t + 1$. Notar que $-h_f^{|T|}$ corresponde al valor residual de una unidad del producto final f al finalizar el horizonte de planificación.
- α_f : Máximo valor que puede alcanzar la demanda por el producto final f .
- β_f : Tasa de cambio de la demanda ante una variación unitaria en el precio del producto final f (es la sensibilidad precio-demanda).
- S_f^{0u} : Inventario inicial de producto final f con vencimiento en el período u .

En este trabajo consideramos que las demandas por los productos finales son una función de los precios de los productos finales. De este modo, $D : \mathbb{R}_+^P \rightarrow \mathbb{Z}_+^F$ está dada por $D(p) = (d_1(p), d_2(p), \dots, d_{|F|}(p))^T$ la cual está bien definida sobre el conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^F$ de *precios factibles*. Por simplicidad asumimos que las demandas e inventarios son cantidades continuas, medidas por ejemplo en kilogramos, reservando la naturaleza discreta para las cantidades de materia prima. Las demandas individuales se consideran conocidas y de la forma $d_f(p^t) = \alpha_f - \beta_f p_f^t$, con $\alpha_f, \beta_f > 0$. En otras palabras, asumimos que las demandas individuales son lineales con respecto al precio correspondiente. El parámetro α_f corresponde al valor máximo de la demanda y el parámetro β_f a la tasa con la que el consumo del producto cambia ante una variación unitaria del precio del mismo.

En el marco de las definiciones anteriores, se considera que en cada período de tiempo la empresa agroindustrial cuenta con una nueva cantidad de piezas enteras (por ejemplo, pollos faenados no trozados). Las decisiones a tomar en cada período son: cuántas de estas piezas enteras deben ser trozadas, qué patrón de corte debe ser utilizado para cada unidad, y qué precio cobrar por cada producto final. Todo lo anterior de manera de maximizar la diferencia entre los ingresos por ventas y los costos de producción y almacenamiento (los

únicos costos considerados en este problema), describiendo de esta manera la utilidad económica de la compañía agroindustrial.

A continuación se presentan dos modelos combinados de Cutting Stock, Lot Sizing y Pricing, en el contexto de productos perecibles. Para ambos modelos se asume conocida la cantidad de días de vida útil de cada producto final y se considera que los productos finales se encuentran relacionados entre sí a través del proceso de producción de los mismos (que corresponde a un problema de Cutting Stock).

4. Enfoque de Solución

El enfoque de solución está basado en la formulación del problema a través de modelos de programación no lineal entera mixta. La no linealidad del modelo está dada por la dependencia que existe entre la demanda de cada producto final y el precio del mismo. Como se menciona en la sección anterior, en este trabajo utilizaremos demandas lineales en los precios, generándose de esta manera problemas cuadráticos convexos enteros. La naturaleza entera está dada por las decisiones de cómo trozar las piezas enteras que llegan como insumo inicial. En la aplicación del enfoque construimos dos modelos diferentes, y realizamos diferentes experimentos sobre ellos para evaluar y comparar su desempeño.

En la literatura es común considerar el problema de producción como una variante del problema de Lot Sizing [16] ya que es un problema de producción e inventarios de varios productos en un horizonte finito de tiempo. En otras palabras, ya que existe un problema de “multi-product Lot Sizing” subyacente. Sin embargo, a diferencia del problema clásico de Lot Sizing, en este caso la producción no es simplemente el tamaño de un lote sino que es el resultado de las decisiones de corte de la materia prima. Además, la demanda no es fija o conocida de antemano sino que depende de la decisión de precio.

Los dos modelos construidos para enfrentar el problema descrito tienen las siguientes características. El primero utiliza variables de producción para cada período, almacenando en variables de inventario la cantidad de producto final que no fue vendida. A diferencia de este primer modelo, el segundo modelo considera variables de asignación de producción a demandas futuras. Ambos modelos utilizan la misma variable para la fijación de precios de los productos finales. El detalle y la formulación matemática de ambos modelos se presenta en las subsecciones 4.1 y 4.2, respectivamente.

4.1. Modelo con variables de producción total e inventarios

En el primer modelo se consideran variables de producción total e inventarios. En otras palabras, las variables de decisión se enfocan en la planificación de la producción en cada período. Las decisiones de fijación de precios están representadas por variables específicas las cuales son definidas para cada producto y en cada período.

Es así como las variables de decisión son:

- $x_k^t \in \mathbb{Z}_+$: cantidad de cortes tipo k a realizar en el período t .
- $s_f^{tu} \in \mathbb{R}_+$: cantidad del producto final f que vence en el período u a almacenar desde el período t al período $t + 1$.
- $d_f^{tu} \in \mathbb{R}_+$: cantidad de la demanda por el producto final f en el período t que se satisface con productos que vencen en el período u .
- $p_f^t \in \mathbb{R}_+$: precio de cada unidad de producto final f en el período t .
- $l_f^t \in \mathbb{R}_+$: cantidad de productos final f que se declara como perdida por vencimiento (obsolescencia) en el período t .

Con estas definiciones se formula el siguiente modelo, que denominamos *Problema de Cutting Stock and Pricing (CSPP)*:

$$\max \sum_{t \in T} \sum_{u=t}^{t+\delta} \sum_{f \in F} p_f^t d_f^{tu} - \sum_{t \in T} \sum_{u \geq t} \sum_{f \in F} h_f^t s_f^{tu} - \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} c_k x_k^t \quad (1)$$

s. a.

$$\sum_{k \in K} x_k^t = q^t \quad t \in T \quad (2)$$

$$s_f^{1u} = S_f^{0u} - d_f^{1u} \quad f \in F, u = 1, \dots, \delta \quad (3)$$

$$s_f^{tu} = s_f^{t-1, u} - d_f^{tu} \quad f \in F, t = 2, \dots, |T|, u = t, \dots, t + \delta - 1 \quad (4)$$

$$s_f^{t, t+\delta} = \sum_{k \in K} a_{kf} x_k^t - d_f^{t, t+\delta} \quad f \in F, t \in T \quad (5)$$

$$\sum_{u=t}^{t+\delta} d_f^{tu} = \alpha_f - \beta_f p_f^t \quad f \in F, t \in T \quad (6)$$

$$d_f^{11} = S_f^{01} - l_f^1 \quad f \in F \quad (7)$$

$$d_f^{tt} = s_f^{t-1,t} - l_f^t \quad f \in F, t = 2, \dots, |T| - 1 \quad (8)$$

$$p_f^t \leq 2p_{f+1}^t \quad f = 1, \dots, |F| - 1, t \in T \quad (9)$$

$$p \in \Omega \quad t \in T \quad (10)$$

La función objetivo busca maximizar el beneficio del productor. El primer término de la función objetivo representa los ingresos percibidos al satisfacer la demanda por ventas. A este se le restan el segundo y tercer término que representan los costos de inventario y de producción, respectivamente. La primera restricción de este modelo (2) impone que en cada período sean procesadas las unidades de materia prima (piezas enteras) recibidas. Las restricciones (3), (4) y (5) describen la relación entre los inventarios de cada período, los del período anterior y las demandas. Estas restricciones aseguran que los productos del inventario sólo se puedan usar hasta su período de vencimiento. La restricción (3) modela la dinámica del inventario del primer período tomando en cuenta la demanda y los vencimientos del inventario inicial. Por otra parte, la restricción (4) modela este mismo balance entre los inventarios y la demanda tomando en cuenta los distintos vencimientos que puede tener el inventario. La restricción (5) modela la dinámica de los inventarios de los productos finales tomando en cuenta la demanda en este balance. La restricción (6) impone que la suma de las demandas parciales sean igual a la demanda total de cada período. Las restricciones (7) y (8) relacionan las demandas parciales con los inventarios y las pérdidas por caducidad que se pueden tener en cada período. Para finalizar, la restricción (9) simplemente impone una relación de precio para evitar el canibalismo entre productos y la restricción (10) garantiza que los precios fijados cumplan con las políticas específicas de precio que la empresa ha determinado para cada uno de ellos.

4.2. Modelo con variables de producción en una fecha para consumo en otra fecha

Un modelo alternativo al anterior, considera producciones asignadas a demandas específicas en el futuro y sus implicancias en el precio [26]. De este modo, las variables de decisión sobre la producción definen una red de flujo en la que cada unidad producida es inmediatamente asignada a una demanda que se desea satisfacer en un período próximo.

Es así como las variables de decisión son:

- $x_k^t \in \mathbb{Z}_+$: cantidad de cortes tipo k a realizar en el período t .
- $w_f^{st} \in \mathbb{Z}_+$: cantidad de productos finales f producidos en el período s para satisfacer la demanda en el período t .

- $w_f^{0ts} \in \mathbb{R}_+$: cantidad de productos finales f del inventario inicial que vence en el período s destinada a satisfacer la demanda en el período t .
- $p_f^t \in \mathbb{R}_+$: precio de cada unidad de producto final f en el período t .
- $l_f^t \in \mathbb{R}_+$: cantidad de productos finales f que se declara como perdida por vencimiento en el período t .

Con estas definiciones se formula el siguiente modelo, que denominaremos *Problema de Cutting Stock y Pricing en Flujo (CSPFP)*:

$$\begin{aligned} \text{máx} \sum_{t \in T} \sum_{f \in F} p_f^t (\alpha_f - \beta_f p_f^t) - \sum_{t \in T} \sum_{s \leq t} \sum_{u > t} \sum_{f \in F} h_f^t w_f^{su} \\ - \sum_{t \in T} \sum_{s=t} \sum_{f \in F} h_f^t w_f^{0ts} \end{aligned} \tag{11}$$

s. a.

$$\sum_{k \in K} x_k^t = q^t \quad t \in T \tag{12}$$

$$\sum_{k \in K} a_{kf} x_k^t = \sum_{u=t}^{t+\delta} w_f^{tu} \quad f \in F, t \in T \tag{13}$$

$$l_f^t + \alpha_f - \beta_f p_f^t = \sum_{u=t}^{\delta} w_f^{0tu} + \sum_{s=1}^t w_f^{st} \quad f \in F, t = 1, \dots, \delta \tag{14}$$

$$l_f^t + \alpha_f - \beta_f p_f^t = \sum_{s=t-\delta}^t w_f^{st} \quad f \in F, t = \delta + 1, \dots, |T| \tag{15}$$

$$\sum_{u \leq \delta} \sum_{t \leq u} w_f^{0tu} = S_f^0 \quad t \in T \tag{16}$$

$$l_f^t \leq \sum_{u \leq t} w_f^{0ut} \quad f \in F, t = 1, \dots, \delta \tag{17}$$

$$l_f^t \leq w_f^{t-\delta, t} \quad f \in F, t = \delta + 1, \dots, |T| \tag{18}$$

$$p_f^t \leq 2 p_{f+1}^t \quad f \in F, t \in T \tag{19}$$

$$p \in \Omega^T \quad t \in T \tag{20}$$

La función objetivo, igual que en el modelo anterior, maximiza la diferencia entre los ingresos por ventas y los costos de inventario y de producción,

respectivamente. La restricción (12) impone que en cada período sean procesadas las unidades de materia prima programadas. La restricción (13) asigna la producción de productos finales a los períodos en que se van a usar para satisfacer las demandas. Las restricciones (14) y (15) modelan la satisfacción de la demanda usando los productos finales que se han asignado para cada fecha. Esta restricción también garantiza la consistencia de los inventarios y de los productos perdidos por caducidad. La restricción (14) contempla el caso del principio del horizonte de planificación cuando existen productos disponibles en el inventario inicial mientras que la restricción (15) corresponde a la segunda parte del horizonte donde ya han caducado todas las existencias iniciales. La restricción (16) asegura que el inventario inicial S_f^0 del producto final f es consumido antes de su caducidad. Las restricciones (17) y (18) establecen un límite superior al nivel de pérdidas por caducidad que se pueden tener en cada período. La restricción (19) establece una relación entre los precios de los productos para evitar el canibalismo entre ellos. Finalmente, la restricción (20) garantiza que los precios fijados cumplen con las políticas específicas de precio que la empresa ha determinado para cada uno de ellos.

5. Experimentos computacionales

Por temas de simplicidad, dentro de esta sección llamaremos Modelo 1 al modelo CSPP (presentado en la Sección 4.1) y Modelo 2 al modelo CSPFP (presentado en la Sección 4.2). A continuación describimos dos experimentos computacionales realizados sobre estos modelos. Los experimentos fueron realizados con el propósito de: (1) comparar los tiempos de ejecución de ambos modelos al resolver a optimalidad las mismas instancias; (2) analizar la evolución de los precios e inventarios óptimos a lo largo del horizonte de planificación; y (3) determinar el impacto de los inventarios iniciales en la evolución de los precios óptimos.

5.1. Instancias de prueba

Los casos de prueba contruidos para este trabajo se basan en el problema práctico que lo motiva, la planificación del trozado de aves para la venta de carne de pollo.

Se definió que una unidad de insumo podía ser dividida en partes correspondientes a los productos finales: “entero”, “medio”, “cuarto”, “octavo” y “dieciseisavo” de pollo. Con esto se construyeron dos familias de instancias, unas que incluyen hasta los octavos de pollo y otras que incluyen todos los productos finales. Se consideraron todas las combinaciones posibles para definir

los patrones de corte. En la Tabla 1 se muestran los valores de los parámetros a_{kf} correspondientes a la cantidad de productos finales que se obtiene al aplicar los patrones de corte antes definidos. En las tablas 2 y 3 se presentan los costos c_k para cada uno de estos patrones de corte. La Tabla 4 presenta los valores utilizados para los parámetros con que se construyen las funciones de demanda de los productos finales y el valor de los costos de inventario.

Se estableció para este caso una vida útil de 14 períodos ($\delta = 14$) y que se deben procesar $q_t = 7200$ unidades de piezas enteras en cada uno de los períodos del horizonte de planificación. Respecto a los inventarios iniciales, se consideran los inventarios presentados en la Tabla 5.

Tabla 1: Costos y unidades obtenidas con cada patrón de corte para patrones que no incluyen dieciseisavos de pollo.

Productos	Patrones									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Entero	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Medio	0	0	0	0	0	1	1	1	2	0
Cuarto	0	1	2	3	4	0	1	2	0	0
Octavo	8	6	4	2	0	4	2	0	0	0
Costo	355	352.5	350	347.5	345	323.5	321	319	292.5	240

Tabla 2: Costos y unidades obtenidas con cada patrón de corte para patrones que incluyen dieciseisavos de pollo (primera parte).

Productos	Patrones										
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Entero	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Medio	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
Cuarto	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0
Octavo	0	1	0	2	4	0	0	3	2	1	5
Dieciseisavo	16	14	12	12	8	8	8	10	8	6	6
Costo	480	465	447.5	450	420	415	385	435	417.5	370	405

Tabla 3: Costos y unidades obtenidas con cada patrón de corte para patrones que incluyen dieciseisavos de pollo (segunda parte).

Productos	Patrones										
	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Entero	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Medio	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
Cuarto	1	2	1	0	1	0	0	0	2	1	1
Octavo	3	1	0	2	4	6	7	3	3	1	5
Dieciseisavo	6	6	4	4	4	4	2	2	2	2	2
Costo	402.5	400	352.5	355	387.5	390	375	340	370	337.5	372.5

Tabla 4: Costos de inventario y parámetros de las funciones de demanda por productos finales.

Productos	Costo de inventario	Demanda	
		α_f	β_f
Entero	200	20000	15
Medio	145	21000	20
Cuarto	87.5	23500	25
Octavo	45	25000	35
Dieciseisavo	30	27500	40

Tabla 5: Inventarios iniciales según producto y vida útil remanente. No hay productos en inventario con más de 7 períodos de vida útil remanente.

Productos	Períodos de vida útil remanente						
	1	2	3	4	5	6	7
Entero	1500	2000	2500	3000	3500	3500	3500
Medio	1500	2000	2500	3000	3500	3500	3500
Cuarto	1500	2000	2500	3000	3500	3500	3500
Octavo	1500	2000	2500	3000	3500	3500	3500
Dieciseisavo	1500	2000	2500	3000	3500	3500	3500

5.2. Resultados

Los experimentos fueron realizados en un computador con procesador Intel Core i5 de 1.6GHz con 4GB de RAM y sistema operativo Windows 10. Para la implementación computacional se utilizó el lenguaje Python 3.6. Los modelos fueron resueltos utilizando Gurobi 8.0 con una condición de parada de un *gap* relativo menor a 10^{-6} .

5.2.1. Tiempos de solución

Para comparar el desempeño de ambos modelos se analizaron los tiempos de solución para instancias de diferente tamaño definidas por la duración del horizonte de planificación. Se consideraron horizontes de planificación de 30 hasta 180 períodos de duración.

Las figuras 1 y 2 muestran los tiempos de solución para ambos modelos y las curvas de tendencia de estos tiempos en función del tamaño de las instancias resueltas. En la Figura 1 se consideran las instancias sin incluir dieciseisavos de pollo como producto final, mientras que en la Figura 2 se consideran todos los productos finales.

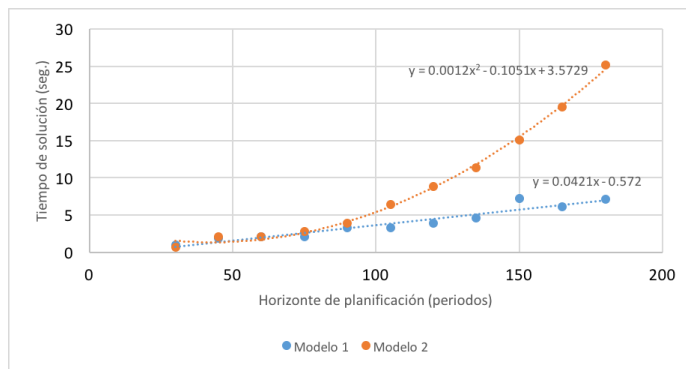


Figura 1: Comparación de tiempos de solución para instancias sin dieciseisavos de pollo como producto final.

De las figuras 1 y 2 se puede apreciar que el tiempo de solución del Modelo 1 crece aproximadamente de manera lineal al aumentar el tamaño de las instancias, mientras que el tiempo de solución del Modelo 2 lo hace de manera cuadrática. Esto sugiere que para instancias de mayor tamaño es más conveniente utilizar el Modelo 1. Como ambos modelos resuelven las instancias de prueba a optimalidad, los experimentos reportados en las próximas subsecciones fueron realizados utilizando solamente el Modelo 1 ya que requiere menos tiempo de ejecución.

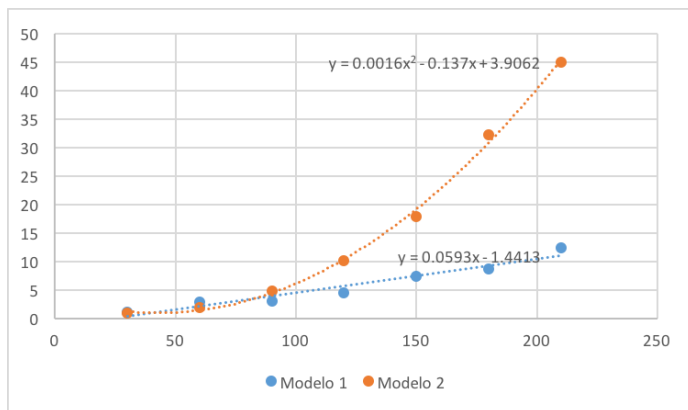


Figura 2: Comparación de tiempos de solución para instancias con dieciseisavos de pollo como producto final.

5.2.2. Consumo de inventario inicial y estabilización de precios

Para entender las características de las decisiones óptimas, se analizó la evolución del inventario a lo largo del horizonte de planificación. En prácticamente todas las instancias evaluadas el comportamiento fue similar.

A modo ilustrativo, la Figura 3 muestra la evolución de los inventarios para la instancia sin dieciseisavos de pollo como producto final, considerando un horizonte de 60 periodos. Se observa en la figura que luego de una etapa inicial, donde los inventarios iniciales de los productos finales se van consumiendo, la planificación óptima considera inventarios nulos para todos los productos.

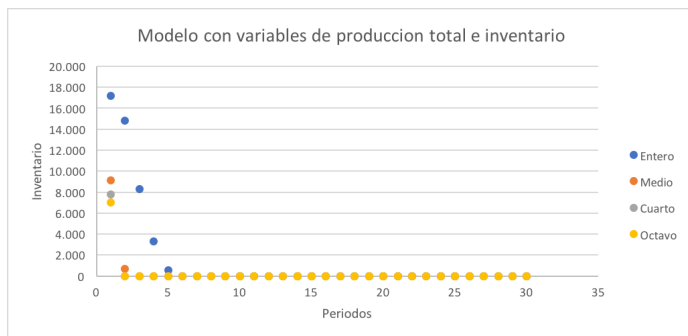


Figura 3: Evolución de los niveles de inventario óptimo a lo largo del horizonte de planificación.

Durante los primeros períodos se debe almacenar inventario debido a que existe inventario inicial que se intenta vender lo antes posible (por su perecibilidad próxima), el cual no se pueden consumir inmediatamente. Para conseguir que los inventarios se reduzcan rápidamente, los precios fijados en los prime-

ros períodos parten en un nivel “bajo”. Los precios luego suben hasta alcanzar los niveles óptimos fijos (más altos que los precios iniciales) que acompañan al fenómeno de los inventarios nulos en los períodos finales del horizonte. La Figura 4 muestra la evolución de los precios óptimos para la misma instancia.

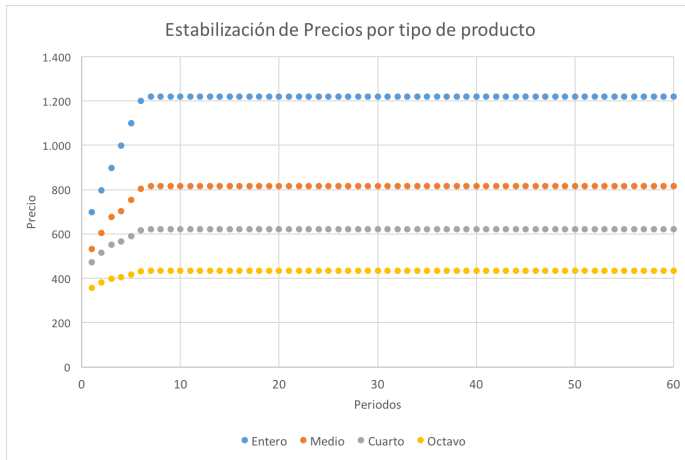


Figura 4: Estabilización de precios por tipo de producto final.

Dado el impacto del inventario inicial en los precios de los primeros períodos, se realizó un análisis para evaluar su influencia en la estabilización de los precios óptimos determinados por el modelo. El gráfico presentado en la Figura 5 permite observar que a medida que aumenta la cantidad de períodos de duración del inventario inicial, el período en el cual se estabilizan los precios también aumenta.

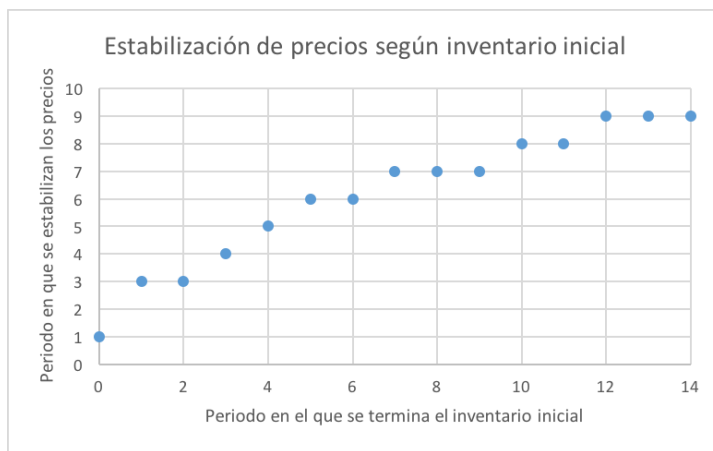


Figura 5: Estabilización de los precios según nivel de inventario inicial.

Es interesante destacar que en todas las instancias analizadas el inventario óptimo de los productos finales se hace cero a partir de un período específico en adelante, lo que también estabiliza el precio y la producción en algún periodo. Por ejemplo, cuando el inventario inicial se acaba en los primeros períodos (por ejemplo, entre el periodo 0 y el período 5) es posible observar que los precios se estabilizan en el período en que se termina el inventario o en el período posterior. Sin embargo, cuando el inventario inicial se acaba entre los períodos 6 y 14, los precios se estabilizan antes de que se acabe el inventario inicial. Esto se observó para distintos valores del intervalo de perecibilidad.

6. Conclusiones y comentarios finales

En este trabajo consideramos un problema de planificación de abastecimiento y trozado de pollos con fijación óptima y dinámica de precios, en el cual las principales decisiones son sobre cómo trozar las piezas enteras (insumo), cómo conservar los productor finales y qué precios colocarles. En las instancias analizadas se consideró un horizonte de planificación de 30 a 180 días.

Se propone un enfoque de solución basado en modelos de programación no lineal entera mixta, mediante los cuales se busca resolver en forma simultánea los problemas de *Cutting Stock* y *Lot Sizing* y *Pricing* bajo condiciones de perecibilidad de los productos finales. Lo anterior, con el fin de maximizar el beneficio de los productores. El primer modelo se basa en variables de producción total e inventario. En otras palabras, a través de este modelo se buscar decidir en cada período cuánto producir y cuánto de la demanda satisfacer, transformando lo que sobre en inventario. Este modelo considera las decisiones de cada período como un problema “aislado”, en el que dadas las condiciones existentes se decide cómo satisfacer la demanda. El segundo modelo se basa en variables de producción en un período para consumo futuro. Con este tipo de variables se define una ventana productiva, determinada por la vida útil de los productos, la que permite considerar lo que pasa en el futuro.

Al contrario de lo que sucede en el caso de problemas de *Lot Sizing* lineales clásicos (i.e., con formulaciones lineales), los modelos con variables de producción en una fecha para consumo en otra fecha son menos eficientes en términos de tiempo de resolución que los modelos con variables de producción total e inventarios. Esto se puede deber a que las soluciones del problema estudiado no necesariamente corresponden a vértices del conjunto factible, dada la naturaleza cuadrática de la función objetivo. Nuestros resultados parecen indicar

que el menor número de variables y restricciones en el primer modelo (CSPP) hacen que éste se pueda resolver computacionalmente en menor tiempo. Esta observación está basada en un número reducido de instancias de prueba y por lo tanto debe ser confirmada con experimentos más extensivos. Los resultados obtenidos sugieren también que una parte importante de la optimización consiste en reducir y eliminar rápidamente el inventario inicial y de esta forma entrar en un período estacionario de inventarios nulos y precios fijos.

Las extensiones naturales al problema conjunto, con el fin de acercarlo más al problema real de planificación, son: (1) la incorporación de incertidumbre en la demanda a través de un modelo de programación dinámica estocástica; y (2) la incorporación de distintas dimensiones temporales en la toma de decisiones de precio. Por ejemplo, muchas veces se definen “precios de lista” para ciertos intervalos de tiempo (por ejemplo, una o dos semanas) los que sólo pueden ser modificados levemente período a período.

Referencias

- [1] P. L. Abad. Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability, finite production and partial backordering and lost sale. *European Journal of Operational Research*, 144(3):677–685, 2003.
- [2] M. Abdollahpour, A. Rusta, M. R. Hamidizadeh, y G. Khorshidi. Optimal pricing policies for perishable products. *Journal UMP Social Sciences and Technology Management*, 3(3):219–226, 2015.
- [3] V. M. Albornoz, M. Gonzalez-Araya, M. C. Gripe, S. V. Rodriguez, y E. J. Treviño. An optimization model for planning operations in a meat packing plant. In *International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*, páginas 136–146. Springer, 2015.
- [4] P. Amorim, B.-F. Meyr, F. Toledo, C. Márcio, y B. Almada-Lobo. Lot sizing versus batching in the production and distribution planning of perishable goods. *International Journal of Production Economics*, 146:208–218, 2013.
- [5] P. Amorim, H. Meyr, C. Almeder, y B. Almada-Lobo. Managing perishability in production-distribution planning: a discussion and review. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 25(3):389–413, 2013.
- [6] M. F. Anjos, R. C. Cheng, y C. S. Currie. Optimal pricing policies for perishable products. *European Journal of Operational Research*, 166(1):246–254, 2005.

- [7] H. Ben Amor y J. Valério de Carvalho. *Cutting Stock Problems*, páginas 131–161. Springer US, Boston, MA, 2005.
- [8] M. A. Bushuev, A. Guiffrida, M. Jaber, y M. Khan. A review of inventory lot sizing review papers. *Management Research Review*, 38(3):283–298, 2015.
- [9] A. Cataldo y J.-C. Ferrer. Optimal pricing and composition of multiple bundles: A two-step approach. *European Journal of Operational Research*, 259(2):766–777, 2017.
- [10] L. M. Chan, Z. M. Shen, D. Simchi-Levi, y J. L. Swann. Coordination of pricing and inventory decisions: A survey and classification. In *Handbook of quantitative supply chain analysis*, páginas 335–392. Springer, 2004.
- [11] X. Chen y D. Simchi-Levi. Pricing and inventory management. páginas 784–824. Citeseer, 2011.
- [12] C. Cheng, B. Feiring, y T. Cheng. The cutting stock problem—a survey. *International Journal of Production Economics*, 36(3):291–305, 1994.
- [13] A. C. Cherri, M. N. Arenales, H. H. Yanasse, K. C. Poldi, y A. C. G. Viana. The one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers—a survey. *European Journal of Operational Research*, 236(2):395–402, 2014.
- [14] E. P. Chew, C. Lee, R. Liu, K.-s. Hong, y A. Zhang. Optimal dynamic pricing and ordering decisions for perishable products. *International Journal of Production Economics*, 157:39–48, 2014.
- [15] L. Y. Chu, V. N. Hsu, y Z.-J. M. Shen. An economic lot-sizing problem with perishable inventory and economies of scale costs: Approximation solutions and worst case analysis. *Naval Research Logistics (NRL)*, 52:536–548, 2005.
- [16] K. Copil, M. Wörbelauer, H. Meyr, y H. Tempelmeier. Simultaneous lotsizing and scheduling problems: a classification and review of models. *OR spectrum*, 39(1):1–64, 2017.
- [17] M. Delorme, M. Iori, y S. Martello. Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms. *European Journal of Operational Research*, 255(1):1–20, 2016.
- [18] C.-Y. Dye y L.-Y. Ouyang. A particle swarm optimization for solving joint pricing and lot-sizing problem with fluctuating demand and trade credit financing. *Computers & Industrial Engineering*, 60(1):127–137, 2011.

- [19] L. Feng, Y.-L. Chan, y L. E. Cárdenas-Barrón. Pricing and lot-sizing policies for perishable goods when the demand depends on selling price, displayed stocks, and expiration date. *International Journal of Production Economics*, 185:11–20, 2017.
- [20] I. Fragkos, Z. Degraeve, y B. De Reyck. A horizon decomposition approach for the capacitated lot-sizing problem with setup times. *INFORMS JOURNAL on Computing*, 28(3):465–482, 2016.
- [21] N. Giannelos y M. Georgiadis. A model for scheduling cutting operations in paper-converting processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 40(24):5752–5757, 2001.
- [22] P. C. Gilmore y R. E. Gomory. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations research*, 9(6):849–859, 1961.
- [23] M. Gramani y P. França. The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. *European Journal of Operational Research*, (1):509–521, 2006.
- [24] M. C. N. Gramani, P. M. França, y M. Arenales. A lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem. *International Journal of Production Economics*, 119(2):219–227, 2009.
- [25] A. Herbon y E. Khmelnitsky. Optimal dynamic pricing and ordering of a perishable product under additive effects of price and time on demand. *European Journal of Operational Research*, 260(2):546–556, 2017.
- [26] B. Herskovic. Networks in production: Asset pricing implications. *Browser Download This Paper*, 2015.
- [27] M. Jiangtao, C. Guimei, F. Ting, y M. Hong. Optimal ordering policies for perishable multi-item under stock-dependent demand and two-level trade credit. *Applied Mathematical Modelling*, 38(9):2522–2532, 2014.
- [28] J. Kallrath, S. Rebennack, J. Kallrath, y R. Kusche. Solving real-world cutting stock-problems in the paper industry: Mathematical approaches, experience and challenges. *European Journal of Operational Research*, 238(1):374–389, 2014.
- [29] B. Karimi, S. F. Ghomi, y J. Wilson. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, 31(5):365–378, 2003.
- [30] R. Levi, A. Lodi, y M. Sviridenko. Approximation algorithms for the capacitated multi-item lot-sizing problem via flow-cover inequalities. *Mathematics of Operations Research*, 33(2):461–474, 2008.

- [31] W. Luo. An integrated inventory system for perishable goods with backordering. *Computers & Industrial Engineering*, 34(3):685–693, 1998.
- [32] N. Ma, Y. Liu, Z. Zhou, y C. Chu. Combined cutting stock and lot-sizing problem with pattern setup. *Computers & Operations Research*, 95:44–55, 2018.
- [33] G. M. Melega, S. A. de Araujo, y R. Jans. Classification and literature review of integrated lot-sizing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, 2018.
- [34] G. M. Melega, S. A. de Araujo, y R. Jans. Classification and literature review of integred lot sizing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, 271(1):1–19, 2018.
- [35] M. Noghabai. A study on the manufacturing planning and control in a beef cutting plant of a swedish company. *Engineering Costs and Production Economics*, 17(1-4):43–53, 1989.
- [36] J. Pahl y S. Voß. Discrete lot-sizing and scheduling including deterioration and perishability constraints. In *Advanced manufacturing and sustainable logistics*, páginas 345–357. Springer, 2010.
- [37] J. Perez, H. Lopez-Ospina, A. Cataldo, y J.-C. Ferrer. Pricing and composition of bundles with constrained multinomial logit. *International Journal of Production Research*, 54(13):3994–4007, 2016.
- [38] S. S. Sana. Optimal selling price and lotsize with time varying deterioration and partial backlogging. *Applied Mathematics and Computation*, 217(1):185–194, 2010.
- [39] S. S. Sana. Optimal pricing strategy for livestock of fishery and poultry. *Economic Modelling*, 29(4):1024–1034, 2012.
- [40] D. Whitaker y S. Cammell. A partitioned cutting-stock problem applied in the meat industry. *Journal of the Operational Research Society*, 41(9):801–807, 1990.
- [41] T. Wu, K. Akartunali, R. Jans, y Z. Liang. Progressive selection method for the coupled lot-sizing and cutting-stock problem. *INFORMS Journal on Computing*, 29(3):523–543, 2017.