

---

# OPTIMIZACIÓN DEL ÁREA DE DRENAJE EN YACIMIENTOS NO CONVENCIONALES POR MEDIO DE PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

---

FERNANDO ALIAGA\*  
DIEGO DELLE DONNE\*\*  
GUILLERMO DURÁN\*\*\*  
JAVIER MARENCO\*\*\*\*

## Resumen

En este trabajo se estudia el problema de optimización del área de drenaje en yacimientos no convencionales de hidrocarburos, con el objetivo de proponer un plan de explotación del yacimiento que optimice la producción total y respete restricciones ambientales, capacidades operativas y tecnologías de extracción disponibles. Se presentan las características del problema y se describe un enfoque de resolución basado en un modelo de programación lineal entera sobre una discretización del área geográfica del yacimiento. Los experimentos computacionales muestran que este enfoque es adecuado para la resolución práctica de este problema, y que permite generar soluciones que tienen en cuenta todas las restricciones involucradas.

**Palabras Clave:** hidrocarburos, yacimientos no convencionales, programación lineal entera

---

\* Impronta IT S.A., Argentina.

\*\* Departamento de Computación, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina, e Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.

\*\*\* Instituto de Cálculo, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina, y Departamento de Ingeniería Industrial, FCFM, Universidad de Chile, Chile.

\*\*\*\* Departamento de Computación, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina, e Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.

---

## 1. Introducción

---

Un *yacimiento petrolífero* es una acumulación natural de hidrocarburos (gas natural y petróleo, entre otros) en el subsuelo. La *explotación convencional* de hidrocarburos consiste en realizar perforaciones en el sustrato que llegan hasta estos depósitos, por medio de las cuales se extraen los fluidos en cuestión. Los pozos petrolíferos se dicen *surgentes* cuando los hidrocarburos alcanzan la superficie a través de la perforación. Cuando esto no sucede, se recurre a medios mecánicos para el bombeo desde el subsuelo.

Debido a la creciente escasez de reservas de hidrocarburos acumulados en yacimientos convencionales, la industria del petróleo y diversos gobiernos nacionales han tornado su atención en las últimas décadas a la explotación de *yacimientos no convencionales*. Por este término nos referimos a los yacimientos que no pueden ser explotados por medio de técnicas convencionales. Uno de los tipos de yacimientos más explorados está dado por las reservas de petróleo y gas natural almacenados en un tipo de rocas sedimentarias llamadas *pelitas (shale)* generalmente negras y con alto contenido de materia orgánica, conocidos como yacimientos de *shale gas* y *shale oil*.

La explotación de este tipo de yacimientos utiliza métodos de *fractura hidráulica*, por medio de los cuales se generan fracturas en la roca madre, ya que el hidrocarburo nunca migró de la roca generadora para acumularse en un reservorio convencional. Estas fracturas permiten concentrar el petróleo y el gas natural contenido en la roca para ser extraídos posteriormente. Dado que las fracturas se realizan inyectando agua y propantes químicos a alta presión, este tipo de explotación se vio envuelto desde sus inicios en controversias en cuanto a su impacto sobre el medio ambiente, y es habitual que los países con reservas de *shale gas* y *shale oil* pongan en marcha marcos regulatorios estrictos para su explotación. A pesar de que las primeras inyecciones de material para la extracción de hidrocarburos se remontan a la segunda mitad del siglo XIX, este tipo de métodos se usa en explotaciones extensivas recién desde principios del siglo XXI, principalmente en Estados Unidos. Además de las reservas en Estados Unidos, en la última década se han descubierto enormes reservas de *shale gas* y *shale oil* en Argentina, Canadá y China.

La explotación de un yacimiento hidrocarburífero plantea diversos desafíos para la investigación operativa, incluyendo problemas de localización de perforaciones, desarrollo de secuencias factibles de explotación, despliegue de equipos, y organización de la logística de la explotación, entre otros. En este trabajo

nos concentramos en un problema que surge al momento de optimizar la explotación de yacimientos de *shale gas* y *shale oil*, que denominamos *optimización del área de drenaje*, y que describimos en la próxima sección.

El presente trabajo está organizado del siguiente modo. En la Sección 2 damos una introducción a las técnicas de fractura hidráulica y, basados en esta descripción, definimos formalmente el problema de optimización a estudiar. La Sección 3 propone un algoritmo para este problema, basado en una discretización del yacimiento, y la Sección 4 presenta algunos resultados computacionales que muestran que el algoritmo es efectivo. Finalmente, la Sección 5 cierra el trabajo con algunas líneas para desarrollos futuros.

---

## 2. El problema

---

Describimos someramente en esta sección el proceso de explotación de un yacimiento *shale*. En primer lugar, se realizan varias perforaciones verticales en el subsuelo que llegan hasta la roca madre (ver Figura 1(a)). El sector en la superficie alrededor de las bocas de pozo se denomina *locación*, y habitualmente ocupa un área rectangular de entre algunas decenas y unos pocos cientos de metros por lado. Estos equipos son los únicos que se ven en la superficie, y habitualmente su instalación involucra obras de nivelación del suelo y construcción de caminos de acceso. Como consecuencia, las locaciones no pueden estar sobre cursos de agua, barrancos o en sitios montañosos.

Cada perforación atraviesa la roca madre, y a lo largo de esta perforación se realizan los procesos de inyección de materiales para lograr la fractura de la roca. Luego, se utilizan las mismas para la extracción de los hidrocarburos que migran hacia las zonas de fractura. De esta forma, desde una locación en la superficie se puede explotar un sector muy amplio en el subsuelo. La zona explotada a partir de una locación se denomina *pad*, y tiene una forma típicamente rectangular. Dependiendo de la cantidad de perforaciones verticales, del largo de las perforaciones horizontales y de la cantidad y características de las zonas de fractura, el pad resultante puede tener diversos tamaños. Por ejemplo, la Figura 1(b) muestra una vista vertical de una explotación con seis pozos horizontales y tres zonas de fractura por perforación.

Se representan habitualmente los pads por medio de rectángulos que contienen los pozos y las zonas de fractura. Dado que las zonas de fractura en la roca madre no se deben superponer, no debe existir más que pequeñas superposiciones entre los pads, visualizados sobre el mapa del yacimiento. Estas pequeñas superposiciones están permitidas porque el pad es una representación

simplificada en forma de rectángulo del arreglo de pozos y fracturas (correspondiente a una envolvente más una pequeña tolerancia), pero las fracturas no alcanzan a los bordes del pad. Al momento de realizar la explotación, se evita la superposición de fracturas en la roca madre calibrando las perforaciones.

Al momento de planificar la explotación de un yacimiento no convencional, uno de los principales problemas a resolver es dónde ubicar las locaciones y qué tipo de explotación realizar en cada una (lo cual determina el tipo y tamaño de los pads resultantes) con el objetivo de maximizar la producción y minimizar los costos y el impacto ambiental. Este problema se conoce con el nombre de *optimización del área de drenaje*, y como resultado se espera un *plan de explotación* que muestre las ubicaciones de locaciones y pads.

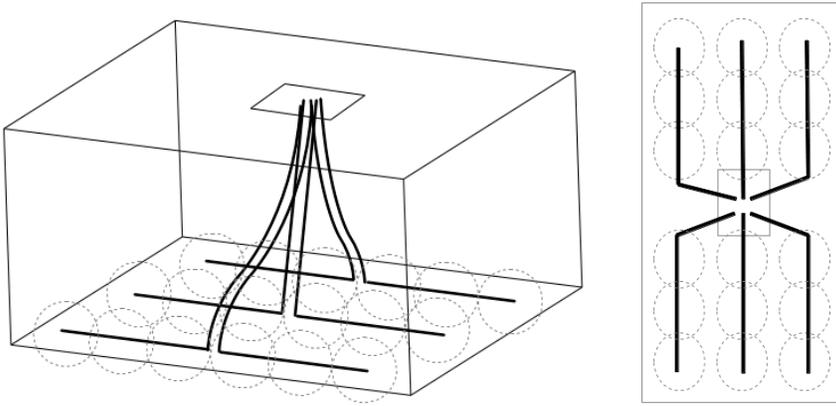


Figura 1: Vista esquemática (a) lateral y (b) vertical de un pad de 6 pozos horizontales. La locación está ubicada en la superficie, y el pad corresponde al área completa de explotación, ubicada en la roca madre en el subsuelo.

Formalmente, los datos de entrada del problema están dados por los siguientes elementos:

1. El yacimiento  $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ , que en este trabajo asumimos dado por un polígono en el plano (no necesariamente convexo). Todos los pads deben estar ubicados dentro del perímetro del yacimiento.
2. Una función  $\text{ogip} : Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  (*original gas in place*), que especifica la cantidad de *shale gas* esperada en cada punto del yacimiento, y el precio de venta  $\rho \in \mathbb{R}_+$  de cada unidad extraída. Dado un pad  $P \subseteq Y$  ubicado dentro del yacimiento, el gas total obtenido por explotar el pad está dado por  $\text{ogip}(P) := \int_P \text{ogip}(x) dx$ .
3. Un conjunto  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$  de configuraciones posibles de pads, que podemos utilizar para explotar el yacimiento. Para cada configuración

$S \in \mathcal{S}$ , tenemos estos datos:

- Largo  $lp_S \in \mathbb{R}_+$  y ancho  $ap_S \in \mathbb{R}_+$  del pad, en metros.
  - Largo  $ll_S \in \mathbb{R}_+$  y ancho  $al_S \in \mathbb{R}_+$  de la locación en metros, y asumimos que  $ll_S < lp_S$  y  $al_S < ap_S$ .
  - La locación está ubicada en el centro del pad, pero se puede mover algunos metros de este centro para evitar obstáculos geográficos. El parámetro de tolerancia  $tol_S \in \mathbb{R}_+$  especifica la cantidad máxima de metros que el centro de la locación se puede mover con relación al centro del pad.
  - Finalmente, se tiene el costo  $c_S \in \mathbb{R}_+$  de construcción del pad. Dado un pad  $P$  correspondiente a la configuración  $S$ , definimos su *margen neto* como  $neto(P) := \rho \times ogip(P) - c_S$ .
4. Un conjunto de obstáculos –habitualmente de índole geográfica– que las locaciones deben evitar. Consideramos que cada obstáculo está dado por un polígono en el plano, y ninguna locación se puede superponer con ningún obstáculo.
  5. Un ángulo  $\alpha \in [0, 2\pi]$  de explotación ideal, denominado *ángulo de esfuerzo horizontal mínimo*, que especifica la orientación aproximada que deben tener los pozos horizontales sobre el yacimiento con relación al norte geográfico. Como esta orientación es aproximada, se tiene una tolerancia  $\beta \in [0, 2\pi]$ , que especifica que todos los pads deben estar orientados en un ángulo comprendido en el intervalo  $[\alpha - \beta, \alpha + \beta]$ .

El problema consiste en hallar un conjunto de pads  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$  y un conjunto de locaciones  $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$  (de modo tal que la locación  $L_i$  corresponda al pad  $P_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ ) que maximice  $neto(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n neto(P_i)$  de modo tal que se cumplan las siguientes restricciones:

1. Todos los pads deben estar contenidos dentro del yacimiento, es decir  $P_i \subseteq Y$  para  $i = 1, \dots, n$ .
2. Como *restricción elástica*, los pads de la solución no se deben superponer, dado que corresponden a zonas de fractura en la roca madre. Esta restricción es elástica dado que se permiten superposiciones menores entre pads, por los motivos comentados más arriba.
3. Cada pad y su locación deben responder a las especificaciones de una configuración de  $\mathcal{S}$ . Es decir, para cada  $i = 1, \dots, n$  debe existir una configuración  $S \in \mathcal{S}$  tal que  $P_i$  tiene largo  $lp_S$  y ancho  $ap_S$ ,  $L_i$  tiene

largo  $ll_S$  y ancho  $al_S$  y su centro está a no más de  $tol_S$  metros del centro de  $P_i$ , y finalmente  $P_i$  y  $L_i$  están orientados en un mismo ángulo, el cual debe estar entre  $\alpha - \beta$  y  $\alpha + \beta$ .

4. Ninguna locación de  $\mathcal{L}$  se debe superponer con ningun obstáculo.

Por ejemplo, la Figura 2(a) muestra un yacimiento y los obstáculos dentro del yacimiento, y la Figura 2(b) muestra una solución factible para  $\alpha = \pi/4$  y para dos configuraciones posibles. Dado que la función ogip no siempre está bien determinada de antemano –y en ocasiones se trabaja con estimaciones poco fiables de esta función– alternativamente se puede solicitar que se maximice el área total cubierta con los pads propuestos, en lugar del beneficio neto total obtenido. El algoritmo que se presenta en la próxima sección permite utilizar cualquiera de estas dos funciones objetivo, o una combinación lineal de ambas.

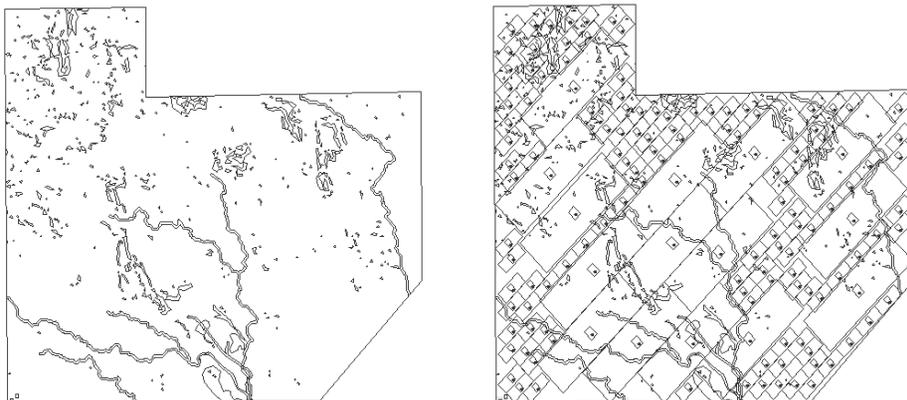


Figura 2: Ejemplo de (a) un yacimiento y obstáculos dentro del yacimiento y (b) una solución factible para esta instancia.

---

### 3. Algoritmo propuesto

---

El problema de optimización del área de drenaje descrito en la sección anterior admite más de un enfoque para su resolución. Dado que no resulta sencillo el modelado por medio de técnicas de programación lineal entera si se admite cualquier coordenada en el plano para las ubicaciones de los pads y de las locaciones, un enfoque natural está dado por el uso de técnicas metaheurísticas. Un enfoque directo utilizando algoritmos genéticos para representar las ubicaciones de los pads y penalizando en la función objetivo las

violaciones a los obstáculos puede resultar útil en este contexto. Otro enfoque puede provenir de técnicas de geometría computacional, en especial utilizando resultados de *tiling* del plano por medio de rectángulos, aunque en este caso no está claro cómo manejar adecuadamente las restricciones dadas por los obstáculos geográficos.

En este trabajo se optó por reducir el problema a un problema de conjunto independiente de peso máximo en un grafo dado por la discretización del área del yacimiento, que proporcionó buenos resultados en la práctica. Dado un grafo  $G = (V, E)$ , un *conjunto independiente* es un conjunto  $I \subseteq V$  de vértices tal que  $ij \notin E$  para todo  $i, j \in I$ . Si además tenemos una función de peso  $w : V \rightarrow \mathbb{R}$ , el *peso* del conjunto independiente  $I$  es  $w(I) := \sum_{i \in I} w_i$ . La motivación para este enfoque viene dada por el hecho de que el conjunto de pads de la solución conforma un conjunto de elementos no conflictivos entre sí, situación que es modelada adecuadamente por medio de conjuntos independientes en un grafo. Sin embargo, esta reducción trae aparejado un *costo de discretización*, que será mayor cuanto mayor sea el paso de discretización seleccionado.

A grandes rasgos, el algoritmo propuesto está compuesto por los siguientes puntos:

1. Discretización  $D \subseteq Y$  del área geográfica del yacimiento.
2. Generación de un conjunto  $\mathcal{T}$  de pads posibles sobre la base de la discretización  $D$ .
3. Planteo de un grafo  $G = (\mathcal{T}, E)$ , de modo tal que cada conjunto independiente de  $G$  corresponde a una solución factible del problema de optimización del área de drenaje. Los vértices del grafo reciben pesos adecuadamente definidos, de modo tal que el peso de cada conjunto independiente corresponde a la función objetivo de la solución factible.
4. Búsqueda de un conjunto independiente de peso máximo sobre  $G$  por medio de un modelo de programación lineal entera, para obtener una solución  $\mathcal{P}$  al problema.

Describimos a continuación cada punto del algoritmo. Para esto, sean  $\Delta_x, \Delta_y \in \mathbb{R}_+$  los *pasos de discretización* y sea  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$  un conjunto de ángulos posibles, de modo tal que  $\alpha_i \in [\alpha - \beta, \alpha + \beta]$  para  $i = 1, \dots, p$ . En nuestra implementación computacional, tomamos  $A = \{\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta\}$ .

**Discretización.** El primer paso del algoritmo consiste en generar una discretización  $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$  por filas y columnas del área del yacimiento, de modo tal que dos puntos consecutivos de una misma fila estén a distancia  $\Delta_x$

y dos puntos consecutivos de una misma columna estén a distancia  $\Delta_y$ . Para esto, se genera un reticulado de puntos en el plano con ángulo  $\alpha$ . Por ejemplo, la Figura 3(a) muestra una discretización para el yacimiento de la Figura 2.

**Generación de pads.** Para cada punto  $(x, y) \in D$  de la discretización, cada configuración  $S \in \mathcal{S}$  y cada ángulo  $i \in \{1, \dots, p\}$ , se incluye en el conjunto  $\mathcal{T}$  un pad  $P$  con configuración  $S$ , centrado en  $(x, y)$  y rotado en ángulo  $\alpha_i$ , siempre que el pad  $P$  (i) esté incluido completamente dentro de  $Y$  y (ii) su locación  $L$  no interseque con ningún obstáculo. Para determinar este último punto, se consideran como centros posibles de la locación el punto  $(x, y)$  y ocho puntos equiangulados sobre la circunferencia de centro  $(x, y)$  y radio  $\text{tol}_S$  (ver Figura 3(b)), y se considera que se cumple la condición (ii) si para alguno de estos puntos, la locación centrada en ese punto no interseca a ningún obstáculo. Este enfoque es arbitrario e incurre en un nuevo error de discretización, pero se observó que genera resultados aceptables en la práctica.

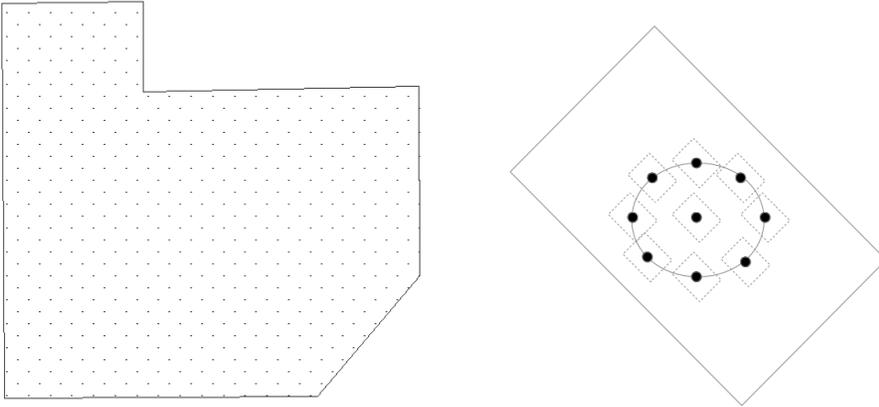


Figura 3: Ejemplo de (a) discretización del yacimiento presentado en la Figura 2 con  $\alpha = \pi/4$  y (b) centros posibles para la locación de un pad.

**Grafo de conflictos.** Se genera un grafo  $G = (\mathcal{T}, E)$  cuyos vértices están dados por todos los pads generados en el punto anterior, y cuyas aristas unen pares de pads con intersección no vacía. El conjunto  $E$  está compuesto por los pares  $(P_1, P_2)$  tales que existe algún punto  $(x, y) \in D$  con  $(x, y) \in P_1$  y  $(x, y) \in P_2$ . Esta definición de  $E$  permite que existan pares de pads con pequeñas superposiciones pero sin una arista que los una en  $G$ . Esto sucede cuando la intersección no contiene ningún punto de la discretización  $D$ , lo cual puede ocurrir sólo cuando la superposición es pequeña. De este modo, se maneja adecuadamente la restricción elástica de no superposición de pads.

**Obtención de una solución.** Se plantea y se resuelve la siguiente formulación de conjunto independiente con peso máximo sobre  $G$ , usando las restricciones

clique sobre todos los puntos de la discretización. En este modelo, se tiene una variable binaria  $x_P$  por cada pad  $P \in \mathcal{T}$ , de modo tal que  $x_P = 1$  si y sólo si el pad  $P$  se incluye en la solución.

$$\begin{aligned} & \text{máx} \quad \sum_{P \in \mathcal{T}} g(P)x_P \\ & \sum_{P:(x,y) \in \mathcal{T}} x_P \leq 1 \quad \forall (x,y) \in D \\ & x_P \in \{0,1\} \quad \forall P \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

El coeficiente  $g(P)$  asociado con la variable  $x_P$  en la función objetivo es  $g(P) = \text{neto}(P)$  si se optimiza el beneficio total (dado por la venta de la producción total esperada menos los costos de construcción), o bien  $g(P) = \text{area}(P)$  si se optimiza el área total cubierta. Dado que los puntos de la discretización  $D$  generan todas las cliques maximales de  $G$  (aunque no todo punto de  $D$  genera necesariamente una clique maximal), esta formulación incluye todas las restricciones de la formulación por cliques del problema de conjunto independiente de peso máximo, y se espera que sea más fuerte que una formulación con una restricción por arista. Dadas las características aproximadas del procedimiento, no resulta imprescindible en la práctica resolver en forma óptima el modelo de programación entera planteado, aunque la próxima sección muestra que en general este modelo se resuelve en forma exacta para tamaños de instancia razonables.

La generación de la discretización  $D$  es un paso clave dentro del algoritmo. Si los pasos de discretización  $\Delta_x$  y  $\Delta_y$  son demasiado grandes, entonces no se generará un número suficientemente grande y variado de pads en  $\mathcal{T}$  y la solución será de peor calidad, además de incluir potencialmente superposiciones entre los pads seleccionados, dado el modo en el que se generan las aristas de  $G$ . Sin embargo, a medida que  $\Delta_x$  y  $\Delta_y$  disminuyen se espera que estos efectos se vean minimizados, y que caigan por debajo de los errores de mediciones y de los parámetros de seguridad habituales en la industria hidrocarburiífera. A medida que  $\Delta_x$  y  $\Delta_y$  tienden a cero, la solución generada por este procedimiento tiende a la solución óptima. Los experimentos computacionales presentados en la próxima sección muestran que eligiendo adecuadamente los valores de  $\Delta_x$  y  $\Delta_y$  se obtienen buenos resultados.

---

## 4. Experimentos computacionales

---

Recogemos en esta sección algunos experimentos computacionales para comprobar la efectividad del algoritmo. El algoritmo fue implementado en

Java 7 utilizando el entorno eclipse 4.2.1 como ambiente de desarrollo. Se utilizó SCIP 3.0.1 [1] para resolver el modelo de programación lineal entera, que fue codificado utilizando el lenguaje de modelado ZIMPL [3]. Todos los experimentos fueron ejecutados en un computador con procesador Intel Core 2 Duo a 2.00 GHz y con 4 GB de memoria RAM.

Para la implementación, se discretizan también los valores de la función ogip, ya que no es habitual contar con una fórmula cerrada para esta función. Dado un conjunto finito de puntos  $D' \subseteq Y$  (que normalmente no coincide con  $D$ ), se tiene un valor aproximado  $f(c) = \int_B \text{ogip}(x)dx$  en un entorno  $B$  del punto  $c$ , para cada  $c \in D'$ . Dado un pad  $P$ , se estima  $\text{ogip}(P) \cong \sum_{c \in D' \cap P} f(c)$  en la implementación.

El Cuadro 1 muestra la cantidad de pads generados y la calidad de la solución en función de los parámetros  $\Delta_x$  y  $\Delta_y$  de discretización, que se fijan ambos en el mismo valor para estos experimentos. Estos experimentos fueron realizados sobre el yacimiento mostrado en la Figura 2, que está ubicado en el paraje conocido como Cañadón Amarillo, en la provincia de Mendoza (Argentina) y tiene 10.900 m de ancho y 9.335 m de largo, y para dos configuraciones con pads de  $1.080 \times 3.190$  m y  $700 \times 340$  m respectivamente. La segunda y tercera columnas muestran la cantidad  $|\mathcal{T}|$  de pads y la cantidad de restricciones del modelo de programación lineal entera, respectivamente. La columna “Tiempo” contiene el tiempo de resolución total, y la columna “MIP” contiene el tiempo que SCIP requirió para resolver el modelo de programación lineal entera, con un máximo de 5 minutos. Finalmente, la última columna muestra el gap de optimalidad de la solución final del modelo de programación lineal entera.

$\Delta_x = \Delta_y$ (m)	$ \mathcal{T} $	Restr.	Tiempo (seg)	MIP (seg)	Gap (%)
500	282	295	4.93	0.03	0.00
400	426	410	6.24	0.06	0.00
300	784	828	6.89	0.13	0.00
200	1745	1800	16.13	5.96	0.00
150	3126	3524	287.91	266.04	0.00
125	4510	5011	140.80	108.99	0.00
100	7047	7867	356.42	300.00	0.71

Cuadro 1: Cantidad de pads y tiempo de resolución del modelo de programación lineal entera en función del paso de discretización, para una instancia seleccionada.

Una conclusión interesante que se desprende del Cuadro 1 es la buena capacidad de resolución de los modelos de programación lineal entera que representan problemas de conjunto independiente de peso máximo sobre grafos

relativamente grandes. Esto no es habitual en la resolución práctica de problemas de conjunto independiente máximo (o su versión equivalente de clique máxima). En nuestro caso, esta situación favorable está dada porque se puede utilizar la formulación con restricciones por cliques maximales, en lugar de recurrir a la formulación estándar que tiene una restricción por cada arista del grafo. Es gracias a la posibilidad de plantear esta formulación en esta situación particular que el enfoque de resolución basado en programación lineal entera tiene posibilidades de éxito. El Cuadro muestra que los tiempos de resolución son muy aceptables y, cuando se llega al límite de tiempo impuesto, los gaps de optimalidad son bajos.

$\Delta_x = \Delta_y$ (m)	<i>LP</i> (área)	Solución (área)	<i>LP</i> (neto)	Solución (neto)
500	78.50 %	78.50 %	$4,71 \times 10^3$	$4,71 \times 10^3$
400	74.87 %	74.87 %	$4,43 \times 10^3$	$4,43 \times 10^3$
300	—	—	—	—
200	77.65 %	77.29 %	$4,61 \times 10^3$	$4,60 \times 10^3$
150	85.41 %	84.53 %	$5,06 \times 10^3$	$5,04 \times 10^3$
125	82.84 %	81.51 %	$4,92 \times 10^3$	$4,86 \times 10^3$
100	83.81 %	83.21 %	$5,00 \times 10^3$	$4,91 \times 10^3$

Cuadro 2: Valores de la relajación lineal y de la solución obtenida para las dos funciones objetivo, en función del paso de discretización y para una instancia seleccionada. Las soluciones para  $\Delta_x = \Delta_y = 300$  contienen demasiadas superposiciones entre pads por errores de discretización, y no fueron consideradas aceptables. Todas las ejecuciones excepto la correspondiente a la última fila terminaron antes de 5 minutos hallando la solución óptima.

El Cuadro 2 muestra los valores de las dos funciones objetivo en función del paso de discretización para la misma instancia que el Cuadro 1. La segunda y tercera columnas corresponden a optimizar el área total cubierta, mientras que las últimas dos columnas corresponden a optimizar el beneficio neto total considerando la función ogip y el costo de construcción de los pads. En el caso del área, se muestra el porcentaje del área total cubierta, en lugar de los valores absolutos en metros cuadrados, dado que proporcionan una mejor idea de la performance del modelo. Como se esperaba, el resultado de la optimización tiende a mejorar a medida que se incrementa el tamaño de la discretización (correspondiente a pasos cada vez menores) aunque, por la naturaleza combinatoria del problema, esta mejora no es monótona. Además de la función objetivo de la mejor solución encontrada (que es óptima excepto para la última fila del cuadro), se muestra en las columnas encabezadas con “*LP*” el valor óptimo de la relajación lineal. Puede verse que la relajación lineal es

muy buena para la formulación utilizada y el tipo de instancias de conjunto independiente de peso máximo obtenidas por el procedimiento descrito en la sección anterior, aunque esta relajación no tiene todos sus extremos enteros, como se desprende de las últimas filas del cuadro. Para esta formulación, esta afirmación equivale a constatar que el grafo generado a partir del procedimiento no es perfecto en general [2], dado que si lo fuera, la relajación lineal tendría extremos enteros.

Finalmente, el Cuadro 3 muestra el resumen de ejecuciones para otras instancias, con un tiempo máximo de 10 minutos para la resolución del modelo de programación entera. Las dos primeras instancias corresponden a yacimientos cuyo perímetro forma una figura convexa, mientras que las restantes instancias presentan concavidades. Las últimas dos filas del cuadro corresponden a yacimientos con perímetros extremadamente cóncavos, seleccionados para testear el comportamiento del algoritmo en estas condiciones. En todos los casos se usó como función objetivo la maximización del área cubierta, y el resultado se muestra (en porcentaje del área total cubierta) en la séptima columna. El cuadro muestra que los resultados son satisfactorios dentro de tiempos de ejecución razonables.

Instancia	$ \mathcal{T} $	Restr.	Tiempo (seg)	MIP (seg)	Gap (%)	% área	$ \mathcal{S} $
sqr.01	2819	1881	9.35	1.93	0.00	85.82	142
sqr.02	8497	5774	87.28	66.90	0.00	93.78	233
cnc.01	5002	6396	96.53	52.69	0.00	82.43	50
cnc.02	8176	8695	693.05	600.00	9.31	78.79	47
cnc.03	3237	4605	51.57	27.03	0.00	81.72	230
ring.01	2402	1631	5.19	0.66	0.00	94.11	284

Cuadro 3: Resumen de la ejecución para instancias con diversas características. Para la instancia cnc.02 se llegó al límite de tiempo de 10 minutos de ejecución para la resolución del modelo de programación entera.

---

## 5. Conclusiones

---

Se propuso en este trabajo un algoritmo basado en el problema de conjunto independiente máximo para el problema de optimización del área de drenaje en yacimientos no convencionales de hidrocarburos. Una implementación directa de este procedimiento permitió resolver satisfactoriamente instancias reales con tiempos de resolución aceptables y gaps de optimalidad muy buenos para el modelo de programación lineal entera que se resuelve como parte del

algoritmo. En particular, la reducción de una versión discretizada del problema al problema de conjunto independiente de peso máximo sobre un grafo permitió su formulación por medio de un modelo de programación lineal entera cuyo poliedro tiene buenas propiedades y permite hallar buenas soluciones.

Como se mencionó antes, el algoritmo incurre en errores de discretización, y no es factible desde el punto de vista computacional solicitar pasos de discretización arbitrariamente pequeños, dado que esto impacta en la cantidad de pads generados y en el tiempo de resolución del modelo de programación lineal entera.

Sería interesante analizar cómo depende la calidad de la solución en función del paso de discretización. En particular, sería muy relevante encontrar cotas que garanticen cierta calidad de aproximación en función de este parámetro. Este problema puede ser muy difícil de atacar con herramientas estándar de geometría computacional dados los detalles que involucra, pero quizás se puedan considerar simplificaciones (yacimientos convexos, no considerar los obstáculos, considerar un único ángulo de inclinación para los pads, etc.) para permitir un análisis que arroje información sobre el comportamiento del problema.

Otra línea interesante para trabajar sobre este problema es el planteo y análisis de nuevos algoritmos de optimización. En particular, se podrían contemplar algoritmos basados en técnicas metaheurísticas, para analizar su comportamiento en la práctica en comparación con el método propuesto en este trabajo. Es interesante el desarrollo de algoritmos metaheurísticos, porque podrían evitar los problemas dados por la discretización, aunque eventualmente al costo de un mayor tiempo de ejecución o del ajuste de sus parámetros. En conjunto, este tipo de estudios permitiría tener una comprensión más completa sobre las técnicas más adecuadas para encarar la resolución de este problema en la práctica.

**Agradecimientos.** Los autores agradecen la colaboración de Pablo Pazos por sus comentarios que ayudaron a clarificar el contenido geológico del presente trabajo.

## Referencias

- [1] T. Achterberg, SCIP: solving constraint integer programs. *Mathematical Programming Computation*, 1-1, 1–41, 2009.
- [2] M. Grötschel, L. Lovász y A. Schrijver, Geometric algorithms and combinatorial optimization. *Springer-Verlag*, 1993.
- [3] T. Koch, Rapid Mathematical Programming. PhD Thesis, Technische Universität Berlin, 2004.