El fixture de las clasificatorias sudamericanas para la copa mundial de fútbol mediante programación entera.

Guillermo Durán*
Mario Guajardo**

Resumen

La Confederación Sudamericana de Fútbol ha utilizado el mismo fixture para las clasificatorias de los cuatro mundiales ocurridos entre 2002 y 2014. El fixture corresponde a un formato de doble round robin espejado para 10 equipos. Cada fecha impar es calendarizada muy próxima a la fecha par siguiente, por lo que el torneo se compone de nueve *doble-fechas*. Como resultado de un proyecto motivado por la Asociación de Fútbol de Chile, en este artículo estudiamos el fixture actual y develamos una serie de desventajas. Para mejorarlo, proponemos un enfoque de programación lineal entera que considera una serie de criterios, incluyendo ubicación de los breaks, justicia deportiva y secuencias de viajes, además de conservar el formato doble round robin espejado actual. Mientras que para dicho formato el mínimo número de breaks de visita en doble-fechas es ocho, desarrollamos también un nuevo formato *casi-espejado* que presenta el atractivo de llevar el número de estos breaks a cero.

Palabras clave: deportes, fixture, fútbol, Mundial, clasificatorias, programación entera.

*Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile, República 701, Santiago 8320000, Chile . Departamento de Matemática e Instituto de Cálculo, FCEyN, Universidad de Buenos Aires; and CONICET, Buenos Aires C1428EGA, Argentina

**Department of Business and Management Science, NHH Norwegian School of Economics, N-5045 Bergen, Norway

1. Introducción

La Copa del Mundo FIFA es el torneo más importante del fútbol mundial. Su fase final se disputa cada 4 años y atrae la atención de millones de espectadores, sponsors y prensa. El torneo reúne a equipos nacionales de las seis confederaciones que agrupa la FIFA: AFC (Asia), CAF (África), Concacaf (Norteamérica, Centroamérica y Caribe), Conmebol (Sudamérica), OFC (Oceanía) y Uefa (Europa). El torneo se compone de dos fases principales: las clasificatorias y la fase final. En las clasificatorias, los equipos de una misma confederación compiten por lograr uno de los cupos de su confederación para la fase final. Estos partidos son jugados en sus respectivas zonas continentales, durante un período que se inicia unos 3 años antes y finaliza a 1 año de la fase final. El número de selecciones que clasifican a esta fase final depende de cada confederación, siendo Sudamérica la que proporcionalmente tiene más cupos: 4.5 sobre 10 equipos nacionales participantes en las clasificatorias (4.5 significa 4 cupos directos y un quinto que se disputa en un repechaje con una selección de otra confederación). En total, 204 selecciones de las asociaciones miembros de la FIFA compiten en las clasificatorias. En la fase final, 32 selecciones disputan por el título mundial en una competición de un mes jugada en una serie de sedes habitualmente de un único país. Esta fase es la cita monodeportiva que acapara la mayor atención mundial. En sus más recientes ediciones, la asistencia de público alcanzó los 3.18 millones en Sudáfrica 2010, y poco más de 3.43 millones en Brasil 2014.

En este artículo proponemos un enfoque de programación lineal entera para la programación de partidos de la fase clasificatoria de la Conmebol. Esta confederación ha utilizado el mismo fixture de partidos en los cuatro mundiales realizados entre 2002 y 2014. La repetición del mismo fixture ha motivado varias críticas, especialmente de aquellos países que no han logrado clasificar a todos o varios de estos mundiales. Nuestro trabajo, en efecto, fue motivado por un proyecto de colaboración con la Asociación Nacional de Fútbol Profesional de Chile, que tras la eliminación de su selección para los mundiales 2002 y 2006, nos solicitó desarrollar una propuesta de fixture para el mundial 2010.

Disputada por 10 equipos, las clasificatorias sudamericanas se juegan en un formato de doble round robin espejado, con la particularidad de que cada fecha impar es seguida muy de cerca en el calendario de la siguiente fecha par. El torneo consta entonces de 9 *doble-fechas*. Esto motiva que sea muy relevante incluir secuencias de partidos balanceados para cada uno de los equipos en cada uno de estas doble-fechas. Primero nos centramos en desarrollar una propuesta que cumpla con el formato usual de un fixture doble round robin espejado, a la vez minimizando el número de breaks de visita en doble-fechas (dado que se espera que la mayor parte de las veces cada equipo juegue un partido de local y uno de visita en cada doble-fecha). Además incorporamos una serie de criterios, incluyendo justicia deportiva y mejores secuencias de viajes para los equipos. En una segunda propuesta, desarrollamos un nuevo formato de fixture que llamamos *casi-espejado*. Este fixture tiene la atractiva característica de eliminar todos los breaks en las doble-fechas, por lo tanto, deja a todos los equipos con un partido de local y uno de visita en cada par de fechas cercanas entre sí en el calendario.

La aplicación de programación entera para la programación de fixtures deportivos se ha intensificado notablemente en los últimos años.

Una serie de reviews recientes dan cuenta del incremento de literatura en esta y otras técnicas de sports scheduling [24, 31, 19, 26]. Particularmente en fútbol, el uso de sports scheduling en ligas del mundo real ha sido reportado en varios trabajos: Holanda [29], Austria y Alemania [2], Chile [7, 8], Dinamarca [23], Bélgica [16], Noruega [14], Honduras [13], Brasil [27] y Ecuador [25]. A pesar del éxito de estas varias aplicaciones en ligas de fútbol, a nuestro conocimiento este es el primer artículo de sports scheduling enmarcado en el contexto de la Copa del Mundo FIFA. Más aun, la literatura general de Investigación de Operaciones en la Copa del Mundo es escasa salvo unas pocas excepciones enfocadas en la predicción de resultados [10, 20, 30].

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2, resumimos las características principales de las clasificatorias sudamericanas. En la Sección 3 definimos condiciones y criterios para este torneo y los modelamos mediante programación entera, respetando el formato espejado del fixture actual. En la Sección 4 desarrollamos el enfoque de fixture casi-espejado. Nuestras conclusiones están contenidas en la Sección 5.

2. Antecedentes

Conmebol es la confederación encargada de organizar las clasificatorias sudamericanas para el Mundial. Las selecciones de los 10 países de la región participan en esta eliminatoria: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Ecuador, Paraguay, Perú, Uruguay y Venezuela. Tres de estas selecciones están actualmente rankeadas entre las mejores cinco de toda la historia de los mundiales. Estas son Brasil (5 títulos), Argentina (2 títulos) y Uruguay (2 títulos). En suma, estos títulos dotan a la Conmebol con nueve del total de 20 copas mundiales jugadas entre 1930 y 2014.

La clasificatoria sudamericana consiste en un torneo round robin de dos rondas espejado. Esto es, los 10 equipos juegan todos contra todos dos veces a lo largo de 18 fechas de cinco partidos cada una. En las nueve fechas que componen la primera mitad del torneo, los equipos juegan todos contra todos una vez, mientras que en la segunda mitad el orden en que se enfrentan los pares de equipos es el mismo que en la primera, pero con las localías invertidas. En total, se juegan 90 partidos, programados en un intervalo de tiempo de aproximadamente dos años. Los cuatro primeros equipos al cabo de este torneo clasifican directamente a la fase final del Mundial. El quinto equipo clasifica para un repechaje contra un equipo de otra confederación (que puede ser de Concacaf, AFC u OFC). Se dice entonces que la Conmebol cuenta con 4.5 cupos para la fase final del Mundial. En particular, para el Mundial de 2014, a estos 4.5 cupos se adicionó el de Brasil que clasificó automáticamente por ser país organizador. Dado que Uruguay superó en el repechaje a Jordania, la fase final del Mundial 2014 contó con 6 equipos de la Conmebol.

El fixture utilizado para las clasificatorias ha sido el mismo para los tres mundiales realizados entre 2002 y 2010. Para el Mundial 2014, dado que Brasil no jugó las clasificatorias, el fixture siguió siendo el mismo con la excepción de que cada fecha el equipo que debiá enfrentar a Brasil quedó libre.

Una de las particularidades importantes de este doble round robin es que las 18 fechas del fixture son calendarizadas de tal manera que toda fecha par es jugada unos 3 ó 4 días después que una fecha impar. Existen entonces nueve pares de fechas cercanas en que el torneo es calendarizado. Nos referiremos a cada uno de estos pares como *doble-fecha*. Por ejemplo, la primera doble-fecha de las clasificatorias al Mundial 2010 consistió de la primera fecha de partidos, jugados entre el 13 y 14 de Octubre de 2007, y la segunda fecha de partidos, jugados entre el 16 y 17 de Octubre de 2007. Por el contrario, suele haber un período más prolongados entre una fecha par y la siguiente fecha impar, que puede ir desde uno a varios meses. Por ejemplo, la segunda doble-fecha de las clasificatorias 2010 comenzó con la tercera fecha de partidos, jugados entre el 17 y 18 de Noviembre de 2007, esto es, un mes después de la segunda fecha. Un motivo principal para la calendarización en doble-fechas es proveer que aquellos jugadores que actúan en ligas de otros continentes (los mejores usualmente en las ligas top de Europa) puedan jugar dos partidos en un solo viaje a Sudamérica. Es la propia FIFA quien ha motivado este tipo de calendarización, no sólo para Sudamérica, sino que también para las clasificatorias de otras confederaciones.

2.1. Fixture actual

El fixture actual de las clasificatorias sudamericanas fue desarrollado para la Copa Mundial 2002 por una empresa peruana llamada *Data Sport*, de acuerdo a lo informado por artículos en la prensa peruana (La Primera, 2010;

Gilardi, 2013). A nuestro conocimiento, no existe documentación oficial que detalle cómo y mediante qué criterios fue construido este fixture. [15] sugiere que el fixture fue construido con una serie de características favorables para Perú, tras su no clasificación al mundial de Francia 1998. En su artículo de prensa, comenta que Perú "optó abrir la eliminatoria ante Paraguay, al cual se le ha ganado en tres de cuatro ocasiones... y cerrar ante Bolivia, el rival idóneo para cualquier selección que quiera culminar un certamen con el pie derecho... . Brasil y Argentina han sido visitantes contra Perú en la primera rueda y, sobre el final, a Perú le tocó enfrentarse a una Argentina sobre el papel clasificada..." En efecto, todos estas características son una realidad del fixture actual de las eliminatorias, ilustrado en la Tabla 1. Paradójicamente, Perú no ha clasificado a ninguno de los cuatro mundiales en que se ha usado este fixture. La frustración de la asociación peruana la ha motivado a realizar una nueva propuesta para el Mundial de Rusia 2018. Esta propuesta busca modificar el fixture actual utilizando un sorteo, sin descartar evaluar también la forma de disputa, sea todos contra todos o en grupos [12, 4].

Otras características a destacar del fixture actual son las programaciones de partidos de Argentina y Brasil, que parecen favorecerlos. Argentina comienza la clasificatoria contra 3 rivales de los considerados débiles (aunque el presente de Chile ha ido modificando esta consideración), 2 de ellos de local. No viaja a la altura (Bolivia o Ecuador, los partidos que históricamente mas complican a la selección argentina) en la primera rueda y juega 5 de los 9 partidos de esa primera ronda en condición de local. Es decir, una primera rueda ideal para terminarla habitualmente holgado en la clasificación. Brasil tampoco viaja a la altura en la primera rueda y cierra la clasificatoria contra los mismos 3 adversarios débiles contra los que empieza Argentina, 2 de ellos de local en la segunda ronda (un cierre sencillo por si precisa aún puntos a esa altura del torneo, incluyendo un partido difícil en la altura de La Paz pero contra una Bolivia probablemente ya eliminada). Además, ni Argentina ni Brasil tienen breaks a lo largo de toda la clasificatoria. Parece difícil suponer que estas características salientes del fixture son producto de algún tipo de sorteo. Cabe destacar que tanto Argentina como Brasil han clasificado a todas las fases finales de los 4 últimos mundiales con comodidad, con excepción de Brasil en 2002 y de Argentina en 2010, que lograron su clasificación en la última fecha. Probablemente la causa de esto no sea solamente la programación, pero sin dudas la misma ha colaborado.

Una frustración similar a la expresada para Perú experimentó la Asociación Nacional de Fútbol Profesional de Chile (ANFP) luego de las eliminaciones a los mundiales de 2002 y 2006. Estas dos eliminaciones consecutivas motivaron a la dirigencia de la ANFP a sugerirnos elaborar una propuesta de fixture para

Cuadro 1: Primera mitad del fixture actual de las clasificatorias sudamericanas para el Mundial.

Team	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	CHI	@VEN	BOL	@COL	ECU	@BRA	PAR	@PER	URU
BOL	@URU	COL	@ARG	@VEN	CHI	PAR	@ECU	@BRA	PER
BRA	@COL	ECU	@PER	URU	@PAR	ARG	@CHI	BOL	@VEN
CHI	@ARG	PER	@URU	PAR	@BOL	@VEN	BRA	COL	@ECU
COL	BRA	@BOL	VEN	ARG	@PER	@ECU	URU	@CHI	PAR
ECU	VEN	@BRA	@PAR	PER	@ARG	COL	BOL	@URU	CHI
PAR	@PER	URU	ECU	@CHI	BRA	@BOL	@ARG	VEN	@COL
PER	PAR	@CHI	BRA	@ECU	COL	@URU	VEN	ARG	@BOL
URU	BOL	@PAR	CHI	@BRA	VEN	PER	@COL	ECU	@ARG
VEN	@ECU	ARG	@COL	BOL	@URU	CHI	@PER	@PAR	BRA

las clasificatorias del Mundial de Sudáfrica 2010. Por entonces, la ANFP llevaba ya dos años utilizando técnicas de sports scheduling en los torneos chilenos, fruto de la colaboración con académicos en Investigación de Operaciones de la Universidad de Chile en varios proyectos [7, 8, 1]. La Conmebol resolvió en una reunión realizada antes del inicio de la clasificatoria para Sudáfrica 2010 mantener la misma programación de partidos pero, de todos modos, aquel acercamiento de la ANFP motivó la concreción de este trabajo.

2.2. Ventajas y desventajas

El fixture actual presenta ventajas y desventajas. Entre las ventajas se encuentra que, por supuesto, cumple con las condiciones básicas de un torneo double round robin. Otra ventaja es que incluye consideraciones sobre los llamados *breaks*, que refieren a cuando un equipo juega dos partidos consecutivos en la misma condición de localía. Esta es una de las principales consideraciones de varios artículos en la literatura (ver Sección 4 en Rasmussen y Trick, 2008). El fixture actual considera que ningún equipo tiene dos breaks consecutivos en la misma condición de localía (y por lo tanto, cada equipo juega a lo más dos partidos consecutivos de visita). Además, no existen breaks que involucren la primera ni la última fecha, por lo tanto, todos los equipos juegan una vez de local y otra vez de visita tanto en los dos primeros partidos como en los dos últimos partidos. Esto es usualmente considerado como una medida de justicia deportiva, entendiendo que para todos los equipos sería inconveniente tener un break de visita tan temprano o tan tarde en el torneo. También, el fixture considera que ningún equipo juegue en partidos consecutivos contra Argentina y Brasil, que son indiscutidamente los dos equipos más fuertes del torneo.

Entre las desventajas, algunas ya han sido mencionadas en la subsección anterior. También hemos identificado considerables diferencias entre las secuencias de localía y visitante de cada equipo. La Tabla 2 presenta algunas características cuantitativas del fixture actual. B_h denota el número de breaks de local, B_a el número de breaks de visita y B el número total de breaks. En particular para las doble-fechas, introducimos la notación C para referir al número total de breaks en doble-fechas, mientras que C_h y C_a denotan el número de breaks de local y visita en doble-fechas. Se puede apreciar que Bolivia tiene en total siete breaks, una cantidad considerablemente más alta que todos los otros equipos, en especial, contra los cero breaks de Argentina y Brasil. Los otros equipos poseen entre tres y cuatro breaks. Bolivia también tiene más breaks en doble-fechas que todos los otros equipos, con un total de cuatro, mientras que todos los demás equipos tienen dos (con excepción de nuevo de Argentina y Brasil que no tienen ninguno).

Cuadro 2: Características cuantitativas del fixture actual.

Equipo	B_h	B_a	B	C_h	C_a	C	U_A	U_B	U	R	D
ARG	0	0	0	0	0	0	2	3	5	0	0
BOL	4	3	7	2	2	4	2	1	3	115	13,107
BRA	0	0	0	0	0	0	2	3	5	0	0
CHI	2	2	4	1	1	2	2	1	3	28	4759
COL	2	2	4	1	1	2	2	1	3	6	3209
ECU	2	2	4	1	1	2	1	2	3	6	3004
PAR	2	2	4	1	1	2	1	2	3	46	5577
PER	1	2	3	1	1	2	1	0	1	2	2589
URU	1	2	3	1	1	2	1	2	3	4	2442
VEN	2	1	3	1	1	2	3	2	5	23	5266
TOTAL	16	16	32	9	9	18	17	17	34	230	39,953

Otra desventaja del fixture actual es que no tiene un buen balance en el "grado de dificultad" de las doble-fechas para cada equipo. Para definir dificultad, clasificamos a los equipos en dos grupos de acuerdo al rendimiento histórico que han conseguido en las 3 últimas clasificatorias a los mundiales que disputaron todos (esto es, de 2002 a 2010, dado que Brasil no disputó las clasificatorias para 2014 por ser país sede). La tabla 3 muestra el detalle del rendimiento. Definimos el grupo A como aquel que contiene a los cinco equipos de mejor rendimiento: Brasil, Argentina, Ecuador, Paraguay y Uruguay. Mientras el grupo B contiene a los restantes equipos: Chile, Colombia, Venezuela, Bolivia y Perú.

Vale notar que los mismos dos grupos son obtenidos si es que el criterio de rendmiento refiere a la posición de los equipos en promedio en el ranking final

Cuadro 3: Rendimiento histórico en las clasificatorias 2002 - 2010.

Posición	Equipo	Pos. promedio	Pts	PJ	PG	PE	PP	GF	GC	Dif
1	BRA	1.7	98	54	27	17	10	101	45	56
2	ARG	2.3	105	54	31	12	11	94	52	42
3	PAR	3.7	91	54	27	10	17	76	61	15
4	ECU	3.7	82	54	23	13	18	65	62	3
5	URU	5.0	76	54	19	19	16	70	61	9
6	COL	6.3	74	54	19	17	18	58	49	9
7	CHI	6.3	67	54	18	13	23	65	71	-6
8	VEN	8.3	56	54	16	8	30	61	101	-40
9	BOL	8.7	47	54	12	11	31	63	106	-43
10	PER	9.0	47	54	11	14	29	45	87	-42

de las clasificatorias o a la cantidad de puntos obtenidos en total a lo largo de los cuatro torneos. Por un tema de justicia deportiva, es deseable que los equipos jueguen contra un equipo del grupo A y otro del grupo B en las doble-fechas. Diremos entonces que ocurre una *doble-fecha injusta* para un equipo, si es que juega en una doble-fecha contra dos equipos de un mismo grupo. La Tabla 2 incluye el total de fechas injustas para cada equipo, denotado por U, y sus valores desagregados U_A y U_B si es contra rivales del grupo A o B, respectivamente. Queda al desnudo que el número de doble-fechas injustas para Perú, para el cual $U = 1$, es notablemente inferior al de los otros equipos que va desde 3 hasta 5.

Las últimas dos columnas de la Tabla 2 refieren a los viajes en breaks de visita en las doble-fechas, esto es, cuando un equipo juega de visita en una fecha impar y la fecha par siguiente. D denota la distancia total recorrida por cada equipo en estos breaks. Hemos calculado la distancia recorrida por el equipo i en un break entre las fechas k y $k+1$ jugando de visita contra los equipos j y h como la suma $d_{ij} + d_{jh}$, en que d_{ij} es la distancia entre las capitales de los países i y j, y d_{jh} es la distancia entre las capitales de los países j y h. Esta forma de considerar los viajes es porque usualmente el plantel de jugadores se reúne en su país para las primeras sesiones de entrenamiento, luego departe al país donde se juega el primer partido y desde éste al país donde se juega el segundo partido, pero al final de este segundo partido los integrantes del plantel suelen departir a distintos puntos de destino de acuerdo a las ligas en las que juegan.

Teniendo en cuenta que la suma agregada de las distancias viajadas por todos los equipos no necesariamente envuelve un criterio de equidad entre ellos, hemos rankeado para cada equipo los viajes de menor a mayor distancia recorrida. Para cada uno de los 10 equipos existen $9 \cdot 8 = 72$ viajes posibles en breaks de visita en doble-fechas. Denotamos por R (penúltima columna de la Tabla 2) a la suma de penalizaciones sobre las secuencias de viaje en el ranking para cada equipo, en que el viaje más corto tiene una penalidad 1 y el más largo una penalidad igual a 72. Desafortunadamente para Bolivia, en las fechas 3 y 4 juega de visita con Argentina y Venezuela, secuencia que es la quinta más larga de las 72 posibilidades, por lo que contribuye con una penalidad de 68 en su ranking de viajes (este viaje comprende en total 7,340 km). Paraguay, en tanto, visita en las fechas 11 y 12 a Uruguay y Ecuador, a pesar de que existen otras 45 secuencias de viaje más cortas que esta. Por el contrario, el único break de visita jugado en una doble fecha por Perú es en las fechas 9 y 10 contra Bolivia y Paraguay, que favorablemente para Perú es el segundo viaje más corto de sus 72 posibilidades. Este desbalance en el ranking de las secuencia de viajes de cada equipo es una clara inequidad del fixture actual.

Otra desventaja del formato actual es que, al repetirse el mismo fixture en todas las clasificatorias, los partidos decisivos al final del torneo siempre enfrentan a los mismos rivales, lo que no ha estado exento de polémicas. Uno de los más controversiales ha sido el partido que en la fecha final enfrenta a Uruguay de local contra Argentina. Argentina y Uruguay son 2 países vecinos, históricamente clásicos (se han enfrentado entre sí en finales de copas mundiales, Juegos Olímpicos y mundiales juveniles), pero también con estrechos lazos a lo largo de sus respectivas historias. Al ser Argentina uno de los equipos más fuertes, usualmente llega a este partido final con la clasificación al mundial asegurada. Por el contrario, Uruguay usualmente llega a este partido a definir el pase definitivo o bien directamente a la fase final del Mundial, o bien al repechaje. Para el Mundial 2002, Argentina llegó clasificada y Uruguay necesitaba un empate para alcanzar el repechaje y el resultado fue precisamente un empate 1-1. Para el de 2006, Argentina llegó clasificada y Uruguay necesitaba un triunfo para alcanzar el repechaje, y el resultado fue 1-0 en favor de Uruguay. Para el de 2010, por el contrario, Argentina aún no estaba clasificada y el resultado fue 1-0 en favor de Argentina (mientras que Uruguay una vez más clasificó al repechaje). Para el 2014, Argentina una vez más llegó clasificada al último partido y Uruguay con la necesidad de los tres puntos para aspirar a una hipotética clasificación directa, y el resultado fue un triunfo 3-2 para Uruguay ante una Argentina plagada de suplentes (que a la larga le fue insuficiente a Uruguay para la clasificación directa que dependía de otros partidos, pero sí clasificó para el repechaje). Independientemente de qué tan fundadas sean las suspicacias que surjan en la prensa y los hinchas sobre este tipo de resultados, es indudable que el cambio del fixture puede ayudar a descomprimir la controversia que se repite clasificatoria tras clasificatoria. Al mismo tiempo, un fixture basado en técnicas de sport scheduling puede ayudar a mejorar las otras desventajas del fixture actual, y a esto nos abocaremos en la sección siguiente.

3. Enfoque de programación entera

En esta sección proponemos un enfoque de programación lineal entera para mejorar el fixture de las clasificatorias sudamericanas. Este enfoque considera varias condiciones y criterios que hemos definido en base a las ventajas y desventajas develadas en la sección anterior y a las conversaciones con dirigentes de la ANFP. Dividimos nuestro desarrollo en cuatro etapas o sub-problemas, partiendo desde una versión que considera lo más básico que debe contener el fixture hasta una versión más compleja. En cada etapa introducimos una nueva función objetivo. El valor óptimo que obtenemos en una etapa lo introducimos como una restricción en la etapa siguiente, lo que puede ser clasificado como un enfoque de lexicographical goal progamming en que las desviaciones son forzadas a ser cero [28]. Partiremos definiendo la notación para conjuntos y variables de decisión.

Conjuntos

I: conjunto de equipos.
K: conjunto de fechas.
K_{even}: conjunto de fechas pares ($K_{even} \subset K$).
K_{odd}: conjunto de fechas impares ($K_{odd} \subset K$).

Decision variables

$x_{i,j,k} = 1$ si el equipo i juega contra el equipo j en la fecha k, 0 en caso contrario.
$y_{i,k} = 1$ si el equipo i juega de local en las fechas k y $k+1$, 0 en caso contrario.
$z_{i,k} = 1$ si el equipo i juega de visita en las fechas k y $k+1$, 0 en caso contrario.

Debido a la condición de espejo, no es necesario declarar el conjunto K para las 18 fechas del torneo, sino que basta con hacerlo para las primeras nueve fechas y tener en cuenta que si $x_{i,j,k}$ es igual a 1, entonces en la segunda rueda el equipo j jugará de local contra el equipo i en la fecha $k+9$. Consecuentemente, para $k = 9$ la variable $y_{i,k}$ vale 1 si el equipo i juega de local en la fecha 9 y de visita en la fecha 1, mientras que $z_{i,k}$ vale 1 si el equipo i juega de visita en la fecha 9 y de local en la fecha 1.

3.1. Un fixture básico con mínimo número de breaks en doble-fechas

Los breaks de visita en las doble-fechas son indudablemente la secuencia más indeseada para los equipos. Adaptarse en un corto tiempo a las condiciones para jugar fútbol en cancha ajena y soportar la hostilidad de la hinchada rival cuando se juega de visita, sumado a los largos viajes, son algunas de las dificultades que los equipos visitantes experimentan en estas secuencias. Partimos entonces desarrollando un modelo que minimice el número total de breaks de visita en las doble-fechas, y que a la vez satisfaga una serie de condiciones básicas.

Notar que los breaks de visita en las doble-fechas ocurren no sólo cuando $z_{ik} = 1$ para una fecha k impar, sino también cuando $y_{ik} = 1$ para una fecha k par de la primera mitad del torneo (debido a la condición de espejo, un break de local en la primera mitad se transforma en un break de visita en la segunda mitad). Por lo tanto, la función objetivo que minimiza el número total de breaks de visita en doble-fechas puede ser formulada de la siguiente manera:

$$\text{mín}\, F_1 = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_{even}} y_{i,k} + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_{odd}} z_{i,k}$$

A continuación, introducimos las condiciones más básicas que debe cumplir el fixture.

Restricciones esenciales. Los equipos juegan todos contra todos una vez en cada mitad del torneo.

$$\sum_{k \in K} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k}) = 1 \qquad \forall\, i, j \in I, i \neq j. \tag{1}$$

Cada equipo juega un partido en cada fecha.

$$\sum_{j \in J} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k}) = 1 \qquad \forall\, i \in I, k \in K. \tag{2}$$

Balance de localías. Cada equipo juega al menos cuatro y a lo más cinco fechas de local en cada mitad del torneo.

$$4 \leq \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} x_{i,j,k} \leq 5 \qquad \forall\, i \in I. \tag{3}$$

Restricciones en breaks. Si un equipo juega de local (visita) en una fecha en el conjunto $\hat{K} = \{1, 8\}$, debe jugar de visita (local) en la fecha siguiente.

$$\sum_{j \in J} (x_{i,j,k} + x_{i,j,k+1}) = 1 \qquad \forall\, i \in I, k \in \hat{K}. \tag{4}$$

Ningún equipo puede tener dos breaks de local consecutivos.

$$y_{i,k} + y_{i,k+1} \leq 1 \qquad \forall\, i \in I, k < |K|. \tag{5}$$

Ningún equipo puede tener dos breaks de visita consecutivos.

$$z_{i,k} + z_{i,k+1} \leq 1 \qquad \forall\, i \in I, k < |K|. \tag{6}$$

Restricciones lógicas. Las variables $x_{i,j,k}$ y $y_{i,k}$ se relacionan de acuerdo a la siguientes restricciones:

$$\sum_{j \in I} (x_{i,j,k} + x_{i,j,k+1}) \leq 1 + y_{i,k} \qquad \forall\, i \in I, k < |K| \tag{7}$$

$$\sum_{j \in I} (x_{i,j,9} + x_{j,i,1}) \leq 1 + y_{i,9} \qquad \forall\, i \in I \tag{8}$$

Las variables $x_{i,j,k}$ y $z_{i,k}$ se relacionan de acuerdo a la siguientes restricciones:

$$\sum_{j \in I} (x_{j,i,k} + x_{j,i,k+1}) \leq 1 + z_{i,k} \qquad \forall\, i \in I, k < |K| \tag{9}$$

$$\sum_{j \in I} (x_{j,i,9} + x_{i,j,1}) \leq 1 + z_{i,9} \qquad \forall\, i \in I \tag{10}$$

En total, el modelo contiene 990 variables binarias y 560 restricciones. La implementación de este modelo la hemos realizado en AMPL y la resolución utilizando el solver CPLEX 12.5, en un procesador Intel Core 2 Duo 2.26GHz con 8 GB de RAM. Una solución factible es computada por el solver CPLEX en cuestión de un segundo, con valor objetivo $F_1 = 8$. Aunque la misma corrida puede continuar muchas horas sin probar optimalidad, es posible verificar que dicha solución es óptima. En efecto, si al modelo anterior incorporamos la restricción de que dos equipos arbitrarios no tengan breaks de visita en doble-fechas, el mínimo número de estos breaks que un tercer equipo cualquiera puede tener es igual a 1. Dado que hay ocho equipos además de los dos que no poseen breaks de visita en doble-fechas, concluimos que el valor objetivo $F_1^* = 8$ encontrado es óptimo. Alternativamente, es posible correr el mismo modelo anterior con la restricción de que tres equipos arbitrarios no tengan breaks de visita en doble-fechas, para lo cual el solver reporta infactibilidad en sólo un par de segundos. Para lo que sigue, introducimos $F_1^* = 8$ como una restricción, esto es:

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in K_{even}} y_{i,k} + \sum_{i\in I}\sum_{k\in K_{odd}} z_{i,k} = 8 \tag{11}$$

3.2. Minimizando las doble-fechas injustas

En la Sección 2 clasificamos a los equipos en dos grupos de acuerdo a su rendimiento histórico en torneos clasificatorios recientes (Tabla 3). Nos interesa ahora minimizar el número total de doble-fechas injustas, esto es, el número total de ocurrencias en que un equipo juega en fecha impar y par con rivales de un mismo grupo. Si bien puede ser favorable afrontar una doble-fecha contra dos equipos del grupo de los más débiles, es particularmente difícil enfrentar a dos equipos del grupo de los más fuertes. Por lo tanto, el balance en el grado de dificultad en las doble-fechas se torna importante. Más aun, la atención inmediata de los equipos durante el transcurso de las eliminatorias y especialmente de los entrenadores, suele enfocarse en los "próximos dos rivales". Dos derrotas consecutivas han gatillado en más de una ocasión la dimisión del entrenador.

Sea G el conjunto formado por los dos grupos, i.e., $G = \{A, B\}$. Para todo equipo i, fecha k y grupo g, introducimos una nueva variable de decision binaria $u_{i,k,g}$ que toma el valor 1 si el equipo i juega contra equipos del grupo g en las rondas k y $k+1$, y 0 en caso contrario. Luego, el criterio de minimización del número total de doble-fechas injustas queda expresado de la siguiente manera:

$$\text{mín}\, F_2 = \sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\sum_{g\in G} u_{i,k,g}$$

Las variables u se relacionan con las variables x de acuerdo a las siguientes restricciones.

$$\sum_{j\in G}(x_{i,j,k} + x_{i,j,k+1} + x_{j,i,k} + x_{j,i,k+1}) \leq 1 + u_{i,k,g} \qquad \forall\, i \in I, k < |K|, g \in G \tag{12}$$

$$\sum_{j\in G}(x_{i,j,9} + x_{i,j,1} + x_{j,i,9} + x_{j,i,1}) \leq 1 + u_{i,9,g} \qquad \forall\, i \in I, g \in G \tag{13}$$

Con la incorporación de estas formulaciones, en adición a las restricciones (1)–(11), el modelo contiene 1170 variables binarias y 741 restricciones. CPLEX resuelve el modelo a optimalidad en 107 segundos. El valor objetivo es de 18 y la solución obtenida contiene a lo más dos doble-fechas injustas por cada equipo. Estos valores mejoran considerablemente el total de 34 doble-fechas injustas contenidas en el fixture actual y el desbalance entre cómo éstas son distribuidas por cada equipo. Para lo que sigue, incorporamos los resultados de esta etapa como restricciones de la manera siguiente:

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\sum_{g\in G} u_{i,k,g} = 18 \tag{14}$$

$$\sum_{k\in K} u_{i,k,g} \leq 2 \qquad \forall\, i \in I, g \in G. \tag{15}$$

3.3. Condiciones deseables y minimización de partidos repetidos del fixture actual

El uso del mismo fixture durante las últimos cuatro clasificatorias ha despertado algunas críticas de hinchas, prensa y asociaciones nacionales de fúbtol. Estas críticas provienen sobre todo de aquellos países que han obtenido pocas o ninguna clasificación a la fase final del mundial, según mencionamos en la Sección 2. Creemos entonces que es "saludable" que el fixture de Conmebol no se repita de una eliminatoria otra. Para lidiar con partidos repetidos, definimos el parámetro $\alpha_{i,j,k}$ que vale 1 si es que el equipo i juega de local contra j en la fecha k del fixture actual. Como tercer criterio de optimización, definimos minimizar el número de partidos repetidos del fixture actual de la manera siguiente:

$$\text{mín}\, F_3 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in \tilde{K}} \alpha_{i,j,k}\cdot x_{i,j,k},$$

en que $\tilde{K} \subseteq K$ contiene las fechas para las cuales se desea no repetir partidos respecto al torneo anterior. Teniendo en cuenta que la notoriedad de los partidos que se repiten de un torneo a otro son aquellos jugados al comienzo y al final, una alternativa es definir el conjunto $\tilde{K}$ incluyendo sólo las dos primeras y las dos últimas fechas. En nuestra implementación, sin embargo, utilizamos $\tilde{K} = K$ con la intención de no repetir el orden de ningún partido del fixture actual. En esta etapa introdujimos además una serie de condiciones que se explican a continuación.

Restricciones geográficas. El equipo i no debe jugar en una doble-fecha contra los equipos j y h en forma consecutiva de visita, si es que (i, j, h) está contenido en el conjunto de viajes más largos que i puede recorrer en una doble-fecha. Para esto definimos el conjunto L_n, que contiene las tuplas (i, j, h) tales que la distancia desde i hasta j más la distancia desde j a h es uno de las

n secuencias de viajes más largos para el equipo i (en nuestra implementación definimos $n = 5$). La restricción se modela de la manera siguiente:

$$x_{j,i,k} + x_{h,i,k+1} \leq 1 \qquad \forall\, k < |K|, (i,j,h) \in L_n. \tag{16}$$

Equipos fuertes. El conjunto de equipos fuertes, que denotamos com I_S, contiene a los que sin dudas son las dos potencias principales del fútbol sudamericano: Argentina y Brasil. Imponemos que ningún equipo juegue partidos consecutivos contra los equipos fuertes de la siguiente manera:

$$\sum_{j \in I_S} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k} + x_{i,j,k+1} + x_{j,i,k+1}) \leq 1 \qquad \forall\, i \in I, k < |K| \tag{17}$$

$$\sum_{j \in I_S} (x_{i,j,9} + x_{j,i,9} + x_{i,j,1} + x_{j,i,1}) \leq 1 \qquad \forall\, i \in I \tag{18}$$

Partidos clásicos. Debido a la rivalidad histórica de los únicos tres equipos sudamericanos que han ganado la Copa del Mundo, se definen partido clásicos aquellos jugados entre Argentina, Brasil y Uruguay. Definimos I_C como el conjunto que contiene a estos tres equipos. Una primera restricción se impone para que ninguno de estos partidos se juegue ni en la primera ni en la última fecha, esto es:

$$\sum_{i \in I_C} \sum_{j \in I_C} \sum_{k \in \{1,9\}} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k}) = 0. \tag{19}$$

También se impone que ningún equipo puede jugar dos clásicos en fechas consecutivas, esto es:

$$\sum_{j \in I_C} \sum_{k \in K} (x_{i,j,k} + x_{j,i,k} + x_{i,j,k+1} + x_{j,i,k+1}) \leq 1 \qquad \forall\, i \in I_C, k < |K|. \tag{20}$$

El modelo resultante, que además incluye las restricciones (1)–(14), consiste de 1170 variables binarias y 1286 restricciones. La solución óptima es encontrada por CPLEX en cerca de cuatro minutos, con un valor óptimo $F_3^* = 0$, esto es, que no repite ningún partido del fixture actual. Para lo que sigue, incorporamos la restricción

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \alpha_{i,j,k} \cdot x_{i,j,k} = 0. \tag{21}$$

3.4. Minimizando los viajes largos relativos a cada equipo

La minimización de la suma de las distancias totales de viajes de los equipos es un criterio tradicionalmente utilizado en sports scheduling (e.g. [11], [18], [3]). Dicho criterio parece ser razonable en ligas nacionales donde un asociación vela centralizadamente por el objetivo global de reducir las distancias de viajes. Sin embargo, en nuestro problema que involucra a diez distintas asociaciones, hemos optado por considerar un ranking de distancias de viaje relativos a cada equipo en vez de las distancias absolutas. En la restricción (16) prohibimos las cinco peores secuencias de viaje en doble-fechas de visita para los equipos, de tal manera de evitar secuencias indeseables como la de Bolivia visitando a Argentina y Venezuela en fechas consecutivas contenida en el fixture actual. Como cuarto criterio de optimización, exploramos minimizar las penalidades en los viajes en fechas dobles, en base al ranking de viajes más largos de cada equipo. Para ello incorporamos una variable binaria $w_{i,j,h,k}$ que toma el valor 1 si es que el equipo i juega de visita contra el equipo j en la fecha k y de visita contra el equipo h en la fecha $k+1$, y 0 en caso contrario. También incorporamos un parámetro $\rho_{i,j,h}$ que indica la penalización asociada al viaje del equipo i a j y h en visitas consecutivas en una fecha doble. Para calcular este parámetro, se rankean todos los viajes posibles para el equipo i, de mayor a menor distancia. Dado que hay en total $|I| = 10$ equipos en el torneo, para un equipo fijo i existen $(|I|-1)(|I|-2) = 72$ posibles viajes. Denotamos por $R_{i,j,h}$ al lugar que ocupa en la lista de viajes del equipo i la suma de la distancia desde i a j más la distancia desde j a h. El valor del parámetro de penalización es $\rho_{i,j,h} = (|I|-1)| \cdot (|I|-2) + 1 - R_{i,j,h}$. Por ejemplo, el viaje más largo (que ocupa el lugar $R_{i,j,h} = 1$) tiene asociada una penalización igual a 72, mientras que el viaje más corto (que ocupa el lugar $R_{i,j,h} = 72$) tiene asociada una penalización igual a 1. De esta manera, el viaje más largo de un equipo (y, en general, el n-ésimo viaje más largo) es igualmente relevante que el viaje más largo (n-esimo más largo) de otro equipo, a pesar que la distancia de uno sea mayor al otro. La Tabla 4 muestra la matriz de distancias que utlizamos en la computación de estos parámetros. Notar que hemos considerado la distancia entre capitales de los países de cada selección, que es donde los equipos suelen jugar (una minoría de los equipos decide variar las ciudades en que juega, como Brasil que en las últimas tres eliminatorias en que participó ha utilizado 14 ciudades diferentes).

La función objetivo que minimiza la suma total de penalidades es la siguiente:

$$\min F_4 = \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} \sum_{h\in I} \sum_{k\in K} \rho_{i,j,h} \cdot w_{i,j,h,k}.$$

Cuadro 4: Matriz de distancias entre las capitales sudamericanas (en [km]). Source: http://www.distanciasentreciudades.com

Team	ARG	BOL	BRA	CHI	COL	ECU	PAR	PER	URU	VEN
ARG	0	2238	2341	1137	4664	4364	1040	3142	204	5102
BOL	2238	0	2210	1905	2275	1987	1605	984	2526	2854
BRA	2341	2210	0	3013	3667	3780	1463	3173	2281	3599
CHI	1137	1905	3013	0	4253	3792	1554	2472	1340	4910
COL	4664	2275	3667	4253	0	729	3771	1882	4778	1024
ECU	4364	1987	3780	3792	729	0	3582	1327	4499	1750
PAR	1040	1605	1463	1554	3771	3582	0	2518	1078	4110
PER	3142	984	3173	2472	1882	1327	2518	0	3302	2748
URU	204	2526	2281	1340	4778	4499	1078	3302	0	5178
VEN	5102	2854	3599	4910	1024	1750	4110	2748	5178	0

Las variables w se relacionan con las variables x de acuerdo a las siguientes restricciones.

$$x_{j,i,k} + x_{h,i,k+1} \leq 1 + w_{i,j,h,k} \qquad \forall\, i,j,h \in I, k < |K| \tag{22}$$

$$x_{j,i,9} + x_{i,h,1} \leq 1 + w_{i,j,h,9} \qquad \forall\, i,j,h \in I \tag{23}$$

El número de variables binarias en el modelo resultante, que además incluye las restricciones (1)–(21), se incrementa considerablemente a 7650 variables, y el número de restricciones es 1287. La solución que obtuvimos en la sub-sección 3.3 es obviamente factible en este modelo y obtiene un desempeño $F_4 = 267$. Al mismo tiempo que nos gustaría mejorar este desempeño, notamos que el problema de optimización se torna mucho más difícil de resolver que en los problemas anteriores. Para lidiar con esto, introdujimos el uso de patrones de localías. Un patrón puede ser entendido como un arreglo ordenado de caracteres H, A y B que denotan "Home", "Away" y "Bye", respectivamente. La dimensión del arreglo corresponde al número de fechas del torneo. Un patrón asignado a un equipo dado indica en su componente j-ésima si dicho equipo juega de local, de visita o queda libre en la fecha j (en nuestro problema no habrá fechas libres para ningún equipo). En la programación de fixtures, un enfoque que ha sido amplia y exitosamente utilizado para obtener buenas soluciones en forma rápida es el de primero generar y fijar estos patrones a los equipos, y luego definir el fixture propiamente tal (ver, por ejemplo, [5], [22], [2], [16], [8], [27]). Una buena revisión al respecto y un resumen sobre las variadas maneras en que el enfoque de patrones es utilizado en la resolución de problemas de programación de fixtures de torneos deportivos, es entregada en la Sección 4.2 de [24].

En nuestro problema, correr el modelo sujeto a la fijación de los patrones de la solución obtenida en la sub-sección 3.3 termina rápidamente sin reportar ninguna mejora sobre el valor $F_4 = 267$. Por otro lado, al correr el modelo sin solución inicial ni patrones fijos, el tiempo de resolución explota significativamente. La primera solución factible es de justamente $F_4 = 267$, lograda en cerca de 8.1 hr. Una segunda solución de $F_4 = 212$ es encontrada en cerca de 8.4 hr. Ninguna nueva solución es lograda en un límite de 11 hr. Para mejorar la solución, hemos adoptado un enfoque heurístico que consiste en fijar los patrones para sólo algunos de los equipos, y dejar al resto sin patrón fijo. Los patrones de este resto de equipos son definidos entonces en la corrida del modelo. Este enfoque ha probado ser efectivo en la resolución de varios torneos de la liga chilena [7]. Obviamente existe un conflicto entre el número de equipos para los cuales se fijen los patrones y la mejora que se pueda lograr en la función objetivo; mientras más patrones se fijen, menores opciones de conseguir mejoras en el valor objetivo. A su vez, mientras más patrones se fijen, menor el tiempo requerido para resolver el modelo. En nuestra experiencias computacionales, hemos verificado que hasta cinco equipos con patrón fijo (y cinco sin patrón fijo), las corridas se mantienen en el orden de minutos. El cómo elegir los equipos a los que se fija o no patrones puede basarse en criterios como buscar equipos que se envuelven en restricciones similares (por ejemplo Argentina, Brasil y Uruguay que comparten los partidos clásicos) o equipos que en la solución factible de partida protagonizaban los peores viajes. De esta manera, la mejor solución que hemos encontrado es la que se muestra en la Tabla 5, y sus características cuantitativas en la Tabla 6. Este fixture

Cuadro 5: Mejor solución encontrada.

Team	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	PER	@ECU	VEN	@BRA	@COL	URU	CHI	@BOL	PAR
BOL	PAR	@PER	URU	@ECU	@VEN	BRA	@COL	ARG	@CHI
BRA	VEN	@URU	@COL	ARG	CHI	@BOL	PAR	@PER	ECU
CHI	URU	@VEN	ECU	PER	@BRA	COL	@ARG	@PAR	BOL
COL	ECU	@PAR	BRA	@VEN	ARG	@CHI	BOL	@URU	PER
ECU	@COL	ARG	@CHI	BOL	PAR	@PER	@URU	VEN	@BRA
PAR	@BOL	COL	@PER	URU	@ECU	VEN	@BRA	CHI	@ARG
PER	@ARG	BOL	PAR	@CHI	@URU	ECU	@VEN	BRA	@COL
URU	@CHI	BRA	@BOL	@PAR	PER	@ARG	ECU	COL	@VEN
VEN	@BRA	CHI	@ARG	COL	BOL	@PAR	PER	@ECU	URU

alcanza un desempeño $F_4 = 65$ en el cuarto criterio, y es óptimo en los otros tres criterios de desempeño ($F_1^* = 8$, $F_2^* = 18$, $F_3^* = 0$). Todos los equipos tienen a lo más un solo break de visita en doble-fecha y para la mayoría de los equipos la secuencia de viaje en la doble-fecha está entre las diez más cortas de las 72 posibles. En particular, Bolivia es el equipo con la penalización más alta en el ranking de viajes, pero con una secuencia mucho más favorable que la del fixture actual, reduciéndola en 9,648 km. En efecto, en vez de realizar el quinto viaje más largo, en nuestra solución realiza el 18vo viaje más corto. Como alternativa a minimizar el total de penalidades, la función objetivo podría intentar minimizar la máxima penalidad sobre los equipos. Para ello, basta introducir una nueva variable, llamémosla f, en que $f \geq R_{i,j,h}w_{i,j,h,k}$ y luego la función objetivo es mín f. Interesantemente, para este nuevo problema la mejor solución que obtuvimos es la misma que obtuvimos cuando usamos F_4. Aun desfijando hasta siete patrones, esta solución sigue siendo la de mejor desempeño que conseguimos cuando minimizamos f.

Cuadro 6: Características cuantitativas del fixture que proponemos.

Team	B_h	B_a	B	C_h	C_a	C	U_A	U_B	U	R	D
ARG	2	2	4	1	1	2	0	1	1	2	1544
BOL	1	2	3	1	1	2	1	0	1	18	3459
BRA	2	2	4	1	1	2	0	1	1	10	3478
CHI	2	2	4	1	1	2	1	0	1	3	2177
COL	0	0	0	0	0	0	2	1	3	0	0
ECU	2	2	4	1	1	2	0	1	1	8	3592
PAR	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0
PER	2	2	4	1	1	2	1	0	1	2	2589
URU	2	2	4	1	1	2	1	2	3	17	4131
VEN	2	1	3	1	1	2	2	1	3	5	3299
TOTAL	15	15	30	8	8	16	9	9	18	65	24,269

Comparando el agregado de todos los equipos, nuestro fixture reduce la distancia de viajes en doble-fechas con breaks de visita en casi 40 % respecto al fixture actual. Otras bondades se pueden observar comparando los resultados de las tablas 2 y 6, como la reducción del número total de breaks y en particular del número de breaks en doble-fechas. La reducción de doble-fechas injustas es la más considerable, desde 34 en el fixture actual a sólo 18 en nuestro fixture. A todo esto se suma que no se repita ningún partido del fixture actual, lo que creemos ayudaría a descomprimir las críticas que el actual fixture ha recibido. En resumen, nuestra propuesta bajo el formato doble round robin espejado mejora notablemente el fixture actual de Conmebol.

4. Un fixture *casi-espejado* sin breaks en doble-fechas

Definimos un fixture *casi-espejado* para un torneo de dos rondas de n equipos como aquel fixture en que si un equipo i juega de local contra el equipo j en la fecha k, entonces j juega de local contra i en la fecha $k+n$ si $k \in \{1, \ldots, n-2\}$ o en la fecha $k+1$ si $k = n-1$. Este formato es también denotado como *sitema inglés* en la literatura [2, 6, 17]. El fixture casi-espejado puede ser construido a partir de un fixture espejado, tan sólo intercalando la última fecha entre la $n-1$ y la n-ésima del fixture espejado (recordar que para un torneo de n equipos, el fixture espejado cumple que si un equipo i juega de local contra el equipo j en la fecha k, entonces j juega de local contra i en la fecha $k+n-1, \ \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}$). La Tabla 7 muestra un ejemplo de fixture casi-espejado para seis equipos. En este ejemplo, la fecha 6 consiste de partidos entre los mismos pares de equipos que la fecha 5, mientras que las fechas 7 a la 10 repiten los emparejamientos de las fechas 1 a la 4 pero con las localías intercambiadas.

Cuadro 7: Un fixture casi-espejado para seis equipos.

Team	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	@F	D	@B	E	@E	@C	F	@D	B
B	F	@E	@C	A	@D	D	@F	E	C	@A
C	@A	D	B	@E	@F	F	A	@D	@B	E
D	E	@C	@A	F	B	@B	@E	C	A	@F
E	@D	B	@F	C	@A	A	D	@B	F	@C
F	@B	A	E	@D	C	@C	B	@A	@E	D

La atractiva característica del fixture casi-espejado es que permite generar un fixture sin breaks en doble-fechas, por lo tanto, proveyendo que todos los equipos jueguen un partido de local y otro de visita en cada doble-fecha. Esto se aprecia en el ejemplo de la Tabla 7, en que la condición de localía de todo equipo en una fecha impar es diferente a su condición en la fecha par siguiente. Esto es deseable desde varios puntos de vista. Primero, porque acaba con el problema de secuencias de viajes muy extenuantes para jugar de visita dos partidos consecutivos en un período muy corto. Obviamente, los viajes desde o hacia casa persisten, pero el hecho de jugar de local al menos uno de estos dos partidos es una ventaja que bien puede contrapesar la desventaja de un viaje largo. Además, notar que por cada equipo que juega dos partidos consecutivos de visita en una doble-fecha hay otro equipo que juega dos partidos consecutivos de local, un factor de injusticia que desaparece en el formato casi-espejado.

Segundo, desde un punto de vista deportivo, un fixture casi-espejado balancea las expectativas de los equipos en sumar puntos en cada doble-fecha (entendiendo que siempre es más beneficioso jugar de local que de visita), en comparación a cuando una doble-fecha posee un break de visita, lo que probablemente envuelve bajas expectativas, o un break de local, con altas expectativas.

Tercero, desde el punto de vista económico y del espectáculo, un fixture casi-espejado provee a los fans, prensa y dirigentes la bondad de tener a su selección en casa en todas las doble-fechas, lo que suele estar acompañado de una gran expectativa y también de importantes ingresos económicos por concepto de tickets y sponsors. Esto es especialmente beneficioso cuando existe un largo receso entre una y otra doble-fecha. Por ejemplo, para las clasificatorias del Mundial 2010, Uruguay jugó de visita dos partidos en la doble-fecha compuesta por las fechas 9 y 10, programadas entre el 11 y 15 de Octubre de 2008. En tanto, las fechas 8 y 12 en que Uruguay hizo de local, se jugaron el 10 de Septiembre de 2008 y el 28 de Marzo de 2009 respectivamente, por lo tanto, dejando a los uruguayos con un gap de poco más de 6 meses sin ver a su selección en casa. Por el contrario, Ecuador jugó de local contra Brasil y Paraguay con sólo tres días de separación entre las fechas 11 y 12 de las clasificatorias 2010. Teniendo en cuenta que las entradas a los partidos de las eliminatorias suelen ser más costosas que las de la liga local, el presupuesto de los fans locales también lograría balancearse mejor con partidos de local algo más distantes que estas dos fechas tan cercanas.

Para generar un fixture casi-espejado, la restricción esencial que incorporamos es la siguiente:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_{odd}} z_{i,k} = 0, \tag{24}$$

esto es, que ningún equipo tenga un break de visita en una doble-fecha.

Las restricciones (1)–(10) de la Sección 3.1 pueden ser incorporadas de manera análoga para este formato de fixture. Debido a que la octava fecha de la primera ronda será la última antes de los enfrentamientos inter-parejas, la restricción (4) debe ser declarada para el conjunto $\bar{K} = \{1, 7\}$ en vez del conjunto $\{1, 8\}$ utilizado en el espejado. La función objetivo F_1 de un fixture casi-espejado es, por construcción, igual a cero, por lo cual no es necesario incluirla. Al buscar un fixture factible para este problema, CPLEX demora cuestión de un segundo en entregar una solución. Sin embargo, notamos que el número total de breaks en el fixture puede ser indeseablemente alto, aun cuando los breaks en doble-fechas son cero. Por lo cual, en la primera etapa de construcción del fixture casi-espejado optamos por minimizar el número total de breaks, esto es:

$$\text{mín}\, \bar{F}_1 = 2\sum_{i\in I}\sum_{1\leq k\leq 7}(y_{i,k}+z_{i,k}) + \sum_{i\in I}\sum_{8\leq k\leq 9}(y_{i,k}+z_{i,k}),$$

donde las variables $y_{i,k}$ e $z_{i,k}$ son calculadas de acuerdo a las restricciones lógicas (7) y (9) para todo k excepto para $k = 9$. En el fixture casi-espejado, dado que el rival de un equipo es el mismo para la fecha 9 y 10 pero con la localía invertida, sabemos de antemano que no hay breaks envolviendo este par de fechas. Sin embargo, se debe considerar que luego de la fecha 10 viene la fecha 11 que repite los partidos de la fecha 1 con la localía invertida. Luego, utilizamos la declaración de $y_{i,9}$ y $z_{i,9}$ para calcular los breaks que involucran a las fechas 10 y 11, formulando las restricciones lógicas en términos de las variables de las fechas 9 y 1. Por ejemplo, en vez de (10) formulamos $\sum_{j\in I} x_{i,j,9} + x_{i,j,1} \leq 1 + z_{i,9}\ \forall i \in I$. Estos breaks y los constituidos por la repetición de la condición de localía en las fechas 8 y 9 sólo contribuyen con un break cada uno al total de breaks del torneo, mientras que aquellos breaks entre las fechas 1 y 7 se repiten en la segunda mitad del torneo, por eso van pesados por 2 en la función objetivo $\bar{F}_1$.

Una solución factible para este problema es encontrada rápidamente, en cerca de cinco segundos con un valor objetivo $\bar{F}_1{}^* = 16$. Aunque para probar la optimalidad de este valor el solver demora poco más de seis horas, notar que es sabido que este es el número mínimo de breaks que un torneo doble round-robin de $n = 10$ equipos puede tener [5]. La solución contiene a lo más un break de local y a lo más uno de visita por cada equipo. Con dicho valor introducido como restricción, en la segunda etapa minimizamos F_2 obteniendo un valor objetivo de 8 fechas doble injustas, que es considerablemente menor que las 18 alcanzadas por el fixture espejado. Cuando además incorporamos el criterio de no repetir partidos del fixture actual y las condiciones deseables de la sección 3.3 (de las cuales sólo (17), (19) y (20) son necesarias), obtenemos una solución con $F_3 = 0$. Esto es, ningún partido se juega en la misma fecha del fixture actual. La solución es mostrada en la Tabla 8. Notar que la restricción (16) no es necesaria, debido a la inexistencia de breaks en doble fechas. De la misma manera, tampoco es necesario considerar el criterio de minimizar la penalización de viajes que estudiamos en la Sección 3.4, por lo tanto, el fixture casi-espejado cumple que $F_4 = 0$.

Cuadro 8: Un fixture casi-espejado sin breaks en doble-fechas.

Team	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	18
ARG	@VEN	CHI	@PER	BRA	@COL	URU	@BOL	ECU	@PAR	PAR	...	@ECU
BOL	@CHI	URU	@BRA	PER	@ECU	COL	ARG	@PAR	VEN	@VEN	...	PAR
BRA	COL	@ECU	BOL	@ARG	PAR	@CHI	VEN	@URU	@PER	PER	...	URU
CHI	BOL	@ARG	PAR	@VEN	@URU	BRA	@ECU	PER	@COL	COL	...	@PER
COL	@BRA	PER	@ECU	URU	ARG	@BOL	PAR	@VEN	CHI	@CHI	...	VEN
ECU	@PER	BRA	COL	@PAR	BOL	@VEN	CHI	@ARG	URU	@URU	...	ARG
PAR	@URU	VEN	@CHI	ECU	@BRA	PER	@COL	BOL	ARG	@ARG	...	@BOL
PER	ECU	@COL	ARG	@BOL	VEN	@PAR	URU	@CHI	BRA	@BRA	...	CHI
URU	PAR	@BOL	VEN	@COL	CHI	@ARG	@PER	BRA	@ECU	ECU	...	@BRA
VEN	ARG	@PAR	@URU	CHI	@PER	ECU	@BRA	COL	@BOL	BOL	...	@COL

5. Conclusiones

Hemos desarrollado un enfoque de programación lineal entera para las clasificatorias sudamericanas a la Copa del Mundo FIFA. A pesar de la intensificación de aplicaciones de sports scheduling a competiciones de fútbol del mundo real y la gran importancia de la Copa del Mundo, este es hasta nuestro conocimiento el primer artículo de sports scheduling enmarcado en este torneo. Nuestro trabajo fue motivado por dirigentes de la ANFP chilena, tras la frustración de las dos eliminaciones consecutivas de su selección a los mundiales 2002 y 2006. Similar frustración ha sido experimentada por otras asociaciones, lo que ha motivado distintas críticas. Recordemos que el fixture utilizado por la Confederación Sudamericana (Conmebol) ha sido el mismo durante los últimos cuatro mundiales, realizados entre 2002 y 2014. En este artículo hemos develado una serie de desventajas de este fixture y hemos propuesto alternativas de mejora, en base a una serie de criterios de uso habitual en sports scheduling, tales como breaks, geografía y justicia deportiva.

La Conmebol discutió la posibilidad de modificar la programación de esta clasificatoria previo al inicio de los partidos que conducirían a Sudáfrica 2010, incluyendo una propuesta chilena presentada por la ANFP en base a nuestro trabajo. Sin embargo, CONMEBOL decidió mantener el fixture tal cual estaba. Si la resistencia al cambio es una de las principales barreras en la adopción de nuevas herramientas para la programación de ligas nacionales, creemos que la resistencia es aún mayor en una confederación internacional que agrupa a las distintas asociaciones de un continente. Esto es así porque la confederación requiere alinear a las dirigencias de las asociaciones de 10 países, lo cual envuelve lidiar con diferentes conflictos de intereses, además de un alto grado de heterogeneidad.

A pesar de que el total de 10 equipos que participan en la clasificatoria sudamericana es menor que el de varias otras ligas en las cuales se ha aplicado el sports scheduling, el problema de programación del fixture presenta características interesantes para su investigación. Una de estas es la cercanía en la calendariación de los pares de fechas FIFA. Esto ha motivado nuestra especial atención a los breaks en doble-fechas, que hemos definido como la repetición de la condición de localías en una fecha impar y la inmediatamente siguiente fecha par. Vale destacar que estas doble-fechas no sólo aparecen en el fixture sudamericano, sino también en las clasificatorias de otras confedereaciones, como la europea y la asiática. Una de las alternativas que estudiamos en este artículo es la de un fixture casi-espejado que, en oposición a un fixture espejado, permite programar los partidos de tal manera que no exista ningún break en doble-fechas. Este es un rasgo atractivo, pues permite que las selecciones siempre jueguen de local un partido en una doble-fecha FIFA, en contraste con el formato espejado que a veces provoca largos períodos de tiempo, que pueden llegar a los 6 meses, en que una selección no juega en su propio país.

Una característica interesante de las clasificatorias al mundial es que envuelven una idiosincrasia algo más universal que la habitual de ligas nacionales. Creemos que esto puede fomentar un mayor debate entre grupos de investigación de distintos países en torno a un mismo problema real, lo que a menudo es más difícil de lograr cuando los problemas requieren de un alto grado de familiaridad con el entorno local de las ligas nacionales. De esta manera, el debate no sólo puede incluir la comparación de enfoques de resolución como es habitual en instancias de experimentación, sino también qué formatos de torneo y qué condiciones debieran ser considerados para mejorar la programación de los torneos.

Otra dirección para investigación futura concierne a cómo construir el ranking de rendimiento histórico de los equipos. En la Sección 3.2 de este trabajo, donde minimizamos las doble-fechas injustas, utilizamos un ranking construido en base a los tres últimas torneos clasificatorios, todos ellos ponderadas de igual manera. Dado el dinamismo en el rendimiento de los equipos de un torneo a otro, se necesita definir criterios de acuerdo a los cuales el ranking debiera actualizarse en el tiempo. La FIFA actualiza un ranking mundial periódicamente que podría servir de referencia, aunque de acuerdo a Durán et al. (2014) presenta importantes desventajas y es, por lo tanto, un tópico que permanece abierto para la introducción de mejoras.

Agradecimientos. Agradecemos a los dirigencia de la ANFP que ha colaborado en la aplicación de nuestros desarrollos en sus torneos, especialmente a Alejandro Carmash y Felipe Chaigneau que motivaron nuestra participación en este proyecto sobre las clasificatorias sudamericanas. También agradecemos a los participantes de MathSport International Conference 2013 en Leuven por sus comentarios, especialmente a Michael Trick y Stephan Westphal por sus sugerencias que inspiraron la elaboración de la Sección 4 de este artículo. También agradecemos a Kenneth Rivkin por su valiosa ayuda en la escritura de este artículo, y a Javier Marenco, Francisco Santos, Hsu-Shih Shih y a un revisor anónimo por sus interesantes comentarios que nos perimitieron mejorar este trabajo.

Referencias

[1] F. Alarcón, G. Durán y M. Guajardo. Referee assignment in the Chilean football league using integer programming and patterns. *International Transactions in Operational Research* 21-(3), 415–438, 2014.

[2] T. Bartsch, A. Drexl y S. Kröger. Scheduling the professional soccer leagues of Austria and Germany. *Computers and Operations Research* 33 -(7), 1907–1937, 2006.

[3] F. Bonomo, A. Cardemil, G. Durán, J. Marenco y D. Sabán. An application of the traveling tournament problem: The Argentine volleyball league. *Interfaces* 42-(3), 245–259, 2012.

[4] EL Comercio. ¿es el fixture de eliminatorias culpable de que Perú no vaya al mundial? `http://elcomercio.pe/deportes/1648847/noticia-fixture-eliminatorias-culpable-que-peru-no-vaya-al-mundial\/` Accedido el 29 de Abril de 2014, 2013.

[5] D. de Werra. Some models of graphs for scheduling sports competitions. *Discrete Applied Mathematics* 21-(1), 47–65, 1998.

[6] A. Drexl y S. Knust (2007). Sports league scheduling: graph-and resource-based models. *Omega* 35 -(5), 465–471, 2007.

[7] G. Durán, M. Guajardo, J. Miranda, D. Sauré, S. Souyris, A. Weintraub, y R. Wolf. Scheduling the Chilean soccer league by integer programming. *Interfaces* 37 -(6), 539–552, 2007.

[8] G. Durán, M. Guajardo y R. Wolf-Yadlin. Operations research techniques for scheduling Chile's second division soccer league. *Interfaces* 42 -(3), 273–285, 2012.

[9] G. Durán, S. Cea, M. Guajardo, D. Sauré y G. Zamorano. FIFA Ranking and World Cup Football Groups: Quantitative Methods for a Fairer System. In *Proceedings of PATAT 2014, 10th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling, York, United Kingdom*, 2014.

[10] D. Dyte y S. R. Clarke. A ratings based poisson model for world cup soccer simulation. *Journal of the Operational Research society* 51-(8), 993–998, 2000.

[11] K. Easton, G. Nemhauser y M. Trick. The traveling tournament problem description and benchmarks. In *Principles and Practice of Constraint Programming—CP 2001*, pp. 580–584. Springer, 2001.

[12] Emol. Perú propone cambiar sistema de clasificatorias para Rusia 2018. `http://www.emol.com/noticias/deportes/2013/10/22/625966/peru-propone-cambiar-sistema-de-las-clasificatorias-sudamericanas-para-rus` `html` Accedido el 29 Abril de 2014, 2013.

[13] J. Fiallos, J. Pérez, F. Sabillón y M. Licona. Scheduling soccer league of Honduras using integer programming. In *Proceedings of the 2010 Industrial Engineering Research Conference, San Carlos, México*, 2010.

[14] T. Flatberg, E. J. Nilssen y M. Stølevik. Scheduling the topmost football leagues of Norway. `http://folk.uio.no/trulsf/pub/euro2009.pdf\/` Accedido el 29 Abril de 2014, 2009.

[15] J.D. Gilardi. Factores alterados. `http://dechalaca.com/informes/opinion/factores-alterados\/` accessed 29 April 2014, 2013.

[16] D. Goossens y F. Spieksma. Scheduling the Belgian soccer league. *Interfaces* 39 -(2), 109–118, 2009.

[17] D. Goossens y F. C. Spieksma. Soccer schedules in Europe: an overview. *Journal of scheduling* 15 (5), 641–651, 2012.

[18] G. Kendall. Scheduling English football fixtures over holiday periods. *Journal of the Operational Research Society* 59- (6), 743–755, 2008.

[19] G. Kendall, S. Knust, C. C. Ribeiro y S. Urrutia. Scheduling in sports: An annotated bibliography. *Computers & Operations Research* 37- (1), 1–19, 2010.

[20] R. Koning, M. Koolhaas, G. Renes y G. Ridder. A simulation model for football championships. *European Journal of Operational Research* 148-(2), 268–276, 2003.

[21] La Primera. El fixture. `http://www.diariolaprimeraperu.com/online/columnistas-y-colaboradores/el-fixture_68760.html` Accedido el 29 de Abril de 2014, 2010.

[22] G. Nemhauser, y M. A. Trick. Scheduling a major college basketball conference. *Operations Research* 46-(1), 1–8, 1998.

[23] R. Rasmussen. Scheduling a triple round robin tournament for the best Danish soccer league. *European Journal of Operational Research* 185-(2), 795–810, 2008.

[24] R. Rasmussen y M. A. Trick. Round robin scheduling–a survey. *European Journal of Operational Research* 188-(3), 617–636, 2008.

[25] D. Recalde,R. Torres y P. Vaca. Scheduling the professional Ecuadorian football league by integer programming. *Computers & Operations Research* 40-(10), 2478—-2484, 2013.

[26] C. Ribeiro. Sports scheduling: Problems and applications. *International Transactions in Operational Research* 19-(1–2), 201–22, 2012.

[27] C. Ribeiro y S. Urrutia. Scheduling the Brazilian soccer tournament: Solution approach and practice. *Interfaces* 42-(3), 260–272, 2012.

[28] C. Romero. Extended lexicographic goal programming: a unifying approach. *Omega* 29-(1), 63–71, 2001.

[29] J. A. Schreuder. Combinatorial aspects of construction of competition Dutch professional football leagues. *Discrete Applied Mathematics* 35-(3), 301–312, 1992.

[30] A. Suzuki, L. Salasar, J. Leite y F. Louzada-Neto. A bayesian approach for predicting match outcomes: The 2006 (association) football world cup. *Journal of the Operational Research Society* 61-(10), 1530–1539, 2010.

[31] M. Wright. 50 years of OR in sport. *Journal of the Operational Research Society* 60, S161–S168, 2009.