Investigación de operaciones, modelos matemáticos y optimización

Guillermo Durán

Centro de Gestión de Operaciones
Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile

Seminario JUNAEB-DII
Enero de 2006

¿Qué es la Investigación de Operaciones?

- Una definición que se acerca mucho a la realidad sería “la ciencia de la toma de decisiones”. Conviven en esta disciplina profesionales de las más diversas ramas: ingenieros, matemáticos, computadores, economistas. Todos ellos deben aprender una técnica fundamental: el modelamiento matemático.

Un problema de producción

- Un carpintero desea determinar la cantidad de sillas y mesas que debe producir el próximo día para maximizar su ganancia.
- Cuenta con $38m^2$ de madera y dispone de $7,5$ hs/hombre.
- Se requiere de $4m^2$ y 1 hora/hombre para confeccionar cada silla; y de $9,5m^2$ de madera y 1 hora/hombre para confeccionar cada mesa.
- Se asume que se vende todo lo que se produce y que el beneficio por silla es de \$4, mientras que el beneficio por mesa es de $\$8,5$.
- ¿Cuántas sillas y mesas debe producir?

¿Qué significa hacer un modelo matemático?

- Hacer un modelo matemático es interpretar lo mejor posible la realidad a través de ciertas fórmulas.
- Por ejemplo, en el problema de producción planteado, podemos definir una variable x_1, que medirá el número de sillas, y una variable x_2, que medirá el número de mesas.
- Veamos como relacionar estas variables para cumplir con las condiciones del problema.

El modelo de las sillas y las mesas

- ¿Cómo decimos en fórmulas matemáticas que el máximo número de metros cuadrados que podemos usar es 38?

$$4 * x_1 + 9,5 * x_2 \leq 38$$

- ¿Cómo decimos en fórmulas matemáticas que el máximo número de horas/hombre que podemos usar es 7,5?

$$x_1 + x_2 \leq 7,5$$

El modelo de las sillas y las mesas

- ¿Cómo decimos en fórmulas matemáticas que el máximo número de metros cuadrados que podemos usar es 38?

$$4 * x_1 + 9,5 * x_2 \leq 38$$

- ¿Cómo decimos en fórmulas matemáticas que el máximo número de horas/hombre que podemos usar es $7,5$?

$$x_1 + x_2 \leq 7,5$$

El modelo de las sillas y las mesas

- ¿Cuál es la función de utilidad que tenemos que maximizar?

$$\text{máx} \quad 4 * x_1 + 8,5 * x_2$$

- Por último, el número de sillas y de mesas debe ser positivo:

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0$$

El modelo de las sillas y las mesas

- ¿Cuál es la función de utilidad que tenemos que maximizar?

$$\text{máx} \quad 4 * x_1 + 8,5 * x_2$$

- Por último, el número de sillas y de mesas debe ser positivo:

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0$$

Resumiendo: tenemos un modelo de programación lineal

$$\text{máx} \quad 4 * x_1 + 8,5 * x_2$$

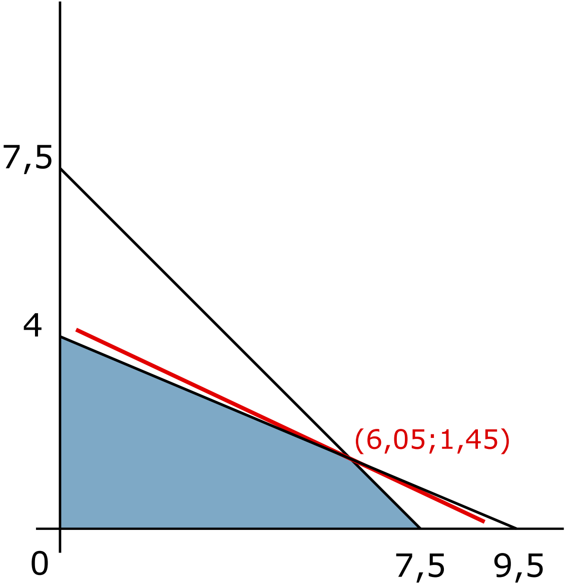
Sujeto a:

$$4 * x_1 + 9,5 * x_2 \leq 38$$

$$x_1 + x_2 \leq 7,5$$

$$x_1 \geq 0; \;\; x_2 \geq 0$$

Gráficamente...



Algo anda mal...

- No podemos producir $6,05$ sillas y $1,45$ mesas!!
- ¿Qué le falta al modelo?
- Las variables tienen que tomar valores enteros: $0, 1, 2, 3, \ldots$

Algo anda mal...

- No podemos producir $6,05$ sillas y $1,45$ mesas!!
- ¿Qué le falta al modelo?
- Las variables tienen que tomar valores enteros: $0, 1, 2, 3, \ldots$

Algo anda mal...

- No podemos producir $6,05$ sillas y $1,45$ mesas!!
- ¿Qué le falta al modelo?
- Las variables tienen que tomar valores enteros: $0, 1, 2, 3, \ldots$

Tenemos entonces un modelo de programación lineal **entera**

$$\text{máx} \quad 4 * x_1 + 8,5 * x_2$$

Sujeto a:

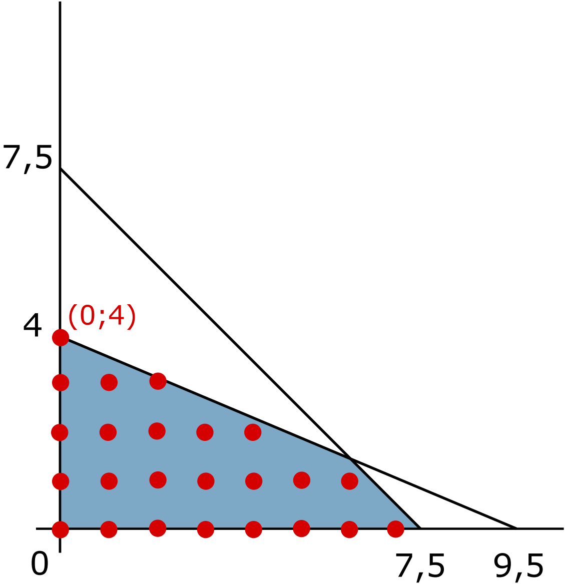
$$4 * x_1 + 9,5 * x_2 \leq 38$$

$$x_1 + x_2 \leq 7,5$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0$$

x_1 y x_2 son enteras.

Veamos entonces la nueva solución...



El problema de los 4 colores

- Pintar un mapa es asignarles colores a sus regiones de modo que 2 regiones limítrofes (con al menos un borde en común) tengan diferente color.
- Dibujen un mapa de modo de que no se pueda pintar con 3 colores.
- Dibujen un mapa de modo de que no se pueda pintar con 4 colores.

El problema de los 4 colores

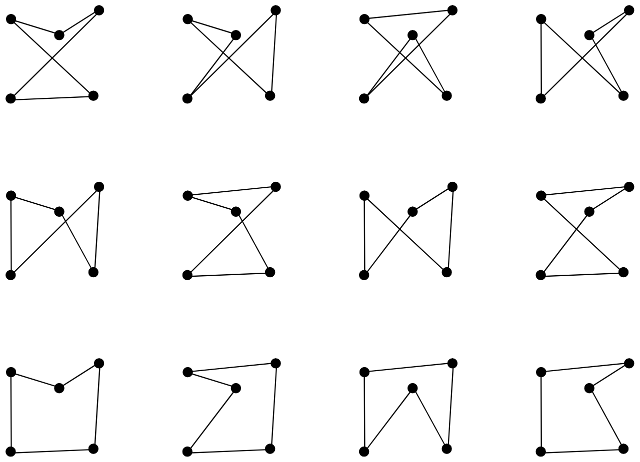
- Pintar un mapa es asignarles colores a sus regiones de modo que 2 regiones limítrofes (con al menos un borde en común) tengan diferente color.
- Dibujen un mapa de modo de que no se pueda pintar con 3 colores.
- Dibujen un mapa de modo de que no se pueda pintar con 4 colores.

El problema de los 4 colores

- Pintar un mapa es asignarles colores a sus regiones de modo que 2 regiones limítrofes (con al menos un borde en común) tengan diferente color.
- Dibujen un mapa de modo de que no se pueda pintar con 3 colores.
- Dibujen un mapa de modo de que no se pueda pintar con 4 colores.

¿Qué es un problema combinatorial?

Es un problema en el que deben contarse una cierta cantidad de casos, configuraciones, conjuntos, etc.



Ejemplos de problemas combinatoriales

- El problema de programación entera y el problema de los 4 colores son ejemplos de problemas combinatorios.
- Otro ejemplo:

  ¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse ustedes en esta sala? ¿Será difícil hacer esa cuenta?

Hagámosla juntos...

¿Qué es un problema de optimización?

- Es un problema en el cual, de un conjunto de objetos cada uno con un "valor", se busca el objeto con "mejor" valor.
- Los criterios de "mejor" pueden ser muy diversos.
- 10 pares de zapatos con precios y calidades diferentes. ¿Cuál compro?

¿Qué es un problema de optimización?

- Es un problema en el cual, de un conjunto de objetos cada uno con un "valor", se busca el objeto con "mejor" valor.
- Los criterios de "mejor" pueden ser muy diversos.
- 10 pares de zapatos con precios y calidades diferentes. ¿Cuál compro?

¿Qué es un problema de optimización?

- Es un problema en el cual, de un conjunto de objetos cada uno con un "valor", se busca el objeto con "mejor" valor.
- Los criterios de "mejor" pueden ser muy diversos.
- 10 pares de zapatos con precios y calidades diferentes. ¿Cuál compro?

¿Qué es un problema de optimización combinatorial?

- Es un problema donde se busca la mejor opción entre un conjunto de un número finito de elementos.
- Los elementos pueden ser generados mediante reglas que definen el problema.

Ejemplos de problemas de optimización combinatorial

- Ruteo de vehículos.
- Planificación de la producción.
- Asignación de tareas.
- Localización.
- Procesamiento de tareas.
- Cortes de materia prima.
- Asignación de tripulaciones.
- Planificación de vuelos.
- Licitaciones.

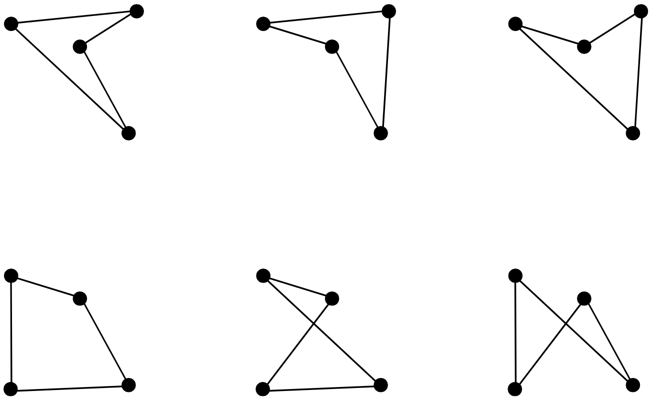
Problema del vendedor viajero (PVV)

Un viajero debe recorrer cierta cantidad de ciudades y volver finalmente a la ciudad donde vive.

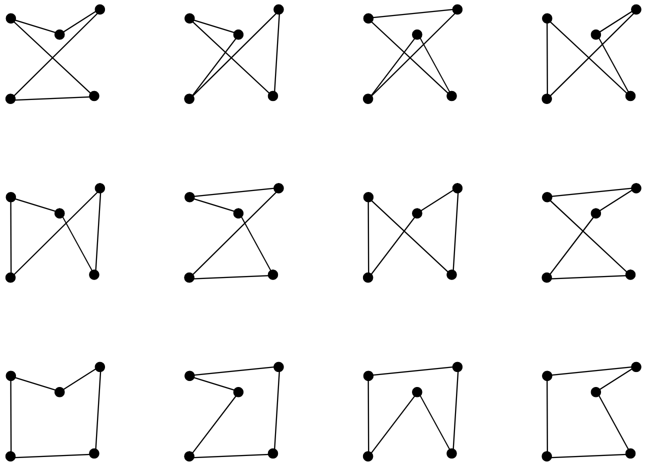
¿Cuál es el mejor recorrido?

- El más corto (también podríamos preferir el más rápido).

Recorridos con cuatro ciudades



Recorridos con cinco ciudades



Recorridos con más de cinco ciudades

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 10 ciudades?

$$181440$$

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 50 ciudades?

3041409320171337804361260816606476884437764156896
05120000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 100 ciudades?

4666310772197207634084961942813335024535798413219
0810734296481947608799996614957804470731988078259
1431268489604136118791255926054584320000000000000
000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con n ciudades?

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Recorridos con más de cinco ciudades

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 10 ciudades?

  181440

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 50 ciudades?

  3041409320171337804361260816606476884437764156896
  0512000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 100 ciudades?

  4666310772197207634084961942813335024535798413219
  0810734296481947608799996614957804470731988078259
  1431268489604136118791255926054584320000000000000
  00000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con n ciudades?

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Recorridos con más de cinco ciudades

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 10 ciudades?

  181440

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 50 ciudades?

  3041409320171337804361260816606476884437764156896
  05120000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 100 ciudades?

  4666310772197207634084961942813335024535798413219
  0810734296481947608799996614957804470731988078259
  1431268489604136118791255926054584320000000000000
  000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con n ciudades?

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Recorridos con más de cinco ciudades

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 10 ciudades?

  $$181440$$

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 50 ciudades?

  30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 100 ciudades?

  466631077219720763408496194281333502453579841321908107342964819476087999966149578044707319880782591431268489604136118791255926054584320000000000000000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con n ciudades?

  $$\frac{(n-1)!}{2}$$

Recorridos con más de cinco ciudades

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 10 ciudades?

$$181440$$

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 50 ciudades?

  304140932017133780436126081660647688443776415689605120000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 100 ciudades?

  466631077219720763408496194281333502453579841321908107342964819476087999966149578044707319880782591431268489604136118791255926054584320000000000000000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con n ciudades?

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Recorridos con más de cinco ciudades

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 10 ciudades?

  $$181440$$

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 50 ciudades?

  3041409320171337804361260816606476884437764156896
  05120000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 100 ciudades?

  4666310772197207634084961942813335024535798413219
  0810734296481947608799996614957804470731988078259
  1431268489604136118791255926054584320000000000000
  000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con n ciudades?

  $$\frac{(n-1)!}{2}$$

Recorridos con más de cinco ciudades

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 10 ciudades?

$$181440$$

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 50 ciudades?

  3041409320171337804361260816606476884437764156896
  05120000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 100 ciudades?

  4666310772197207634084961942813335024535798413219
  0810734296481947608799996614957804470731988078259
  1431268489604136118791255926054584320000000000000
  000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con n ciudades?

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Recorridos con más de cinco ciudades

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 10 ciudades?

$$181440$$

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 50 ciudades?

  3041409320171337804361260816606476884437764156896
  05120000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con 100 ciudades?

  4666310772197207634084961942813335024535798413219
  0810734296481947608799996614957804470731988078259
  1431268489604136118791255926054584320000000000000
  000000000

- ¿Cuántos recorridos tengo en un caso con n ciudades?

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

¿Cómo se resuelve un problema de optimización combinatorial?

Diferentes opciones:

- Contando todos los casos y eligiendo el mejor: fuerza bruta.
- Encontrando una solución "relativamente buena" pero sin tener garantía de que es la mejor.
- Encarando problemas más chicos pero con la certeza de que encuentro la solución óptima.
- Buscando mediante métodos "inteligentes" encontrar la solución óptima, aún en problemas grandes.

¿Cómo se resuelve un problema de optimización combinatorial?

Diferentes opciones:

- Contando todos los casos y eligiendo el mejor: fuerza bruta.
- Encontrando una solución "relativamente buena" pero sin tener garantía de que es la mejor.
- Encarando problemas más chicos pero con la certeza de que encuentro la solución óptima.
- Buscando mediante métodos "inteligentes" encontrar la solución óptima, aún en problemas grandes.

¿Cómo se resuelve un problema de optimización combinatorial?

Diferentes opciones:

- Contando todos los casos y eligiendo el mejor: fuerza bruta.
- Encontrando una solución "relativamente buena" pero sin tener garantía de que es la mejor.
- Encarando problemas más chicos pero con la certeza de que encuentro la solución óptima.
- Buscando mediante métodos "inteligentes" encontrar la solución óptima, aún en problemas grandes.

¿Cómo se resuelve un problema de optimización combinatorial?

Diferentes opciones:

- Contando todos los casos y eligiendo el mejor: fuerza bruta.
- Encontrando una solución “relativamente buena” pero sin tener garantía de que es la mejor.
- Encarando problemas más chicos pero con la certeza de que encuentro la solución óptima.
- Buscando mediante métodos “inteligentes” encontrar la solución óptima, aún en problemas grandes.

Fuerza bruta

- Este enfoque consiste en listar todos los casos y para cada uno calcular su costo, identificando de este modo el caso de costo más conveniente.
- Podríamos pensar que como tenemos computadores muy eficientes y rápidos no tendremos inconveniente en resolver problema tan grandes como se nos presenten.
- ¡Error! Estamos ante gigantes enormemente más fuertes que nuestros poderosos computadores.

Fuerza bruta

- Este enfoque consiste en listar todos los casos y para cada uno calcular su costo, identificando de este modo el caso de costo más conveniente.
- Podríamos pensar que como tenemos computadores muy eficientes y rápidos no tendremos inconveniente en resolver problema tan grandes como se nos presenten.
- ¡Error! Estamos ante gigantes enormemente más fuertes que nuestros poderosos computadores.

Fuerza bruta

- Este enfoque consiste en listar todos los casos y para cada uno calcular su costo, identificando de este modo el caso de costo más conveniente.
- Podríamos pensar que como tenemos computadores muy eficientes y rápidos no tendremos inconveniente en resolver problema tan grandes como se nos presenten.
- ¡Error! Estamos ante gigantes enormemente más fuertes que nuestros poderosos computadores.

Un caso con cincuenta ciudades

- Supongamos que quiero resolver el problema del viajante de comercio para 50 ciudades.
- ¿Cuánto creen que tardará un buen computador en evaluar todos los posibles recorridos?

¡Arriesguen!

1 minuto, 1 hora, 1 día, 1 año, 1 siglo, más de 1 siglo.

Resultados

- 31557600000 cantidad de segundos en un siglo.
- 6000000000 personas en el mundo (una computadora por persona).
- 1000000000000 (un billón) de evaluaciones por segundo.
  - 1.606274.093599.924056.519539.306224 cantidad de siglos en evaluar todos los casos para 50 ciudades.
  - 200000000 edad del universo en siglos según algunas teorías cosmológicas.

Métodos aproximados: Heurísticos.

- Tratan de orientarse en el universo de todas las posibles soluciones en busca de la mejor.
- Un inconveniente que tienen es que en la mayoría de los problemas combinatoriales en general no puedo estar seguro de que encontré la mejor solución.

Métodos aproximados: Heurísticos.

- Tratan de orientarse en el universo de todas las posibles soluciones en busca de la mejor.
- Un inconveniente que tienen es que en la mayoría de los problemas combinatoriales en general no puedo estar seguro de que encontré la mejor solución.

Métodos exactos.

- Intentan descartar familias enteras de posibles soluciones para acelerar la búsqueda y llegar a la conclusión de que la mejor solución que encontraron en realidad es la óptima.
- Un inconveniente que tienen es que son muy lentos, pudiendo resolver sólo problemas pequeños o problemas grandes con ciertas características particulares.
- ¿Cómo trabajan los métodos exactos “inteligentes”?

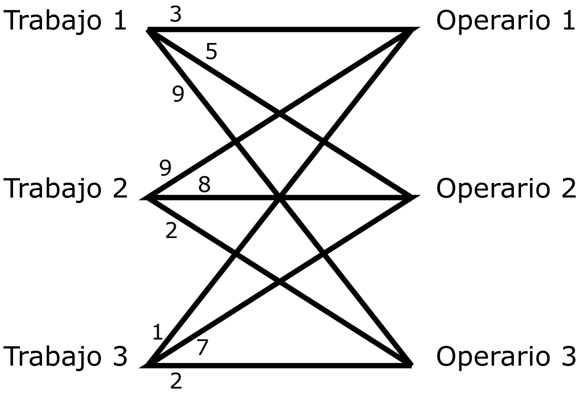
Métodos exactos.

- Intentan descartar familias enteras de posibles soluciones para acelerar la búsqueda y llegar a la conclusión de que la mejor solución que encontraron en realidad es la óptima.
- Un inconveniente que tienen es que son muy lentos, pudiendo resolver sólo problemas pequeños o problemas grandes con ciertas características particulares.
- ¿Cómo trabajan los métodos exactos "inteligentes"?

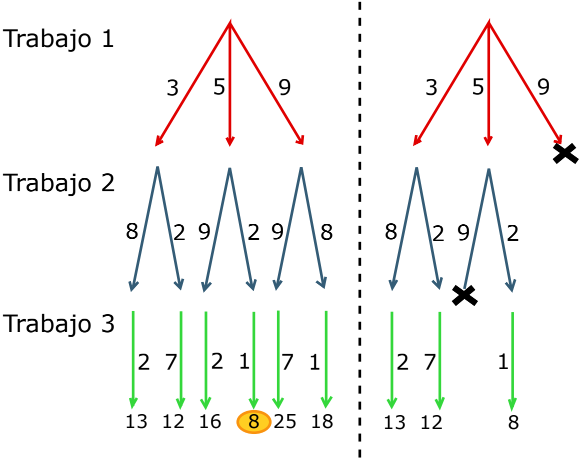
Métodos exactos.

- Intentan descartar familias enteras de posibles soluciones para acelerar la búsqueda y llegar a la conclusión de que la mejor solución que encontraron en realidad es la óptima.
- Un inconveniente que tienen es que son muy lentos, pudiendo resolver sólo problemas pequeños o problemas grandes con ciertas características particulares.
- ¿Cómo trabajan los métodos exactos "inteligentes"?

Asignemos un operario distinto a cada uno de los siguientes 3 trabajos



Asignemos un operario distinto a cada uno de los siguientes 3 trabajos

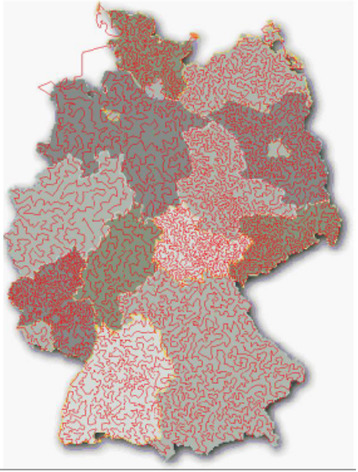


Soluciones óptimas para el PVV

- En 1954 Dantzig, Fulkerson y Johnson resolvieron un caso de 49 ciudades del PVV.
- "Resolvieron" significa que D,F&J estaban seguros de que la solución que presentaban era la mejor de un conjunto de 60 decillones de soluciones posibles.

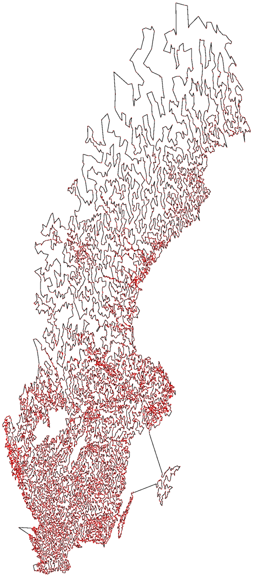

Solución record (en 2001) de 15112 ciudades de Alemania

- Resuelta en una red de 110 máquinas en las universidades de Rice y Princeton, por Applegate, Bixby, Chvátal y Cook.
- Tiempo total de cómputo de 22.6 años de una PC de 500 MHz.
- Longitud total de aproximadamente 66.000 Km (Un poco más de una vuelta y media a la tierra por el ecuador).



Solución record (en 2004) de 24978 ciudades de Suecia

- Resuelta por Applegate, Bixby, Chvátal, Cook y Helsgaun.
- Longitud total de aproximadamente 72.500 Km.



Solución record actual (2005)

- Cook, Espinoza y Goycoolea: 33810 ciudades!

Agradecimientos

- A los doctores Flavia Bonomo y Pablo Coll, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, por facilitarme parte del material para la preparación de esta charla.