

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

**OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA APLICADA A MODELOS DE
INVERSIÓN-GENERACIÓN ELÉCTRICA**

FERNANDO ORDÓÑEZ PIZARRO

Profesor Guía : Sr. Alejandro Jofré
Profesores de Comisión : Sr. Jorge Amaya
Sr. Roberto Cominetti
Sr. Miguel Vergara

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO
DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO**

SANTIAGO – CHILE

Agosto 1997

OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA APLICADA A MODELOS DE INVERSIÓN-GENERACIÓN ELÉCTRICA

El objetivo de esta memoria es plantear y resolver modelos de inversión para el sector de generación eléctrico chileno. Los trabajos realizados consistieron en representar matemáticamente el problema de inversión del sector eléctrico chileno y realizar desarrollos algorítmicos y computacionales para obtener respuestas numéricas al modelo.

El sistema eléctrico chileno enfrenta una demanda que crecerá a una tasa cercana a un 8% anual por los próximos diez años. Se deberán realizar grandes inversiones para atender esta creciente demanda. Se supone que el sector eléctrico realizará las inversiones de forma que se minimicen los costos en inversión más los costos de operación. El problema de inversiones depende de variables aleatorias, como lo son la hidrología futura, la demanda futura y la configuración futura del parque generador. Es por esto que se debe abordar la modelación del problema de inversión en el sector eléctrico utilizando optimización estocástica. En este trabajo se presenta una modelación del problema de inversión del sistema eléctrico chileno utilizando un modelo de recurso multietapas con variables enteras. Se demuestra que este problema de optimización tiene solución.

Para resolver el problema de recurso con variable entera en la primera etapa se creó un algoritmo que mezcla el algoritmo de descomposición de Benders con un "branch and bound" en la primera etapa. Se demostró que este algoritmo converge y también se construyó una versión en paralelo de este algoritmo.

Se obtuvieron respuestas numéricas para algunas simplificaciones del modelo presentado. Una de ellas consistió en resolver un problema de recurso en dos etapas con variables enteras en la primera. Para este modelo se desarrolló un algoritmo y se implementó computacionalmente. Además se construyó e implementó una versión paralela de este algoritmo. La versión de este como problema con recurso lineal y multietapas ha sido abordada utilizando el programa MSLiP.

Los resultados muestran que en general el agregar un escenario al maestro de un problema de recurso reduce los tiempos cuando el problema no es de recurso completo. En cuanto al problema de inversión, los resultados muestran que las decisiones de inversión dependen de la cantidad de escenarios hidráulicos y de la demanda fuertemente. Además se observa que es muy sensible la solución de un problema a incluir variables de inversión enteras. Por último una modelación multietapas representa un aumento de tiempo de ejecución mientras que la implementación en paralelo reduce dramáticamente el tiempo.

El modelo de inversiones presentado y sus algoritmos de solución representan el primer esfuerzo por modelar conjuntamente la inversión y operación de un sistema eléctrico.

Agradecimientos

A lo largo del periodo durante el cual he realizado esta memoria son muchas las personas que se han visto de una u otra forma involucradas en este proyecto y a las que en este momento quiero recordar.

En primer lugar deseo destacar el hecho que esta memoria surgió gracias a un proyecto de investigación propuesto por Miguel Vergara, y patrocinado entonces por Pehuenche S.A.

Quiero agradecer a las personas que integran el Departamento de Ingeniería Matemática de la Universidad de Chile, por la formación que me han entregado. En especial a mi profesor guía, Alejandro Jofré y a los profesores de comisión: Jorge Amaya, Roberto Cominetti y Miguel Vergara quienes han tenido la amabilidad de revisar esta memoria.

Quiero agradecer especialmente la ayuda dada por Francisco Ortega en el desarrollo de la versión paralela del algoritmo y a Héctor Augusto a la hora de obtener resultados. Además recordar Ema Blanch y Ana Lazo por tener la gentileza de revisar la ortografía de este trabajo.

A mis compañeros de carrera que han significado para mi un constante apoyo tanto en el ambito academico como personal. Y en general a mis amigos, que me han tenido que soportar durante el trabajo de memoria y que con pequeños empujones me han dado ánimo para terminar.

Quiero especialmente agradecer a una persona muy importante para mi, Loreto Prado, por su agotable paciencia, su cariño y su excelente disposición en los momentos en que más he necesitado apoyo.

Finalmente, a mi familia, en especial a mis padres, por el hogar en que me han criado y el hecho que la persona que soy es gracias a ellos.

A mi familia, en especial a Pizarro.

Índice General

1	Introducción	1
1.1	El Sector Eléctrico	1
1.2	Objetivos Generales	2
1.3	Objetivos Específicos	2
1.3.1	Modelamiento de la Operación del Sector Eléctrico	2
1.3.2	Uso de la Optimización Estocástica	3
1.3.3	Modelamiento del Problema de Inversión del Sector Eléctrico . . .	4
1.3.4	Resolución de Problema de Optimización Estocástica Mixto . . .	4
2	Modelos Existentes en el Sector Eléctrico	5
2.1	Características de los Modelos de Operación Existentes	6
2.1.1	Modelo GOL	7
2.1.2	Modelo OMSIC	7
2.1.3	Modelo SDDP	8
2.2	Forma Actual de Abordar el Problema de Inversión	8
3	Optimización Estocástica	10
3.1	Optimización Bajo Incertidumbre	10

3.2	Resultados de Existencia	12
3.3	Modelos Anticipativos y Adaptivos	14
3.4	Modelo de Recurso	15
3.5	Abordando el Problema de Optimización Estocástica	16
3.6	Algoritmos en Optimización Estocástica	17
3.6.1	Algoritmo de Descomposición de Benders	18
3.6.2	Algoritmo de Descomposición Anidada de Benders	22
3.6.3	Algoritmo de Descomposición de Lagrange	25
4	El Modelo de Decisión de Inversiones	28
4.1	Introducción	28
4.2	Definición del Problema	29
4.3	Formulación del Problema	30
4.4	El Sistema de Generación Eléctrico	33
4.5	Descripción de las Variables	34
4.5.1	Variables de Inversión	34
4.5.2	Variables de Operación	35
4.5.3	Variables Aleatorias	37
4.6	Función Objetivo	38
4.7	Restricciones	39
4.7.1	Restricciones de Inversión	39
4.7.2	Restricciones de Generación	40
4.7.3	Restricciones de Satisfacción de Demanda	41
4.7.4	Restricciones de Flujo de Agua	46

4.7.5	Restricciones de Riego	47
4.7.6	Restricciones de Transmisión	47
4.8	Formulación Completa	48
4.9	Existencia de Solución en el Problema de Decisión de Inversiones	50
5	Algoritmos e Implementación	54
5.1	Simplificaciones al Modelo	54
5.2	Sensibilidades en la Modelación	57
5.2.1	Modelo Multietapas	58
5.2.2	Modelo Multiembalse	59
5.3	Programa MSLiP	60
5.4	Descomposición de Benders con Variable Entera	60
5.5	Paralelización del Algoritmo	63
5.6	Interpretación Eléctrica de Algoritmo de Descomposición de Benders	65
5.7	Definición de Ejemplos	67
6	Resultados y Conclusiones	70
6.1	Estudio 1	71
6.2	Estudio 2	73
6.3	Estudio 3	77
6.4	Estudio 4	77
6.5	Conclusiones	78
6.5.1	Problema de Operación del Sector Eléctrico	79
6.5.2	Optimización Estocástica	79

6.5.3	Problema de Inversión del Sector Eléctrico	80
6.5.4	Solución Problema Mixto	80
6.6	Futuras direcciones	82
A	Modelo Implementado	84
A.1	Variables	84
A.1.1	Variables de Inversión	84
A.1.2	Variables de Operación	85
A.1.3	Variables Aleatorias	86
A.2	Restricciones	87
A.2.1	Función Objetivo	87
A.2.2	Restricciones de Inversión	87
A.2.3	Restricciones de Operación	88
B	Resultados Problema de Inversiones	92

Capítulo 1

Introducción

El tema central de esta memoria consiste en desarrollar modelos matemáticos y realizar las implementaciones necesarias para enfrentar el problema de inversiones en el sector eléctrico.

1.1 El Sector Eléctrico

El sistema interconectado central (SIC) hoy en día está formado por cinco grandes empresas generadoras de energía eléctrica y un sistema de transmisión. Este sistema es responsable de abastecer la demanda de energía eléctrica desde Chañaral hasta Puerto Montt. Satisface más del 80% de la demanda de energía eléctrica en Chile.

Cerca del 70% de la capacidad de generación es de centrales hidráulicas, siendo el resto centrales térmicas a carbón y petróleo. En un futuro cercano (diciembre 1997) se incorporarán centrales térmicas que consumen gas natural importado desde Argentina.

La configuración del parque generador hace que la oferta de energía eléctrica dependa de la cantidad de agua que tiene el sistema en sus ríos y embalses. Debido a esta dependencia, resulta difícil realizar simulaciones de la operación del sistema, ya que existe incertidumbre en la disponibilidad de agua en el futuro. Esta incertidumbre se denomina *incertidumbre hidrológica*.

Debido a las características de la economía chilena, se estima que la demanda de energía eléctrica mantendrá una tasa de crecimiento cercana al 8% anual. Esto hará insuficiente el parque generador actual para satisfacer la demanda futura.

1.2 Objetivos Generales

Para abastecer la creciente demanda se deben decidir cuantiosas inversiones en centrales generadoras y líneas de transmisión. Se denominará *plan de obras* al conjunto de obras que deben ser realizadas para abastecer la demanda.

Estas decisiones se ven afectadas por:

- **Incertidumbre hidrológica.** Si se sabe que a futuro faltará agua, se deben construir centrales con embalses o centrales térmicas. Si se predice que habrá suficiente agua, puede bastar con centrales hidráulicas de pasada.
- **Incertidumbre en la demanda.** Si la demanda de energía eléctrica es mayor que la pronosticada, puede resultar necesario adelantar un proyecto para satisfacer el aumento de la demanda. Si por el contrario, la demanda resulta menor que la pronosticada, un proyecto realizado puede no obtener suficientes ingresos como para financiarse.
- **Incertidumbre en la configuración final del plan de obras.** Proviene del hecho que no existe una entidad planificadora central y, en general, cualquier inversionista puede realizar un proyecto eléctrico. Un inversionista no está seguro si una futura demanda ya está siendo satisfecha por los proyectos de otro inversionista. Si se realizan ambos proyectos, los ingresos que recibirán no serán suficientes.

Estas inversiones serán realizadas por las empresas privadas. Estas tres fuentes de incertidumbre deberán ser consideradas en el proceso de decisión de inversiones.

Luego, el principal objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo matemático de decisión de inversiones, que represente en forma explícita la incertidumbre de la demanda futura, la aleatoriedad de la disponibilidad de energía en las plantas hidroeléctricas y la incertidumbre producto de las decisiones de otros agentes del sector eléctrico.

1.3 Objetivos Específicos

1.3.1 Modelamiento de la Operación del Sector Eléctrico

Para decidir la rentabilidad de los proyectos eléctricos se debe modelar adecuadamente la operación del sistema. Esto debido a que los ingresos que recibe una central son

resultados de la operación del sistema.

Se define el *costo marginal de la energía* como el costo de generar un MWh más de energía con la unidad más barata disponible. De acuerdo a la ley, la operación del sistema debe ser aquella que tenga un menor costo marginal.

El *precio de nudo* se calcula como el promedio ponderado actualizado de los costos de operación (costo marginal) mensual del sistema por los siguientes 4 años. Es actualizado cada seis meses.

Los ingresos de un generador eléctrico provienen de sus ventas, y estas transacciones se realizan a distintos precios. Las ventas entre generadores de energía eléctrica se realiza al valor del costo marginal. Las ventas de energía a clientes regulados (distribuidoras) se realiza al precio de nudo. Las ventas a clientes libres (empresas mineras, grandes industriales) se hace al precio de acuerdo entre las partes.

Los ingresos de una línea de transmisión corresponden, a su vez, a cobros de peajes a las empresas generadoras que deben utilizar esa línea para transportar su energía a algún cliente. Para determinar los peajes que deben pagar los generadores por el uso de una línea de transmisión, primero se calcula la anualidad del costo de reemplazar la línea. Luego, cada generador debe pagar un porcentaje de la anualidad igual a su porcentaje de uso de la línea.

Luego, es de vital importancia para evaluar proyectos de generación y distribución en el sector eléctrico, que se disponga de una herramienta eficiente para obtener los resultados de operación del sistema, pues de esta operación dependen los ingresos de los proyectos.

1.3.2 Uso de la Optimización Estocástica

Como fue mencionado en la sección 1.2, es necesario evaluar proyectos bajo incertidumbre con respecto a la demanda futura, los afluentes hidráulicos y el comportamiento de los demás inversionistas del sector.

Específicamente, se desea determinar los ingresos de un proyecto bajo estas incertidumbres. Se debe recordar que los ingresos provienen de la operación. Ésta debe ser la que tenga el menor costo marginal, lo que equivale a que el costo operativo del sistema sea el más bajo.

Dado que existen variables inciertas, o aleatorias, y que se puede formular el problema de inversiones como un problema de optimización, es importante conocer y utilizar

herramientas de optimización estocástica.

1.3.3 Modelamiento del Problema de Inversión del Sector Eléctrico

Para poder evaluar los proyectos considerando las incertidumbres se debe plantear un modelo que refleje el efecto de estas incertidumbres en los resultados.

El efecto de la incertidumbre del comportamiento de otros inversionistas se incorpora al suponer que cada agente toma sus decisiones maximizando sus propios beneficios. Si además se supone que se está en una situación de competencia perfecta, entonces el plan de obras resultante será aquél que minimice los costos totales del sistema.

Luego, se puede determinar el comportamiento de los otros agentes del mercado mediante un problema de minimización. Esto entregará el plan de obras que será realmente implementado. Es decir, al modelar el problema de inversión del sector eléctrico se debe buscar el plan de obras que minimice los costos totales del sistema considerando la incertidumbre en la demanda y afluentes hidráulicos.

Una característica que debe tener el plan de obras encontrado es que en situaciones de equilibrio los ingresos de los proyectos que se realicen deben ser suficientes para pagar las inversiones. Un plan de obras que cumple esto se denomina un plan de obras adaptado.

1.3.4 Resolución de Problema de Optimización Estocástica Mixto

Para desarrollar una implementación útil, además de plantear un modelo, se deben obtener resultados para verificar que la modelación sea coherente con la realidad. Luego, resulta importante obtener respuestas numéricas del problema planteado.

Producto de la modelación realizada, se obtiene un problema de optimización estocástica. Este modelo contiene variables que deciden la realización o no de un proyecto, lo que se representa naturalmente mediante variables binarias, obteniéndose un problema de optimización con algunas variables enteras.

Es necesario desarrollar algún método para resolver el problema de programación estocástica mixta. El problema de optimización estoástica con variables enteras ha sido abordado antes en [14] y [13].

Capítulo 2

Modelos Existentes en el Sector Eléctrico

Hoy en día no existen modelos que enfrenten de forma agregada el problema de decisiones de inversión en el sector eléctrico.

Este problema es enfrentado usando diversos modelos de operación y sensibilidades en los planes de obras esperados. La demanda y el plan de obras en general se consideran datos y se incorpora la aleatoriedad hidrológica mediante el modelo de operación.

Existen métodos para determinar la configuración óptima del parque generador en el largo plazo. Esta configuración se determina decidiendo qué cantidad de cada tecnología debe instalarse para abastecer una demanda dada a mínimo costo. Una vez establecida la tecnología que se debe instalar en el largo plazo se calcula cuál es el beneficio por MW que necesita percibir esa central para financiarse. Se instala suficiente potencia como para que estas centrales estén recibiendo precisamente el beneficio estipulado cuando se simula el sistema eléctrico.

Los modelos de operación existentes varían en la cantidad de etapas que representan, los horizontes de estudio, el tratamiento de los embalses del sistema, la existencia de redes de transmisión y pérdidas y los algoritmos utilizados. Pero todos tienen ciertos aspectos en común.

2.1 Características de los Modelos de Operación Existentes

Todos los modelos de operación deben resolver el problema de satisfacer la demanda durante un horizonte de planificación a mínimo costo. Para satisfacer esta demanda realizan un "despacho" de las centrales generadoras. Si el sistema es puramente térmico, o térmico con centrales hidráulicas sin capacidad de regulación (es decir el sistema no puede guardar agua de una etapa a la siguiente), entonces el problema del "despacho" es desacoplado temporalmente. Es decir, en cada etapa se satisface la demanda con las capacidades de producir energía de esa etapa. Si, por el contrario, existe al menos una central hidráulica con embalse que puede guardar agua de una etapa a la siguiente, entonces el despacho es acoplado temporalmente, pues las decisiones de operación de una etapa afectan las decisiones de operación de la etapa siguiente.

Si en una etapa no se logra satisfacer la demanda se dice que hubo "falla", la cual tiene un costo asociado. Este costo se determina mediante encuestas realizadas por la Comisión Nacional de Energía (CNE) para medir el impacto de la falta de suministro de energía eléctrica en los consumidores, y es en general bastante mayor que la central térmica más cara del sistema. En los modelos se representa mediante una central térmica ficticia que opera con costo igual al de falla y con capacidad ilimitada.

Actualmente existen diversos modelos de operación utilizados en el sector eléctrico; los más relevantes son descritos a continuación.

2.1.1 Modelo GOL

El modelo Generación Óptima del Laja (GOL), es un modelo de operación de largo plazo, resuelve el problema de la operación mensual del sistema durante hasta 15 años.

Este modelo considera un sistema uninodal, con un sólo embalse (El Lago Laja), siendo todas las otras centrales hidráulicas de pasada. Realiza un despacho hidro-térmico.

El modelo GOL utiliza programación dinámica discretizando el embalse en 15 niveles. En cada nivel del embalse determina el costo estratégico, el cual equivale al menor costo promedio de operación hasta el final del horizonte, considerando todas las condiciones hidrológicas. Una vez determinadas estas curvas de costos estratégicos en todas las etapas, el modelo procede a simular la operación del sistema para un gran número de secuencias hidrológicas.

2.1.2 Modelo OMSIC

El modelo Operación Multiembalse SIC (OMSIC) es un modelo de operación de corto plazo, que considera las primeras semanas en etapas horarias y la operación de varios embalses.

Realiza esto mediante una heurística en que dada una operación del Lago Laja se determina el valor del agua almacenada. Este valor de agua es el que utiliza cada central hidráulica con embalse y central térmica para decidir cuánta energía está dispuesta a poner a este precio.

Si esta oferta dada de energía no es igual a la demanda de la etapa, se procede a corregir la generación del Lago Laja, con lo que se obtiene otro precio (valor de agua). Este procedimiento se itera hasta que, dado un precio para el agua del Laja, la energía ofertada es igual a la demanda. Este algoritmo oscila debido a los saltos en la curva de oferta térmica.

2.1.3 Modelo SDDP

El modelo SDDP implementa el algoritmo desarrollado por M.Pereira Stochastic Dynamic Dual Programming que es descrito en [18]. El algoritmo, que es una versión de un algoritmo de descomposición de Benders anidado, implementa una solución a un problema de recurso multietapas.

Este modelo plantea un problema de optimización lineal con cierta estructura, en que las variables de una etapa sólo dependen de las variables en la etapa anterior, y plantea un conjunto de problemas equivalentes en los que se minimiza los costos de una etapa más una función de costo futuro de las variables de esa etapa. La función de costo futuro no es otra cosa que la minimización con respecto al resto de las variables.

Se puede demostrar que esta función de costo futuro es lineal por partes en todas las etapas, con lo que se desarrolla un algoritmo que simula la operación utilizando estas funciones de costo futuro para luego, en un proceso hacia atrás corregir estas funciones lineales por partes. La corrección a las funciones de costo futuro se realiza encontrando sucesivamente las restricciones que definen esta función.

En cada iteración este algoritmo es capaz de calcular una cota inferior y una superior del valor óptimo de operación que se está buscando.

2.2 Forma Actual de Abordar el Problema de Inversión

Hoy en día, dados una demanda y plan de obras fijos, se estudia un proyecto específico posicionándolo en distintas situaciones en el plan de obras. Para obtener los ingresos y con eso calcular la rentabilidad del proyecto, se ejecuta algún modelo de operación de largo plazo.

Esta forma de abordar el problema es absolutamente estática en el análisis del plan de obras futuro. No existen consideraciones en como puede cambiar a futuro el conjunto de proyectos de inversión en el sector. Se utiliza este enfoque para, dados escenarios que son posibles, simular la operación de un sistema eléctrico, y determinar la rentabilidad de un proyecto en distintas situaciones.

Se ha desarrollado, en paralelo con este trabajo, un algoritmo de posicionamiento de centrales en un plan de obra basado en teoría de juegos. Las centrales se posicionan una

a una en el plan de obras hasta llegar a un equilibrio de Nash.

Una característica del plan de obras futuro resultante es que debe ser adaptado, es decir que los ingresos que reciben los proyectos que se realicen en el largo plazo (el final del horizonte), deben ser suficientes para financiarlos.

Capítulo 3

Optimización Estocástica

3.1 Optimización Bajo Incertidumbre

Al intentar crear un modelo matemático que represente eventos futuros se presenta, como actor relevante, la incertidumbre de lo que ocurrirá con ciertos factores que están fuera del control del modelador. Por ejemplo, se desconocen demandas futuras del producto, disponibilidad de materia prima, resultado de elecciones, etc.

De todos estos factores inciertos se trata de identificar aquéllos que afectan de manera considerable el fenómeno que se está modelando, para tratarlos explícitamente como tales. Se puede llegar a considerar que ningún factor incierto influye en el fenómeno, lo que entregaría un modelo determinístico .

En este contexto se desea optimizar una función que depende de factores inciertos, los que se pueden modelar por una variable $\omega \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$. Luego queremos escoger el vector de variables de decisión x , perteneciente a un conjunto factible, que minimice una función g_0 que también depende de ω . Es decir:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & g_0(x, \omega) \\ x \in \mathcal{X} \quad & \\ \text{s.a.} \quad & g_i(x, \omega) \leq 0 \quad i = 1, \dots, s \\ & g_i(x, \omega) = 0 \quad i = s + 1, \dots, m \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde parece lógico encontrar como respuesta la aplicación $\omega \mapsto x(\omega)$ que entrega el punto de $\mathcal{X} \cap \{x | g_i(x, \omega) \leq 0, i = 1, \dots, s; g_i(x, \omega) = 0, i = s + 1, \dots, m\}$ que minimiza

$g_0(\cdot, \omega)$ dado un valor de ω . Claramente se pueden obtener distintas soluciones para distintos valores de ω .

Sean $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $x(\omega_1)$, que es la solución óptima si ocurre ω_1 , no tiene porque ser solución si ocurre ω_2 , puede hasta no pertenecer al conjunto factible definido por ω_2 . Además, no queda claro como combinar $x(\omega_1)$ con $x(\omega_2)$ para obtener una respuesta que sea factible (menos aún óptima) para ambos escenarios.

Se nota que encontrar sólo una respuesta para todos los escenarios (valores que puede tomar la incertidumbre) resulta generalmente imposible. Luego se debe utilizar algún criterio para escoger una solución de un conjunto $S \subset \mathcal{X}$, donde S representa el conjunto "factible para todos los escenarios". Esta definición de factibilidad debe ser replanteada, de forma que suponerlo distinto de vacío no sea irrealista. La forma en que se hace este replanteamiento depende fuertemente de la forma de la aleatoriedad.

Para seleccionar una solución sobre las otras se deben ponderar los distintos escenarios posibles, lo cual se realiza asignándole una probabilidad de ocurrencia a los distintos escenarios. Luego, tenemos que la variable ω es una variable aleatoria, con función de distribución de probabilidad P . Es decir, ω pertenece a un espacio de probabilidad que denotaremos (Ω, \mathcal{A}, P) .

Dada la distribución de ω , estos criterios de selección pueden ser: "encontrar la mejor solución en promedio", el criterio del "Min y Max", "encontrar la solución que minimice la probabilidad que la función objetivo sea mayor que un valor umbral", etc. Todos estos criterios se pueden expresar en términos de la esperanza (con respecto a P) de alguna función compuesta con la función objetivo.

Por ejemplo, se puede minimizar el valor promedio de una función,

$$\text{Min } \{ \mathbb{E}\{g_0(x, \omega) | x \text{ factible} \}$$

o minimizar la probabilidad que una función supere cierto valor umbral,

$$\text{Min } \{ \mathbb{P}\{\omega | g_0(x, \omega) \geq \alpha_0\} | x \text{ factible} \}$$

La noción de conjunto factible para todos los escenarios también se flexibiliza usando criterios similares, esto se traduce en restricciones escritas también como esperanzas de funciones compuestas con las restricciones originales.

Por ejemplo, el conjunto factible definido con cierto nivel de confianza $\alpha \in (0, 1]$,

$$\mathbb{P}\{\omega | g_i(x, \omega) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \geq \alpha$$

o se define el conjunto factible para la esperanza y varianza de las restricciones,

$$\mathbb{E}\{g_i(x, \omega)\} + \beta(\text{Var}\{g_i(x, \omega)\})^{\frac{1}{2}} \leq 0$$

Notar que en el caso que $\beta = 0$ la restricción anterior corresponde a que el promedio sea menor que 0.

Es decir, el problema de optimización estocástica se plantea:

$$\begin{aligned} & \text{Min} && \mathbb{E}\{f_0(x, \omega)\} \\ & x \in \mathcal{X} && \\ & \text{s.a.} && \mathbb{E}\{f_i(x, \omega)\} \leq 0 \quad i = 1, \dots, s \\ & && \mathbb{E}\{f_i(x, \omega)\} = 0 \quad i = s + 1, \dots, m \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde el criterio utilizado se traduce en como se escriben las funciones f_i en términos de las funciones g_i , además se hacen los siguientes supuestos, para que el problema esté bien planteado:

- $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado
- $f_0 : \mathcal{X} \times \Omega \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
- $f_i : \mathcal{X} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m$
- $\forall x \in \mathcal{X}, \quad i = 1, \dots, m \quad (\mathbb{E}f_i)(x) \equiv \mathbb{E}\{f_i(x, \omega)\}$ es finita.
- $\forall x \in \mathcal{X}, \quad (\mathbb{E}f_0)(x) \equiv \mathbb{E}\{f_0(x, \omega)\}$ es finita, excepto cuando $\{\omega | f_0(x, \omega) = \infty\}$ es de medida positiva, en este caso $(\mathbb{E}f_0)(x) = \infty$.
- El conjunto factible es distinto de vacío, es decir:

$$S = \mathcal{X} \cap \left\{ x \mid \begin{array}{l} \mathbb{E}f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, s; \\ \mathbb{E}f_i(x) = 0, \quad i = s + 1, \dots, m \end{array} \right\} \cap \{x | \mathbb{E}f_0(x) < \infty\} \quad \neq \phi$$

3.2 Resultados de Existencia

El problema de optimización estocástica planteado en forma general en (3.2) consiste simplemente en un problema de optimización con funciones no lineales. Luego, para demostrar la existencia de soluciones se puede utilizar el hecho que el problema de minimizar una función propia inf-compacta tiene solución.

Definición 3.1 Una función propia es inf-compacta si es semi continua inferior (s.c.i.) y el conjunto de nivel inferior $\text{niv}_\alpha f \equiv \{x | f(x) \leq \alpha\}$ es acotado $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Nota: Se tiene que f es inf-compacta si es coerciva o s.c.i. con dominio compacto.

En general, en el problema de optimización estocástica se desea minimizar el funcional

$$\mathbb{E}f(x) \equiv \mathbb{E}\{f(x, \omega)\} \equiv \int f(x, \omega) dP(\omega).$$

A continuación se detallan algunos resultados que garantizan buenas propiedades para el funcional, cuando se supone que $f(x, \omega)$ es una función propia de x .

Las demostraciones de las siguientes propiedades junto con otros resultados que caracterizan las condiciones de optimalidad en problemas de optimización estocástica, se pueden ver en [22].

Proposición 3.1 Si la función $x \mapsto f(x, \omega)$ es convexa casi seguramente (resp. lineal, afín, o sublineal) entonces también lo es $\mathbb{E}f$

Proposición 3.2 Si la función $x \mapsto f(x, \omega)$ es s.c.i casi seguramente y se tiene al menos uno de las siguientes condiciones:

- existe una función β integrable tal que $\beta(\omega) \leq f(x, \omega) \quad \forall x \in \mathcal{X}$ casi seguramente,
- la función $x \mapsto f(x, \omega)$ es convexa casi seguramente,

entonces $\mathbb{E}f(x)$ también es s.c.i.

Para la próxima propiedad son necesarias las siguientes definiciones:

Definición 3.2 Sea una función propia f

- (i) $\text{clf}(x)$, la cerradura de $f(x)$, es la función cuyo epígrafo es la cerradura del epígrafo de f . Se tiene:

$$\text{clf}(x) = \inf_{\{x^n \rightarrow x\}} \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x^n)$$

(ii) $\text{cof}(x)$ es la función cuyo epígrafo es la combinación convexa del epígrafo de f .
 Cumple:

$$\text{cof}(x) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x^k) \mid \sum_{k=0}^n x^k = x; \sum_{k=0}^n \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0 \right\}$$

Nota: En la parte (i), la notación $\{x^n \rightarrow x\}$ designa el conjunto de todas las sucesiones que convergen a x .

Proposición 3.3 Si $\mathbb{E}f(\cdot)$ es s.c.i., $\omega \mapsto \text{cl cof}(\cdot, \omega)$ es medible, $\mathbb{E} \text{cl cof}(\cdot)$ es propia, y $\text{cl cof}(\cdot, \omega)$ es inf-compacta casi seguramente. Entonces $\mathbb{E}f$ es inf-compacta.

3.3 Modelos Anticipativos y Adaptivos

En los modelos anticipativos se debe tomar una decisión antes de observar la variable aleatoria. Se dice que la decisión se toma "aquí y ahora". Se supone una distribución a priori sobre ω y se trata de resolver (3.2). Se utilizan resultados que garantizan que S (el conjunto factible) es convexo y cerrado, bajo hipótesis sobre $f_i(\cdot, \cdot)$, $i = 1, \dots, m$ y sobre P .

En los modelos adaptivos se permiten observaciones de la variable aleatoria, dada su distribución a priori, antes de tomar una decisión, son decisiones "esperar y ver". Generalmente sólo se puede observar una parte de la aleatoriedad a la vez. Si se denomina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ la información adquirida al realizar una observación, el problema a resolver en el modelo adaptivo es:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \mathbb{E}\{f_0(x(\omega), \omega) | \mathcal{B}\} \\ & x(\cdot) \\ \text{s.a. } & \mathbb{E}\{f_i(x(\omega), \omega) | \mathcal{B}\} \leq 0 \quad i = 1, \dots, s \\ & \mathbb{E}\{f_i(x(\omega), \omega) | \mathcal{B}\} = 0 \quad i = s + 1, \dots, m \\ & x(\omega) \in \mathcal{X} \text{ casi seguramente} \\ & \omega \mapsto x(\omega) \text{ es } \mathcal{B} \text{ medible} \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.4 Modelo de Recurso

Se llama también al modelo anticipativo modelo sin recurso, y al modelo adaptivo modelo con recurso completo. Los modelos de recurso son una mezcla de los dos modelos anteriores, donde se eligen algunas variables a priori (antes de observar la incertidumbre, anticipativo) y algunas después (adaptivo). El modelo, en su forma general, se escribe de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \mathbb{E}\{f_0(x, y(x, \omega), \omega)\} \\ x \in \mathcal{X} \quad & \\ \text{s.a.} \quad & f_{1i}(x) \leq 0, i = 1, \dots, s' \\ & f_{1i}(x) = 0, i = s' + 1, \dots, m' \end{aligned} \tag{3.4}$$

con $y(x, \omega)$ tal que resuelva:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \mathbb{E}\{f_0(x, y, \cdot) | \mathcal{B}\}(\omega) \\ y \in \mathcal{Y} \quad & \\ \text{s.a.} \quad & \mathbb{E}\{f_{2i}(x, y, \cdot) | \mathcal{B}\}(\omega) \leq 0, i = 1, \dots, s \\ & \mathbb{E}\{f_{2i}(x, y, \cdot) | \mathcal{B}\}(\omega) = 0, i = s + 1, \dots, m \end{aligned} \tag{3.5}$$

siendo \mathcal{B} la información obtenida al realizar la observación de la aleatoriedad. En el caso en que se obtenga toda la información al realizar la observación, es decir $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, el subproblema queda:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f_0(x, y, \omega) \\ y \in \mathcal{Y} \quad & \\ \text{s.a.} \quad & f_{2i}(x, y, \omega) \leq 0, i = 1, \dots, s \\ & f_{2i}(x, y, \omega) = 0, i = s + 1, \dots, m \end{aligned}$$

Si este problema tiene solución $\forall x \in \mathcal{X}$ se dice que (3.4), (3.5) es un problema de recurso completo. Si además la solución es única se dice que es un problema de recurso simple.

Se puede tener un problema de recurso multietapas, donde gradualmente se obtiene información respecto de la aleatoriedad. Es decir, existe una sucesión de σ -álgebras $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots \subset \mathcal{B}_K \subset \mathcal{A}$, tal que en la etapa i -ésima se obtiene \mathcal{B}_i de información al hacer la observación. Y el problema de recurso se plantea como una sucesión de problemas anidados (programación dinámica). Este planteamiento, aunque es más exacto, generalmente es bastante complicado y de difícil resolución.

Estas etapas no tienen que representar la evolución en el tiempo de las decisiones. Dadas T etapas distintas en el tiempo, llamando ω_t la variable aleatoria observada en la etapa t , se puede construir una variable aleatoria $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T)$. Se formula entonces el

problema de recurso en dos etapas, donde la variable de las decisiones anticipativas es $x = (x_1, x_2, \dots, x_T)$ y el de las variables adaptivas $y = (y_1, \dots, y_T)$. Donde x_t e y_t , son las decisiones anticipativas y adaptivas de la etapa t .

El problema de recurso lineal, de dos etapas, tiene la forma:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx + \mathbb{E}\{Q(x, \omega)\} \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}_+^n \quad & \\ \text{s.a.} \quad & b_i - A_i x \leq 0, i = 1, \dots, m \\ & Q(x, \omega) = \inf_{y \in \mathbb{R}_+^n} \{q(\omega)y | W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)x\} \end{aligned}$$

Este problema ha sido ampliamente abordado en la literatura, ([6], [21]) y será el utilizado principalmente más adelante.

3.5 Abordando el Problema de Optimización Estocástica

Dadas las formulaciones posibles de un problema de optimización estocástica, sólo queda comentar las distintas técnicas utilizadas para resolverlo. En general atacar estos problemas se reduce a resolver (3.2), luego en principio bastaría poder calcular las esperanzas involucradas en esta formulación anticipativa, para obtener un problema de optimización no lineal, que puede ser abordado como tal. Generalmente el cálculo de estas integrales resulta impracticable para cualquier problema real.

Algunos enfoques utilizados al enfrentarse con el problema son:

- Si se tiene una variable w de distribución discreta las esperanzas se transforman en sumatorias, lo que quiere decir que estas integrales son calculables, llegando a un problema de optimización determinístico.
- En general, se pueden obtener cotas para un problema aprovechando propiedades de la función a optimizar (convexidad, cotas de la función), de la distribución, o del conjunto factible. La forma de obtener estas cotas depende exclusivamente de cada problema.
- Otra forma de enfrentar el problema, es resolver un problema aproximado, de

solución más fácil, donde se aproxima (3.2) por:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \int f_0^\eta(x, \omega) dP^\nu(\omega) \\ x \in \mathcal{X} \quad & \\ \text{s.a.} \quad & \int f_i^\eta(x, \omega) dP^\nu(\omega) \leq 0, i = 1, \dots, s \\ & \int f_i^\eta(x, \omega) dP^\nu(\omega) = 0, i = s + 1, \dots, m \end{aligned}$$

esto quiere decir que puedo aproximar el problema original tanto mediante una aproximación de la distribución (P^ν), como de las funciones (f_i^η).

Las distribuciones P^ν pueden ser distribuciones discretas, que significa resolver un problema determinístico, o distribuciones que acoten la distribución P , para así obtener cotas de la solución del problema. Existen resultados en la literatura respecto de la convergencia de las soluciones de problemas aproximados mediante la distribución. Si $P^\nu \rightarrow P$ en distribución, bajo algunas hipótesis de carácter técnico se tiene $\hat{x}^\nu \rightarrow \hat{x}$, donde \hat{x} y \hat{x}^ν representan el punto óptimo para el problema original y el aproximado respectivamente. Para detalles ver [6].

También se puede aproximar (3.2) al aproximar las funciones f_i por funciones f_i^η . Se hace esto con el propósito de tener esperanzas fáciles de calcular u obtener una cota del problema original.

- Un último enfoque para abordar el problema de optimización estocástica, llamado de métodos de cuasi-gradiente estocástico, se basa en generar una sucesión de puntos x^n de la forma $x^{n+1} = x^n - \rho_n \xi^n$, donde los $\{\xi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son muestras de algún vector aleatorio que satisface:

$$\mathbb{E}(\xi^n | x^1, x^2, \dots, x^n) \in \partial F_0(x^n) + \eta^n$$

donde:

$\partial F_0(x^n)$ es el subdiferencial de F_0 en x^n .

$F_0(x) = \mathbb{E}\{f_0(x, \omega)\}$

$\eta^n \rightarrow 0$

La variable aleatoria ξ^n se llama cuasi-gradiente estocástico.

3.6 Algoritmos en Optimización Estocástica

Para finalizar se describirán en mayor detalle algunos algoritmos existentes para enfrentar un problema de recurso lineal con aleatoriedades sólo en el lado derecho. Esto

es, los algoritmos resuelven el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & cx + \mathbb{E}\{Q(x, \omega)\} \\
 x \in \mathcal{X} \quad & \\
 \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\
 & l_1 \leq x \leq u_1
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 Q(x, \omega) = \text{Min} \quad & qy_\omega \\
 y_\omega \in \mathcal{Y} \quad & \\
 \text{s.a.} \quad & Tx + Wy_\omega \leq H\omega \\
 & l_2 \leq y_\omega \leq u_2
 \end{aligned}$$

En general los algoritmos que se presentan a continuación consideran la aleatoriedad en forma discreta mediante un número finito de escenarios. La forma de resolver este problema de gran tamaño determinístico es lo que difiere entre los algoritmos.

Con esto, el problema que realmente resuelven los algoritmos que se presentarán es:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & cx + \sum_{j=1}^J p_j Q(x, \omega_j) \\
 x \in \mathcal{X} \quad & \\
 \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\
 & l_1 \leq x \leq u_1
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 Q(x, \omega_j) = \text{Min} \quad & qy_j \\
 y_j \in \mathcal{Y} \quad & \\
 \text{s.a.} \quad & Tx + Wy_j \leq H\omega_j \\
 & l_2 \leq y_j \leq u_2
 \end{aligned}$$

3.6.1 Algoritmo de Descomposición de Benders

Este algoritmo resuelve el problema de recurso lineal con la aleatoriedad en el lado derecho, como fue presentada anteriormente. Se define $Q(x) = \sum_{j=1}^J p_j Q(x, \omega_j)$. Este valor $Q(x)$ se puede obtener dualizando los problemas de recurso involucrados:

$$\begin{aligned}
 Q(x) = \sum_{1 \leq j \leq J} p_j \{ \text{Min}_{y_j \in \mathcal{Y}} \quad & qy_j \} \\
 \text{s.a.} \quad & Tx + Wy_j \leq H\omega_j \\
 & l_2 \leq y_j \leq u_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(x) = & \text{Max}_{\pi_j, \lambda_j, \beta_j} \sum_{1 \leq j \leq J} p_j \{ \pi_j (H\omega_j - Tx) + \lambda_j u_2 - \beta_j l_2 \} \\
\text{s.a.} & \quad W' \pi_j + \lambda_j - \beta_j = q \\
& \quad \lambda_j, \beta_j \geq 0 \\
& \quad \pi_j \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Utilizando este valor $Q(x)$ se tiene que el problema que se desea resolver se escribe de la forma:

$$\begin{aligned}
\text{Min}_{x \in \mathcal{X}} \quad cx + \sum_{1 \leq j \leq J} p_j Q(x, \omega_j) &= \text{Min}_{(x, \gamma) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}} \quad cx + \gamma \\
\text{s.a.} \quad Ax \leq b & \quad \text{s.a.} \quad Ax \leq b \\
l_1 \leq x \leq u_1 & \quad \gamma \geq Q(x) \\
& \quad l_1 \leq x \leq u_1
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Utilizando la expresión encontrada en (3.7) para el valor $Q(x)$, se llega a la siguiente formulación equivalente del problema (3.8):

$$\begin{aligned}
\text{Min}_{(x, \gamma) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}} \quad cx + \gamma \\
\text{s.a.} \quad Ax \leq b \\
\gamma \geq \sum_{j=1}^J p_j \{ \pi_j (H\omega_j - Tx) + \lambda_j u_2 - \beta_j l_2 \} \\
\quad \forall (\pi_j, \lambda_j, \beta_j)_{j=1}^J \text{ puntos factibles de (3.7)} \\
l_1 \leq x \leq u_1
\end{aligned}$$

En la proposición (4) de [21] se demuestra que la función $Q(x)$ es poliedral convexa con soporte finito. Esto se puede observar en la definición de $Q(x)$ dada en (3.7), ya que el simplex definido por $W' \pi_j + \lambda_j - \beta_j = q$, $j = 1, \dots, J$ tiene un conjunto finito de vértices $\mathcal{V} \equiv (\pi_1^k, \lambda_1^k, \beta_1^k, \dots, \pi_J^k, \lambda_J^k, \beta_J^k)_{k=1, \dots, K}$.

Gracias a esto la última expresión queda de la forma:

$$\text{Min}_{(x, \gamma) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}} \quad cx + \gamma \tag{3.9.1}$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \leq b \tag{3.9.2}$$

$$\gamma \geq \sum_{j=1}^J p_j \{ \pi_j (H\omega_j - Tx) + \lambda_j u_2 - \beta_j l_2 \} \quad \forall (\pi_j, \lambda_j, \beta_j)_{j=1}^J \in \mathcal{V} \tag{3.9.3}$$

$$l_1 \leq x \leq u_1$$

Las restricciones (3.9.3) se llaman cortes de optimalidad del problema. Ya que es difícil determinar completamente \mathcal{V} , se agregan cortes a medida que se obtienen $(\pi_j, \lambda_j, \beta_j)_{j=1}^J$, como soluciones del problema (3.7) para algún \hat{x} .

Puede ocurrir que dado un \hat{x} exista algún escenario j para el cual el problema de recurso es infactible, esto quiere decir que el problema dual no es acotado para ese \hat{x} . Luego se debe restringir el conjunto de los x factibles en el problema original. La restricción necesaria surge naturalmente al plantear el siguiente problema de factibilidad asociado al problema de recurso:

$$\begin{aligned}
Q(\hat{x}, \omega_j) = & \underset{(y_j, v^-, v^+) \in \mathcal{Y} \times \mathbb{R}^{+2m}}{\text{Min}} && v^- + v^+ \\
\text{s.a.} & && T\hat{x} + Wy_j - v^- + v^+ \leq H\omega_j \\
& && l_2 \leq y_j \leq u_2
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Cuyo valor objetivo en el caso de un problema factible es cero, y en el caso de un problema infactible es mayor que cero. El problema dual asociado es:

$$\begin{aligned}
Q(\hat{x}, \omega) = & \underset{\pi_j, \lambda_j, \beta_j}{\text{Max}} && \pi_j(H\omega_j - T\hat{x}) + \lambda_j u_2 - \beta_j l_2 \\
\text{s.a.} & && W'\pi_j + \lambda_j - \beta_j = 0 \\
& && -\mathbb{1} \leq \pi_j \leq \mathbb{1} \\
& && \lambda_j, \beta_j \geq 0 \\
& && \pi_j \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

En el caso en que el primal del problema de recurso es infactible, o sea el óptimo del problema de factibilidad es mayor que cero, tenemos que existe una dirección dual factible $(\sigma^*, \lambda^*, \beta^*)$ tal que $\sigma^*(H\omega_j - T\hat{x}) + \lambda^* u_2 + \beta^* l_2 > 0$. Luego la restricción que se debe agregar al problema de primera etapa para evitar que el problema de recurso sea infactible es:

$$\sigma^*(H\omega_j - Tx) + \lambda^* u_2 + \beta^* l_2 \leq 0$$

que se llamará restricción de factibilidad del problema original.

Finalmente, para un conjunto de vectores duales factibles $(\pi_j^i, \lambda_j^i, \beta_j^i)_{j=1}^J$, con $i = 1, \dots, I$ y direcciones factibles $(\sigma_{k(s)}^s, \lambda_{k(s)}^s, \beta_{k(s)}^s)$, con $s = 1, \dots, S$, se resuelve el siguiente problema,

que es el problema (3.9) relajado e incluyendo los cortes de factibilidad

$$\text{Min}_{(x,\gamma) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}} \quad cx + \gamma \quad (3.11.1)$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \leq b \quad (3.11.2)$$

$$\gamma \geq \sum_{j=1}^J p_j \{ \pi_j^i (H\omega_j - Tx) + \lambda_j^i u_2 - \beta_j^i l_2 \} \quad (3.11.3) \quad (3.11)$$

$$i = 1, \dots, I$$

$$\sigma_{k(s)}^s (H\omega_j - Tx) + \lambda_{k(s)}^s u_2 + \beta_{k(s)}^s l_2 \leq 0 \quad (3.11.4)$$

$$s = 1, \dots, S$$

$$l_1 \leq x \leq u_1$$

El punto óptimo (x^*, γ^*) de (3.11) cumple con que $\gamma^* \leq Q(x^*)$, ya que γ^* satisface (3.11.3) mientras que $Q(x^*)$ es el máximo sobre todas las direcciones duales factibles. Pero la solución del problema original debe cumplir que $\gamma^* \geq Q(x^*)$, lo que nos entrega el criterio de detención del algoritmo.

Un rápido esquema del algoritmo de descomposición de Benders para el problema de recurso lineal de dos etapas es el siguiente:

Paso 0: Resolver el problema:

$$\text{Min} \quad cx$$

$$x \in \mathcal{X}$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \leq b$$

$$l_1 \leq x \leq u_1$$

Si es infactible, FIN.

Si no, $I = S = 0$, $\gamma = -\infty$. Se denota la solución óptima por x^* .

Paso 1: Resolver los problemas de segunda etapa, es decir obtener el valor de $Q(x^*)$

$$\text{Min} \quad qy_j$$

$$y_j \in \mathcal{Y}$$

$$\text{s.a.} \quad Tx^* + Wy_j \leq H\omega_j$$

$$l_2 \leq y_j \leq u_2$$

Si alguno es infactible, agregar un corte de factibilidad (3.11.4) al problema principal, $S := S + 1$, ir a Paso 2.

Si no, si $\gamma^* \geq Q(x^*)$, FIN x^* es el óptimo.

Si no, agregar un corte de optimalidad (3.11.3) al problema principal,

$I := I + 1$, ir a Paso 2.

Paso 2: Resolver el problema principal (3.11).

Si es infactible, FIN.

Si no, sea (x^*, γ^*) el punto óptimo, ir a Paso 1.

El algoritmo de descomposición de Benders converge, en general, para un problema de recurso lineal en dos etapas con aleatoriedad siguiendo una distribución continua en el lado derecho. La demostración de este resultado se puede ver en Van Slyke y Wets [21].

Para el problema que hemos planteado, con aleatoriedad discreta, el algoritmo de descomposición de Benders es finito. Esto se demuestra notando que todos los pasos del algoritmo son finitos y que iterará un número finito de veces

Cada paso es finito gracias a que el Paso 1 consiste en:

Primero, resolver un problema lineal por escenario.

Luego, en el caso que resulte algún problema infactible resolver un problema (3.10) para construir el corte de factibilidad necesario.

El Paso 2 es finito pues consiste en resolver un problema lineal.

El número de iteraciones que realiza el algoritmo también es finito, las iteraciones ocurren por que el Paso 1 agregó un corte de factibilidad o optimalidad al problema maestro.

Caso sea un corte de factibilidad. En la sección 2.1 de [21] se demuestra que cada escenario puede crear a lo más un número finito de cortes de factibilidad. Producto de estos cortes el subproblema puede obtener del maestro una solución que lo hace factible o dejar el maestro infactible, con lo que termina el algoritmo. Como existe una cantidad finita de escenarios se tiene que en finitas iteraciones o todos los escenarios son factibles o el maestro es infactible.

Caso se entregue un corte de optimalidad. Como se nota en (3.9) se puede agregar a lo más una cantidad finita de cortes de optimalidad para describir completamente la función $Q(x)$.

3.6.2 Algoritmo de Descomposición Anidada de Benders

Este algoritmo sigue el mismo principio que el algoritmo de descomposición de Benders pero implementado a un problema de recurso lineal multietapas. El problema que

resuelve es:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & c_1 x_1 + \mathbb{E}_{\omega_2} \{ \text{Min} c_2 x_2 + \mathbb{E}_{\omega_3} \{ \dots + \mathbb{E}_{\omega_T} \{ \text{Min} c_T x_T \} \dots \} \} \\
\text{s.a.} \quad & A_1 x_1 \leq b_1 \\
& -B_1 x_1 + A_2 x_2 \leq \omega_2 \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& -B_{T-1} x_{T-1} + A_T x_T \leq \omega_T
\end{aligned} \tag{3.12}$$

donde:

$$x_t \geq 0, t = 1, \dots, T$$

$\omega_t \in \Omega, t = 2, \dots, T$ son vectores aleatorios definidos en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P)

\mathbb{E}_{ω_t} corresponde a la esperanza matemática con respecto a ω_t .

El método de descomposición anidada de Benders se basa en reconocer el mismo tipo de problema de dos etapas que resuelve el método de descomposición de Benders. Si se mira la optimización de cada etapa se tiene que se deben resolver los siguientes problemas:

$$\begin{aligned}
z_t(x_{t-1}, \omega_t) = \quad & \text{Min}_{x_t \in \mathcal{X}} \quad c_t x_t + z_{t+1}(x_t) \\
\text{s.a.} \quad & A_t x_t \leq \omega_t + B_{t-1} x_{t-1} \\
& x_t \geq 0
\end{aligned}$$

Donde $z_{t+1}(x_t) = \mathbb{E}_{\omega_{t+1}} \{ z_{t+1}(x_t, \omega_{t+1}) \}$. Para este método se discretiza la aleatoriedad en escenarios ω_{tj} , con $j \in \{1, \dots, J_t\}$, cada uno con probabilidad p_{tj} . Al discretizar la aleatoriedad en cada etapa se genera un árbol de escenarios posibles. En este árbol se define a ω_{t-1, a_j} como el escenario antecesor a ω_{tj} .

La resolución de estos problemas aplicando descomposición de Benders en dos etapas corresponde a resolver las siguientes relajaciones del problema anterior:

$$z_t(x_{t-1, a_j}, \omega_{tj}) = \text{Min}_{(x_{tj}, \gamma_{tj}) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}} \quad c_t x_{tj} + \gamma_{tj} \tag{3.13.1}$$

$$\text{s.a.} \quad A_t x_{tj} \leq \omega_{tj} + B_{t-1} x_{t-1, a_j} \tag{3.13.2}$$

$$\gamma_{tj} + E_{tj}^i x_{tj} \geq d_{tj}^i \quad i = 1, \dots, I_{tj} \tag{3.13.3}$$

$$F_{tj}^s x_{tj} \geq h_{tj}^s \quad s = 1, \dots, S_{tj} \tag{3.13.4}$$

$$x_{tj} \geq 0$$

(3.13)

Donde las matrices E_{tj}^i , F_{tj}^s y lados derechos d_{tj}^i y h_{tj}^s se obtienen del problema dual de los problemas asociados a $z_{t+1}(x_{tj})$ de la misma forma en que se obtienen los cortes de optimalidad y factibilidad en el método de descomposición de Benders.

El algoritmo consiste en ir gradualmente generando los cortes de optimalidad y factibilidad en todos los subproblemas. El algoritmo descrito por Birge en [1] es el siguiente:

Paso 0: Fijar $I_{tj} = S_{tj} = 0$, $\gamma_{tj} = 0$ en el problema (3.13) para todo t . Para $t = 1$ resolver (3.13).

Si el problema es infactible, FIN. El problema es infactible.

Si no ir a Paso 1.

Paso 1: Utilizar todas las soluciones x_{tj}^* , para $j \in \{1, \dots, J_t\}$, para definir los cortes (3.13.2) de los problemas descendientes correspondientes. Resolver todos los problemas de etapa $t + 1$.

Si existe un problema en la etapa $t + 1$ infactible, construir un corte de factibilidad (3.13.4) para el problema $j \in \{1, \dots, J_t\}$ antecesor. $I_{tj} = I_{tj} + 1$. Resolver este problema j, t .

Si el problema j, t es infactible y $t = 1$, entonces FIN. Problema infactible.

Si el problema j, t es infactible y $t > 1$, entonces $t = t - 1$ e ir a Paso 1.

Si el problema j, t es factible ir a paso 1.

Si no, todos los problemas en $t + 1$ son factibles. Se tienen dos posibilidades

Si $t < T - 1$, entonces $t = t + 1$, e ir a Paso 1.

Si $t = T - 1$, entonces, para los $\gamma_{tj} = 0$ fijar $\gamma_{tj}^* = -\infty$. Ir a Paso 2.

Paso 2: Dadas las soluciones actuales factibles en el periodo $t + 1$, construir las matrices E_{tj}^i y los vectores d_{tj}^i , como en el algoritmo de descomposición de Benders, para todos los escenarios j en la etapa t .

Si algún escenario en la etapa t satisface $\gamma_{tj}^* < d_{tj}^i - E_{tj}^i x_{tj}^*$, agregar el corte de optimalidad al problema, $I_{tj} = I_{tj} + 1$, resolver todos los problemas en la etapa t , y

Si $t < T - 1$, $t = t + 1$ e ir a Paso 1.

Si no ir a Paso 2.

Si no, todos los escenarios satisfacen el criterio de optimalidad, entonces

Si $t = 1$, FIN, la solución actual es el óptimo.

Si $t > 1$, $t = t - 1$ y volver a Paso 2.

La demostración de la convergencia de este algoritmo para problemas de recurso lineal multietapas con estocasticidad en el lado derecho fue realizada por Birge [1]. Se basa en el hecho que el problema de recurso lineal en dos etapas con aleatoriedad en el lado derecho converge. Gracias a esto, al discretizar en un número finito de escenarios el algoritmo multietapas retrocede de la etapa t a la $t - 1$ y avanza para lograr factibilidad en un número finito de pasos, luego, el algoritmo converge.

3.6.3 Algoritmo de Descomposición de Lagrange

Este algoritmo resuelve de la misma forma problemas de recurso de una etapa o multietapas. El método consiste en plantear el problema lineal de gran tamaño equivalente y relajar las restricciones de no-anticipatividad, desacoplando el problema por etapas. Con esto la resolución del problema de gran tamaño es eficiente.

Para un ejemplo de tres etapas el problema que se debe resolver es el siguiente:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{Min} & c_1x_1 + & \mathbb{E}_{\omega_2}\{\text{Min}c_2x_2 + & \mathbb{E}_{\omega_3}\{\text{Min}c_3x_3\} & \} & \\
 \text{s.a.} & A_1x_1 & & & & = b_1 \\
 & -B_1x_1 & +A_2x_2 & & & = \omega_2 \\
 & & -B_2x_2 & +A_3x_3 & & = \omega_3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & & \geq 0
 \end{array} \tag{3.14}$$

Primero será necesario identificar las variables que están involucradas con restricciones en más de una etapa, es decir, en este ejemplo $x_1 = (x_1, x_{12})$ y $x_2 = (x_2, x_{23})$. Además se considerará que ocurren $k \in \{1, \dots, K\}$ escenarios en la etapa 2 y $l \in \{1, \dots, L\}$ en la etapa 3 para cada escenario k , con lo que el problema de recurso consiste en resolver el siguiente problema lineal, que se dice en forma compacta:

$$\begin{array}{llllllll}
 \text{Min} & c_1x_1 & +c_{12}x_{12} & +\sum_k c_2x_2^k & +\sum_k c_{23}x_{23}^k & +\sum_{kl} c_3x_3^{kl} & & \\
 \text{s.a.} & A_1x_1 & +A_{12}x_{12} & & & & & = b_1 \\
 & -B_{12}x_{12} & +A_2x_2^k & +A_{23}x_{23}^k & & & & = \omega_2^k \quad \forall k \\
 & & & -B_{23}x_{23}^{kl} & A_3x_3^{kl} & & & = \omega_3^{kl} \quad \forall k, l
 \end{array}$$

Para hacer más eficiente la solución de este problema se agregan variables redundantes y restricciones no-anticipatividad para obtener el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
& \text{Min} \quad c_1 x_1 + c_{12} x_{12} + \sum_k c_2 x_2^k + \sum_k c_{23} x_{23}^k + \sum_{kl} c_3 x_3^{kl} \\
& \text{s.a.} \\
& A_1 x_1 + A_{12} x_{12} = b_1 \\
& \quad x_{12} - x_{12}^k = 0 \\
& \quad -B_{12} x_{12}^k + A_2 x_2^k + A_{23} x_{23}^k = \omega_2^k \quad \forall k \\
& \quad \quad \quad x_{23}^k - x_{23}^{kl} = 0 \\
& \quad \quad \quad -B_{23} x_{23}^{kl} + A_3 x_3^{kl} = \omega_3^{kl} \quad \forall k, l
\end{aligned}$$

Utilizando relajación lagrangeana aumentada sobre las restricciones de no anticipatividad llegamos a un problema cuadrático desacoplado. El problema equivalente ahora es maximizar $D_\rho(\pi)$ donde:

$$\begin{aligned}
& D_\rho(\pi) = \\
& \text{Min} \quad \sum_s \left\{ c_s x^s + \pi_{12}^k (x_{12} - x_{12}^k) + \pi_{23}^{kl} (x_{23}^k - x_{23}^{kl}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\rho}{2} \left(\|x_{12} - x_{12}^k\|^2 + \|x_{23}^k - x_{23}^{kl}\|^2 \right) \right\} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{s.a.} \\
& A_1 x_1 + A_{12} x_{12} = b_1 \\
& \quad -B_{12} x_{12}^k + A_2 x_2^k + A_{23} x_{23}^k = \omega_2^k \quad \forall k \\
& \quad \quad \quad -B_{23} x_{23}^{kl} + A_3 x_3^{kl} = \omega_3^{kl} \quad \forall k, l
\end{aligned}$$

donde $x^s \equiv (x_1, x_{12}, x_{12}^k, x_2^k, x_{23}^k, x_{23}^{kl}, x_3^{kl})$ y $\pi \equiv (\pi_{12}^k, \pi_{23}^{kl})$.

En general, el algoritmo de descomposición lagrangeana obtiene, en la iteración i y para un valor dual π_i , el valor $x_i = \arg \min D_\rho(\pi_i)$. Si x_i es tal que

$$\| (x_{t,t+1}^\mu)_i - (x_{t,t+1}^{\mu l})_i \| \leq \epsilon \quad \forall t, \forall \mu, \forall l$$

donde μ, l son escenarios de la etapa t y $t + 1$ respectivamente, entonces el algoritmo termina y x_i es el óptimo. Caso contrario se debe actualizar π_{i+1} y reducir ρ para volver a optimizar $D_\rho(\pi_{i+1})$.

Si consideramos el ejemplo presentado, los pasos de este algoritmo en más detalle son:

Paso 0: $i = 1$, $\pi_1 = 0$, y $\rho = \rho_1$.

Paso 1: $x_i \in \arg \min D_\rho$, donde $x_i \equiv ((x_1)_i, (x_{12})_i, (x_{12}^k)_i, (x_2^k)_i, (x_{23}^k)_i, (x_{23}^{kl})_i, (x_3^{kl})_i)$

Paso 2: Si para una tolerancia dada $\epsilon > 0$, se cumple

$$\|(x_{12})_i - (x_{12}^k)_i\| \leq \epsilon \quad \text{y} \quad \|(x_{23}^k)_i - (x_{23}^{kl})_i\| \leq \epsilon$$

FIN, Se encontró la solución óptima.

Paso 3: Reducir ρ en una cantidad adecuada.

Paso 4: Actualizar los multiplicadores duales dado β (paso).

$$\begin{aligned} (\pi_{12}^k)_{i+1} &= (\pi_{12}^k)_i - \beta \left((x_{12}^0)_i - (x_{12}^k)_i \right) \\ (\pi_{23}^{kl})_{i+1} &= (\pi_{23}^{kl})_i - \beta \left((x_{23}^{k0})_i - (x_{12}^{kl})_i \right) \\ (\pi_{12}^0)_{i+1} &= \sum_k (\pi_{12}^k)_{i+1} \\ (\pi_{23}^{k0})_{i+1} &= \sum_l (\pi_{23}^{kl})_{i+1} \end{aligned}$$

Paso 5: $i = i + 1$. Ir a Paso 1.

La demostración de convergencia de este algoritmo se debe a que el problema planteado como en (3.15) presenta el problema de recurso multietapas lineal como la optimización de una función cuadrática sujeta a restricciones lineales. Resultados clásicos de optimización garantizan la convergencia de algoritmos de descomposición lagrangeana, como el anterior, en este tipo de problema.

Capítulo 4

El Modelo de Decisión de Inversiones

4.1 Introducción

En este capítulo se presenta una modelación detallada que aborda el problema de decisiones de inversión en el sector eléctrico. El modelo matemático utilizado para representar el problema, es un problema de optimización estocástica con recurso.

La demanda por energía eléctrica en Chile ha demostrado un crecimiento propio de una economía en desarrollo, y se estima que a futuro será del orden del 8% al año. Ser capaz de satisfacer esta creciente demanda pasa por realizar inversiones que permitan una mayor capacidad de generación y, ya que es necesario realizar inversiones, el problema consiste en optimizar las decisiones de estas inversiones.

Las utilidades de una empresa, que son función de sus decisiones de operación e inversión, están sujetas a varios factores incontrolables para ella, como son: el comportamiento de las demás empresas (es decir la evolución del parque generador independiente de la empresa), las condiciones climáticas que se presenten en el futuro, y la evolución de la demanda futura.

Bajo la hipótesis de competencia perfecta se puede demostrar que si todas las empresas maximizan sus utilidades, entonces todo el sistema minimiza sus costos. Esta forma de descomponer la optimización de todo el sistema en la optimización de cada una de las empresas, para un ejemplo en un sistema eléctrico, es abordada en [4].

Suponiendo que todas las empresas deciden sus inversiones para maximizar sus utilidades se llega a que la política de inversiones que se implementará en el sistema es la que minimiza los costos para el sistema. Luego, se puede plantear un problema de optimización bajo incertidumbre para determinar cuáles serán las inversiones futuras en el sistema.

Resolver este problema de optimización estocástica significa estimar la configuración del sistema eléctrico a futuro bajo la aleatoriedad hidrológica y de demanda, con lo que se puede determinar los ingresos esperados de cualquier central del sistema. Este enfoque entrega una herramienta para comparar distintos proyectos en el sector eléctrico.

4.2 Definición del Problema

Se entiende que un plan de obras es el conjunto de inversiones en el sector de generaciones eléctricas necesarias para satisfacer la creciente demanda. Determinar este plan de obras consiste en decidir cómo robustecer y expandir el sistema de transmisiones, qué tipo de centrales construir, y cuándo hacerlo. El resultado del problema de optimización será el plan de obras que debe resultar en el sistema eléctrico si las empresas privadas toman decisiones de inversión y operación que maximicen sus utilidades.

La generación de energía eléctrica se puede separar en dos tipos: la generada por centrales hidroeléctricas, que tienen un alto costo fijo pero costo variable despreciable, y la energía generada por centrales térmicas, que tienen un menor costo fijo con un alto costo variable. Debido a que la generación eléctrica en Chile es en gran parte hidráulica (del orden del 70% de la energía eléctrica generada lo es), la capacidad de producción (la oferta) de energía depende de la cantidad de agua que se puede almacenar por el sistema.

La demanda por energía eléctrica siempre debe ser satisfecha. Si se puede generar la demanda con centrales hidráulicas se tendrá un menor costo marginal, pero si falta agua en los embalses se debe generar la demanda insatisfecha usando las centrales térmicas, lo que sube los costos marginales. Por ley la operación del SIC debe ser aquella que minimice los costos marginales de operación durante un horizonte de operación dado. Luego hay que ser capaz de "ahorrar" energía en los embalses en momentos de grandes afluentes para mantener los costos marginales bajos en tiempos de sequía.

Con lo que los precios y consecuentemente, los ingresos y costos de operación quedan determinados por: la demanda, el parque generador y las condiciones climáticas (cuánta agua cayó). Estos últimos dos factores determinan la oferta.

Luego el problema se puede plantear en términos de encontrar el plan de obras que minimice los costos de todo el sistema (los costos de inversión más los costos de operación). Los costos de operación dependen, no sólo de la cantidad de agua almacenada (la hidrología) y la demanda, sino que también del plan de obras existente. Al considerar esto se reconoce un problema de optimización jerárquico, donde las decisiones de inversión afectan las decisiones de operación y ambas tienen efecto en los costos que se desea minimizar.

Considerando lo anterior se puede formular el problema como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} && ci(x) + co(x, y, \omega) \\
 & && x, y \\
 & \text{s.a.} && ri(x) \leq 0 \\
 & && ro(x, y, \omega) \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde

x : representa las decisiones de inversión

y : representa las decisiones de operación

ω : representa los factores desconocidos (demanda, hidrologías)

$ci(\cdot)$: función de costos de inversión

$co(\cdot, \cdot, \cdot)$: función de costos de operación

$ri(\cdot) \leq 0$: restricciones de inversión

$ro(\cdot, \cdot, \cdot) \leq 0$: restricciones de operación del sistema

Se debe tomar en cuenta que en la realidad los costos de operación en cada etapa están dados por la operación de las centrales térmicas en esa etapa, es decir $co(x, y, \omega) = co(y)$. La dependencia de estos costos de la hidrología y los proyectos realizados están presentes en las restricciones de operación $ro(x, y, \omega) \leq 0$.

4.3 Formulación del Problema

Por lo discutido anteriormente se concluye que los costos totales del sistema, que son los costos de inversión y de operación, se ven afectados por fenómenos incontrolables

para los planificadores (la demanda y el clima). Estos fenómenos se pueden representar mediante variables aleatorias.

Luego se concluye que no existe un plan de obras que sea el más barato para todos los escenarios de demanda e hidrologías a la vez, y al resolver este problema, será satisfactorio encontrar "la solución más barata en promedio (sobre todos los escenarios de demanda e hidrologías)", o encontrar el plan que "en todos los escenarios no sea tan caro" (Min-Max).

Estos son criterios para seleccionar una solución entre varias que no son comparables, pues en distintos escenarios se llega a distintas soluciones. Por ejemplo, el plan de obras óptimo para satisfacer una demanda dado un escenario hidrológico con poca agua puede no incluir la construcción de ninguna central hidráulica, en cambio para satisfacer la misma demanda en un escenario hidrológico con abundante agua seguramente se deben incluir centrales hidráulicas. Cada uno de estos planes es el mejor en su escenario en particular, pero: ¿cuál es mejor para ambos escenarios? Luego, para poder seleccionar un único plan de obras "óptimo" para todos los escenarios, será suficiente escogerlo mediante algún criterio como los mencionados.

Todos estos criterios de optimización se pueden escribir como la esperanza (con respecto a la variable aleatoria) de alguna función, que depende del criterio a utilizar, compuesta con la función objetivo, es decir, no se resolverá (4.1), si no que:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \mathbb{E}_\omega\{g_0(ci(x) + co(y))\} \\ & x, y \\ \text{s.a.} \quad & \mathbb{E}_\omega\{g_1(ri(x))\} \leq 0 \\ & \mathbb{E}_\omega\{g_2(ro(x, y, \omega))\} \leq 0 \end{aligned}$$

donde $g_0(\cdot)$, $g_1(\cdot)$ y $g_2(\cdot)$ son las funciones con las que se implementa el criterio de selección. Para seguir el trabajo se usarán $g_0(\cdot)$, $g_1(\cdot)$ y $g_2(\cdot)$ iguales a la identidad, lo que significa que se buscará el plan de obras que tenga el menor costo en promedio sobre todos los escenarios. Luego el problema será:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \mathbb{E}_\omega\{ci(x) + co(y)\} \\ & x, y \\ \text{s.a.} \quad & \mathbb{E}_\omega\{ri(x)\} \leq 0 \\ & \mathbb{E}_\omega\{ro(x, y, \omega)\} \leq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Enfatizando la estructura jerárquica del problema, se puede plantear éste como un problema de recurso simple. Las características principales son:

- Las decisiones de operación dependen de las decisiones de inversión.
- Las decisiones de inversión se toman antes de la aleatoriedad, mientras que las de operación se escogen respondiendo al resultado de las variables aleatorias (recurso).

Luego de (4.2) llegamos, al minimizar primero con respecto a las variables de operación y dadas las inversiones x , a:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & ci(x) + \mathbb{E}_\omega\{Q(x, \omega)\} \\ x \in \mathcal{X} \quad & \\ \text{s.a.} \quad & ri(x) \leq 0 \\ & Q(x, \omega) = \text{Inf}_{y \in \mathcal{Y}} \{co(y) | ro(x, y, \omega) \leq 0\} \end{aligned}$$

Resulta una aproximación no realista suponer que dado un escenario aleatorio, este se conoce para todo el horizonte de planificación antes de escoger las variables de operación. Esto significa, por ejemplo, que en cada escenario se sabe como es la hidrología en los 10 años que dura el horizonte de planificación, antes de escoger las variables de operación.

Lo que ocurre en la realidad es que durante la operación sólo se tiene información de la hidrología y demanda del momento. Lo que sucederá en etapas posteriores continúa siendo incierto. Esto se puede representar utilizando un modelo de recurso multietapas, donde las variables aleatorias de etapas posteriores continúan siendo desconocidas en la optimización de una etapa.

Para representar esto se deben utilizar variables de operación y aleatoriedades por etapa. Es decir, si representamos la operación del sistema desde la etapa 1 a la etapa T , entonces se necesitan $y = (y_1, \dots, y_T)$ y $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)$. Además, es necesario que los costos de operación se puedan separar por etapas. Con esto el costo de operación promedio de una decisión de inversión x es:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \mathbb{E}_\omega\{Q(x, \omega)\} = \\ &\mathbb{E}_{\omega_1} \left\{ \text{Min}_{y_1 \in \mathcal{Y}_1} co_1(y_1) + \mathbb{E}_{\omega_2} \left\{ \text{Min}_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} co_2(y_2) + \mathbb{E}_{\omega_3} \left\{ \dots + \mathbb{E}_{\omega_T} \left\{ \text{Min}_{y_T \in \mathcal{Y}_T} co_T(y_T) \right\} \dots \right\} \right\} \right\} \\ \text{s.a.} \quad & ro_1(x, y_1, \omega_1) \leq 0 \\ & ro_t(x, y_{t-1}, y_t, \omega_t) \leq 0 \quad t \in \{2, \dots, T\} \end{aligned}$$

esta representación permite definir el costo operativo promedio de la etapa t como:

$$\text{Si } t = 1, Q_1(x) = \mathbb{E}_{\omega_1}\{Q_1(x, \omega_1)\}$$

$$\text{Si } t > 1, Q_t(x, y_{t-1}) = \mathbb{E}_{\omega_t}\{Q_t(x, y_{t-1}, \omega_t)\}$$

donde el costo operativo en la etapa t dado el escenario ω_t es:

$$Q_1(x, \omega_1) = \begin{array}{ll} \text{Min} & co_1 y_1 + Q_2(x, y_1) \\ & y_1 \in \mathcal{Y}_1 \\ \text{s.a.} & ro_1(x, y_1, \omega_1) \leq 0 \end{array}$$

y para $t > 1$

$$Q_t(x, y_{t-1}, \omega_t) = \begin{array}{ll} \text{Min} & co_t y_t + Q_{t+1}(x, y_t) \\ & y_t \in \mathcal{Y}_t \\ \text{s.a.} & ro_t(x, y_{t-1}, y_t, \omega_t) \leq 0 \end{array}$$

Para simplificar la notación se considerarán las variables de operación y_0 , que corresponden al estado inicial del sistema eléctrico, valores iniciales de los embalses. Con esto se puede utilizar la segunda expresión arriba $\forall t \in \{1, \dots, T\}$.

Finalmente se tiene que el problema de recurso abordado es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & ci(x) + \mathbb{E}_{\omega_1} \{Q_1(x, \omega_1)\} \\ & x \in \mathcal{X} \\ \text{s.a.} & ri(x) \leq 0 \end{array} \quad (4.3)$$

donde $\forall t \in \{1, \dots, T\}$

$$Q_t(x, y_{t-1}, \omega_t) = \begin{array}{ll} \text{Min} & co_t y_t + \mathbb{E}_{\omega_{t+1}} \{Q_{t+1}(x, y_t, \omega_{t+1})\} \\ & y_t \in \mathcal{Y}_t \\ \text{s.a.} & ro_t(x, y_{t-1}, y_t, \omega_t) \leq 0 \end{array}$$

4.4 El Sistema de Generación Eléctrico

En esta sección se describirán en detalle los distintos elementos presentes en el problema de recurso que se plantea. Estos elementos son los que describen un sistema de generación eléctrico.

El sistema de generación y transmisión consta de centrales hidroeléctricas, algunas con embalses, centrales térmicas y focos de demanda de energía, todo esto unido mediante una red de líneas de transmisión, que llevan la energía generada a los focos de demanda.

Esta estructura genera un grafo donde las líneas de transmisión son los arcos del grafo, los nodos de este grafo, que pueden ser centrales, focos de demanda o una combinación de éstos, son denominados barras del sistema eléctrico.

Se desea determinar los proyectos que son necesarios incluir en este sistema. La realización de un proyecto significa que al grafo se le modifica o agrega un nodo o línea. Luego

existe el grafo que incluye todos los proyectos posibles de realizar, que se denotará el grafo completo. Este grafo es tal que contiene todos los grafos que representan combinaciones de proyectos realizados.

Se usarán los siguientes índices para enumerar los distintos elementos del grafo completo, los proyectos, las etapas del período de planificación y las cuencas hidrográficas:

- Sea \mathcal{J} el conjunto de todas las centrales, presentes y futuras. $\mathcal{J} = J^p \cup J^e$ donde J^p es el conjunto de proyecto de centrales, y J^e es el conjunto de centrales existentes. Además

$$\mathcal{J} = J_{T_e}^p \cup J_{H_s}^p \cup J_{H_e}^p \cup J_{T_e}^e \cup J_{H_s}^e \cup J_{H_e}^e$$

donde los subíndices T_e, H_s y H_e representan centrales térmicas, hidráulicas sin embalse y hidráulicas con embalse respectivamente. Se denotarán:

$$J_{T_e} = J_{T_e}^p \cup J_{T_e}^e, \quad J_{H_s} = J_{H_s}^p \cup J_{H_s}^e, \quad J_{H_e} = J_{H_e}^p \cup J_{H_e}^e$$

- Sea $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$ el conjunto de líneas de transmisión que puede tener el sistema en total. $\mathcal{M} = M^p \cup M^e$ con M^p proyectos de líneas y M^e las líneas existentes.
- Sea $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, el conjunto de barras del sistema en total.
- Sea $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$, el conjunto de todas las cuencas del sistema.
- Sea T el número de etapas en el horizonte de planificación.
- $\text{card}\{\mathcal{J}\} = J$, $\text{card}\{J^p \cup M^p\} = I$, $\text{card}\{J_{H_e}\} = L$ y $\text{card}\{J_{H_s}\} = H$.

Los proyectos que serán estudiados, y se enumeran con el índice i , también están indexados como línea, embalse o central del grafo completo.

La necesidad de enumerar las cuencas viene de que la información hidrológica está dada por cuencas, luego para determinar los niveles de los embalses es necesario considerar cuáles son las cuencas que aportan a ese embalse.

4.5 Descripción de las Variables

4.5.1 Variables de Inversión

Se tomarán las decisiones de inversión y operación para todo el período de estudio que será dividido en etapas. En cada etapa se decidirá de entre varios proyectos cuáles se

realizarán. Una forma de hacer esto es considerando:

$$x = (x_{it}) \text{ donde } x_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in J^p \cup M^p, \forall t$$

Donde si $x_{it} = 1$ significa que el proyecto i se realiza en la etapa t y si $x_{it} = 0$ no se realiza. Para este modelo es preferible considerar la siguiente variable:

$$X = (X_{it}) \text{ donde } X_{it} = \sum_{s=1}^t x_{is} \quad \forall i \in J^p \cup M^p, \forall t$$

Para esta variable $X_{it} = 1$ significa que la central i está construida o se construye en la etapa t y $X_{it} = 0$ que no. $X_t = (X_{it})_{i \in J^p \cup M^p}$ representa todas las variables de inversión en la etapa t .

Con esta definición se obtiene una variable $X \in \mathcal{X} \equiv \{0, 1\}^{IT}$.

4.5.2 Variables de Operación

Por otro lado las decisiones de operación consisten en cuánto generar en cada central, como administrar el agua en los embalses y en cómo administrar la red de transmisión. A continuación se describen las variables utilizadas y detalla el motivo por el cual éstas son importantes en el modelo de operación.

- La generación de cada central es importante debido a que esta cantidad está directamente ligada a los costos variables de producción. Una central hidroeléctrica se considera que no tiene costo variable de producción, ya que no paga nada por el agua, mientras que una central térmica tiene un costo variable considerado lineal con respecto a la cantidad producida, este costo en el fondo refleja el gasto en combustible incurrido en producir un MWh.

Se utiliza entonces la variable $g = (g_{jt})$, con $g_{jt} \in \mathbb{R}_+$ para representar la generación promedio, en MW, de la central j en la etapa t . Además, debido a problemas causados por las características técnicas de las centrales térmicas (ver restricciones de generación y de satisfacción de demanda), se necesita una variable $a = (a_{jt})$ donde $(a_{jt}) \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall t$. Donde $a_{j't} = 1$ si la central j debe generar en la etapa t y 0 si no.

- La necesidad de administrar adecuadamente el agua por el sistema se debe a la posibilidad de "ahorrar" energía en los embalses. Si hoy se genera energía con las

centrales hidráulicas hasta vaciar los embalses, lo que significa bajísimos costos de generación, el día de mañana se tendrán que usar centrales térmicas para satisfacer la demanda, lo que encarece la energía.

Luego, se busca la administración del recurso hídrico de forma que el costo de producción durante todo el horizonte de planificación sea más bajo. Hay que recordar que no se sabe cuánto va a llover a futuro cuando se trata de decidir en cada etapa la operación de los embalses.

Esta operación se puede realizar mediante variables que representen cómo se retira agua de los embalses, quedando el nivel final de un embalse durante una etapa como una variable de estado. Esta información es la necesaria para describir los embalses al comienzo de la etapa siguiente. Luego se obtiene el siguiente vector $\hat{V} = (\hat{V}_{lt})_{lt}$ para cada etapa t y $l \in J_{He}$, donde:

$$\hat{V}_{lt} \equiv (Vv_{lt}, Vg_{lt}, Vf_{lt}, Vr_{lt}, V_{lt}) \in \mathbb{R}_+^5$$

donde:

Vv_{lt} es el volumen de agua vertido del embalse l en la etapa t

Vg_{lt} es el volumen de agua del embalse l usado para generación en la etapa t

Vf_{lt} es el volumen de agua que se filtra del embalse l en la etapa t

Vr_{lt} es el volumen de agua del embalse l dirigido a riego en la etapa t

V_{lt} es el volumen de agua del embalse l al final de la etapa t

Para las centrales hidráulicas sin embalse, en las que sólo es relevante el volumen utilizado para la generación, resulta necesario definir:

$$\hat{V}_{lt} = (Vg_{lt}) \quad \text{para } l \in J_{Hs}, t \in \{1, \dots, T\}$$

- La red de transmisión afecta la generación de dos formas: Primero, la red establece límites de transmisión de las centrales a los centros de demanda, lo que significa que para satisfacer la demanda en un punto, la energía utilizada no puede ser generada en cualquier parte, si no en un lugar tal que la transmisión al punto de demanda sea factible, y segundo, todas las líneas tienen una pérdida de energía asociada, modelada como un término cuadrático, luego la generación de las centrales debe ser prevista para satisfacer tanto la demanda como la pérdida en la transmisión.

La variable relevante en el fenómeno de la transmisión es: $f = (f_{mt})$ donde $f_{mt} \in \mathbb{R}$ que representa el flujo de potencia activa sobre la línea m en la etapa t .

Se utilizará además la variable F_{mt} para representar el flujo de potencia efectiva sobre la línea m en la etapa t en condiciones de demanda extrema. Esto sirve para simular restricciones de seguridad que debe tener el sistema eléctrico.

Con esto el vector de variables de operación queda:

$$y_t = (a_{jt}, g_{jt}, Vv_{lt}, Vg_{l't}, Vf_{lt}, Vr_{lt}, V_{lt}, f_{mt}, F_{mt}) \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$j \in \mathcal{J}$$

$$l \in J_{He}$$

$$l' \in J_{Hs} \cup J_{He}$$

$$m \in \mathcal{M}$$

$$\implies y \in \mathcal{Y} \equiv \{0, 1\}^{TJ} \times \mathbb{R}_+^{T(J+4L+H)} \times \mathbb{R}^{2TM}$$

Por comodidad de notación en la descripción de las restricciones se utilizará

$$y_t = (a_t, g_t, Vv_t, Vg_t, Vf_t, Vr_t, V_t, f_t, F_t)$$

el vector de todas las variables de operación en la etapa t .

4.5.3 Variables Aleatorias

De la introducción se puede rescatar que las incertidumbres más relevantes en este problema son la demanda a satisfacer que es desconocida y la cantidad de agua que estará disponible en el futuro, también desconocida.

- La demanda por energía eléctrica se considera que crece entre un 2% y un 10% al año, con un valor actual conocido. Sin embargo, se sabe que el crecimiento de la demanda experimenta un comportamiento estacional durante el año. Para poder representar esta estacionalidad se trabaja con datos y etapas trimestrales. Así, para obtener una buena representación de la demanda, se obtienen los valores de energía demandada al año y se multiplica por coeficientes de repartición trimestral. La demanda se caracterizará por $\bar{d} = (\bar{d}_{nt})$ con $\bar{d}_{nt} \in \mathbb{R}_+$ que será el valor de la demanda en MW promedio trimestral en la barra n y en la etapa t .

- La cantidad de agua que se podrá utilizar en generación eléctrica tiene directa relación con la cantidad de lluvias registrada en la zona de las centrales hidráulicas, y esto se puede representar mediante los caudales en las distintas cuencas.

Se llamarán hidrologías a los datos de caudales naturales presentes en cada cuenca. Sobre el comportamiento de la hidrología en función del tiempo se puede notar que existe efecto estacional, debido al invierno y los deshielos en la primavera.

Se utilizan series de tiempo para simular las hidrologías en las cuencas. Y se disponen de datos históricos semanales durante 40 años. Con estos datos se realizan las simulaciones para el problema operacional.

Se llamará $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_{kt})$, con $\tilde{\omega}_{kt} \in \mathbb{R}_+$, al caudal en la cuenca k en la etapa t

Con esto el vector de variables aleatorias que aparece en (4.3) queda:

$$\omega_t = (\bar{\omega}_{kt}, \bar{d}_{nt}) \quad \begin{array}{l} k \in \mathcal{K} \\ n \in \mathcal{N} \end{array} \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$\implies \omega \in \mathcal{W} \equiv \mathbb{R}_+^{T(K+N)}$$

Las variables aleatorias en la etapa t son $\omega_t = (\bar{\omega}_t, \bar{d}_t)$.

4.6 Función Objetivo

Se debe especificar la forma de las funciones $ci(\cdot)$ y $co_t(\cdot)$, para $t \in \{1, \dots, T\}$.

- Cada vez que se realiza un proyecto se incurren en una cantidad determinada de costos. En este valor se pueden considerar la forma de financiamiento, los intereses, amortizaciones y hasta los costos fijos de operación del proyecto. Todo esto se puede determinar de antemano para cada proyecto que postule al plan de obras. Luego para determinar el costo de inversiones en un plan de obras basta sumar los costos de todos los proyectos que lo integren, actualizados por la tasa de descuento. Con esto podemos escribir:

$$ci(x) = c \cdot x = \sum_{i \in \mathcal{J}^p, 0 \leq t \leq T} c_{it} X_{it}$$

con c_{it} definido de la siguiente manera: Sea Inv la inversión total para el proyecto i . Esta inversión se separa en montos iguales para todas las etapas como sigue:

$$Inv = \sum_{t=0}^{\infty} c_{it} \quad \text{con} \quad c_{it} = \frac{f}{(1 + \text{tasa})^{t-1}}$$

luego c_{it} es la cuota en la etapa t , actualizada, del costo total del proyecto i . El valor 'tasa' representa, la tasa de descuento que se considera para el sistema. En el sector eléctrico se utiliza, por ley, una tasa de descuento anual del 10%.

- Como fue mencionado anteriormente sólo las centrales térmicas incurren en costos de operación (los costos variables), y éste es lineal con respecto a la cantidad de energía producida. Como los costos fijos del sistema serán constantes sólo se puede disminuir los costos variables. Los costos fijos de los nuevos proyectos son incluidos

en el costo de realizar el proyecto actualizándolos por la tasa de descuento como se vio arriba. Luego se puede escribir:

$$co_t(y_t) = c_t^o \cdot y_t = \sum_{j \in J_{Te}} (c_{jt}^o g_{jt} + k_{jt} a_{jt})$$

con c_{jt}^o el costo de generar un MW durante toda la etapa operando la central j . Y k_{jt} , el costo adicional de hacer partir la central j . La dependencia de estos costos de t se debe a la actualización de estos valores con la tasa de descuento (como ocurre con los costos de inversión).

4.7 Restricciones

En esta sección se muestran las relaciones entre las variables definidas en la sección anterior mediante la descripción de las restricciones de inversión y operación (funciones $ri(\cdot)$ y $ro_t(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ en (4.5)).

Estas restricciones son descritas para una etapa $t \in \{1, \dots, T\}$. Para no sobrecargar la notación se omitirán los subíndices t de las matrices y lados derechos que forman las restricciones. Se subentiende que en distintas etapas estas matrices pueden ser distintas.

4.7.1 Restricciones de Inversión

Dados distintos proyectos compitiendo para participar en el sector eléctrico, existen los siguientes tipos de restricciones:

- Una vez que se ha construido el proyecto éste no se puede deshacer:

$$X_{it} \leq X_{it+1} \quad \forall i \in J^p \cup M^p, \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

- Existen cotas superiores para la cantidad de proyectos que se pueden hacer:

$$X_{iT} \leq Cota_i \quad \forall i \in \{1, \dots, I\}$$

Por ejemplo un proyecto hidráulico tiene $Cota_i = 1$, o se construye o no, pero no se puede construir el proyecto dos veces.

- Existen proyectos que son incompatibles entre si. De un conjunto de proyectos S_r sólo se puede realizar uno de ellos:

$$\sum_{s \in S_r} X_{sT} \leq 1$$

Por ejemplo el conjunto S_r puede definir distintas versiones de un proyecto.

- Pueden existir incompatibilidades temporales entre proyectos. Por ejemplo de un conjunto de proyectos S_u se puede construir a lo más uno por etapa:

$$\sum_{i \in S_u} (X_{it} - X_{it-1}) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, I\}$$

Estas restricciones se pueden escribir en forma matricial, para una matriz A apropiada se tendrá:

$$AX \leq v \tag{4.4}$$

donde v es un vector que contiene constantes positivas en todas sus coordenadas.

4.7.2 Restricciones de Generación

Cada central sólo puede generar entre su capacidad mínima y máxima.

$$g_{jmin} a_{jt} \leq g_{jt} \leq g_{jmax} a_{jt} \quad \forall j \in \mathcal{J}, t = 1, \dots, T$$

donde:

$$\begin{aligned} g_{jmin} &\in \mathbb{R}_+^* & \forall j \in J_{Te} \\ g_{jmin} &\in \mathbb{R}_+ & \forall j \in J_{Hs} \cup J_{He} \\ g_{jmax} &\in \mathbb{R}_+^* & \forall j \in \mathcal{J} \end{aligned}$$

además se debe agregar la restricción que una central que no existe no puede generar:

$$a_{jt} \leq X_{jt} \quad \forall j \in \mathcal{J}^p$$

Estas restricciones se pueden escribir en forma matricial:

$$\mathbb{I}_1 g_t \leq B_1 a_t \quad \text{y} \quad Z a_t \leq X_t \quad \forall t \tag{4.5}$$

para matrices \mathbb{I} , B_1 y Z adecuadas.

Las centrales hidráulicas pueden generar hasta un máximo dado por el caudal de agua que usan y su eficiencia o rendimiento promedio.

$$\begin{aligned} g_{jt} &\leq \bar{\eta}_j V g_{jt} & \forall j \in J_{Hs} \cup J_{Ha}, t \in \{1, \dots, T\} \\ V g_{jt} &\leq \text{agua}_{jt} & \forall j \in J_{Hs} \cup J_{Ha}, t \in \{1, \dots, T\} \end{aligned}$$

- $agua_{jt}$ es el agua que pasa por la central j en la etapa t , depende de la posición de la central en la red hidráulica, y es función de la operación de embalses y centrales aguas arriba y de los aportes aleatorios dados por las hidrologías de la cuenca donde se encuentre esta central. Luego $agua$ es una suma y resta de los volúmenes operados aguas arriba y de las hidrologías, es decir:

$$\Rightarrow agua = D_1 \widehat{V}_t + E_1 \tilde{\omega}_t \quad \forall t$$

para las matrices D_1 y E_1 adecuadas.

- $\bar{\eta}_j$ representa el rendimiento promedio de la central j . Esto es una aproximación pues, en realidad, este coeficiente depende de la altura del agua en el embalse si se trata de una central con embalse.

Por lo tanto la forma matricial de escribir esta restricción es:

$$Vg_t \leq D_1 \widehat{V}_t + E_1 \tilde{\omega}_t \quad y \quad g_t \leq \eta Vg_t \quad \forall t \quad (4.6)$$

con una matriz η de rendimiento de centrales apropiada.

4.7.3 Restricciones de Satisfacción de Demanda

En cada barra (es decir nodo) del sistema de transmisión se debe satisfacer la demanda para todas las etapas. La primera ley de Kirchhoff nos dice que en cada nodo lo que entra es igual a lo que sale: Para la barra n , si llamamos $\Omega_n \subset \mathcal{M}$ el conjunto de líneas que están conectadas a n , se tiene:

$$d_{nt} + p_{nt} \leq \widehat{g}_{nt} + \sum_{m \in \Omega_n} f_{mt}$$

- p_{nt} representa las pérdidas asociadas a la transmisión de energía desde y hacia la barra.
- \widehat{g}_{nt} representa la generación en la barra n :

$$\widehat{g}_{nt} = \sum_{j \in J_n} g_{jt}$$

con J_n el subconjunto de J que contiene las centrales que están en la barra n .

Esta ecuación general que dice que la potencia promedio ofertada en todos los nodos debe ser mayor o igual que las demandas promedio. De aquí surgen dos problemas:

- a) Debido a que la demanda en la realidad no mantiene un valor promedio durante todo un semestre también es necesario formular una ecuación que prepare al sistema para poder responder a las demandas máximas.
- b) Se puede desarrollar una expresión para las pérdidas como una función cuadrática de los flujos en las líneas.

a) Modelamiento de la generación en un nodo de la red

La demanda en un nodo presenta una forma bien poco regular. Existen grandes diferencias de la potencia demandada dentro de un día. Si se grafica la potencia demandada versus el tiempo, se obtiene una función muy oscilante. Si se ordenan estos valores de potencia de mayor a menor se obtiene la llamada curva de carga, en la que se puede ver cuánto tiempo en total se demandó al menos cierta cantidad de potencia.

Esta curva de carga se aproxima por un bloque de energía a satisfacer (una potencia promedio) y el valor de la demanda máxima. Luego si en la realidad se debe llenar la curva de carga, la aproximación consistirá en satisfacer la demanda promedio durante todo el tiempo y poder satisfacer la demanda máxima en cualquier momento.

Tenemos dos ecuaciones para satisfacer la demanda. Las ecuaciones son de la misma forma de ecuación anterior. Los únicos valores que cambian son los de las variables \hat{g}_{nt} y d_{nt} con respecto al caso.

Para satisfacer el bloque de energía, tenemos:

$$\hat{g}_{nt} = \sum_{j \in J_n} g_{jt} \text{ y } d_{nt} = \bar{d}_{nt}$$

y con esto se escribe:

$$\bar{d}_{nt} + p_{nt} \leq \sum_{j \in J_n} g_{jt} + \sum_{m \in \Omega_n} f_{mt}$$

Para poder satisfacer la demanda máxima instantáneamente, es decir los períodos de punta se necesita otra ecuación similar a la anterior. Se necesita tener suficiente potencia disponible en cualquier momento como para satisfacer la demanda máxima en todos los nodos del sistema.

Luego se tiene que agregar la restricción:

$$D_{nt} + P_{nt} \leq G_{nt} + \sum_{m \in \Omega_n} F_{mt}$$

donde $D_{nt} = \frac{\bar{d}_{nt}}{p} = D_{\max nt}$ y p es una constante, llamada factor de potencia, que representa la razón entre demanda promedio y demanda máxima. El sistema eléctrico chileno usa $p = 0.71$.

Además:

$$G_{nt} = \sum_{j \in (J_{Te} \cup J_{He}) \cap J_n} g_{jmax} a_{jt} + \sum_{j \in J_{Hs} \cap J_n} g_{jt}$$

P_{nt} son las pérdidas de energía asociada a la transmisión de y hacia el nodo n durante las puntas. Y la variable de operación F_{mt} describe el flujo de energía sobre la línea de transmisión m durante las puntas.

Con esto se escribe:

$$\frac{\bar{d}_{nt}}{p} + P_{nt} \leq \sum_{j \in (J_{Te} \cup J_{He}) \cap J_n} g_{jmax} a_{jt} + \sum_{j \in J_{Hs} \cap J_n} g_{jt} + \sum_{m \in \Omega_n} F_{mt}$$

En la realidad el sistema no es siempre capaz de generar toda la energía demandada, en estos casos ocurren bajas de tensión, apagones, etc. y se dice que ocurrió una falla. En este modelo la demanda siempre es satisfecha. Para lograr esto se incluye en cada nodo una central, del tipo térmica, ficticia, que se denomina central de falla y tiene un costo variable elevado, que es igual al costo social que significa una demanda insatisfecha. Este costo social, que es un dato, es determinado mediante estudios realizados por la Comisión Nacional de Energía (CNE) y se representa mediante una función creciente de costo versus porcentaje de demanda no atendida.

b) Expresión de las pérdidas de energía sobre una línea de transmisión

Como la corriente que circula en el sistema interconectado es corriente alterna es necesario utilizar cantidades complejas para describirla.

Primero algunas definiciones. Dado un nodo i .

Notación:

$$\begin{aligned} \text{Tensión del nodo } i & : V_i = |V_i| e^{i\theta_i} \\ \text{Corriente inyectada al nodo } i & : I_i \\ \text{Potencia inyectada al nodo } i & : S_i = V_i I_i^*, \text{ con } I_i^* \text{ el conjugado de } I_i \end{aligned}$$

Si se denota P_i la potencia activa inyectada en i y Q_i la potencia reactiva inyectada en i , tenemos

$$S_i = P_i + jQ_i$$

Sea n el número total de líneas conectadas al nodo i y $Y_{ik} = G_{ik} + jB_{ik}$, el admitancia de la línea de transmisión entre los nodos i y k . Entonces, con $\theta_{ik} = \theta_i - \theta_k$ tenemos:

$$P_i = |V_i| \sum_{k=1}^n |V_k| (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik})$$

$$Q_i = |V_i| \sum_{k=1}^n |V_k| (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik})$$

Para determinar las pérdidas se usa a menudo el método de flujo de potencia. Con éste se calculan todos los valores de las variables del sistema (potencia, tensión, ángulos ...). Después, con estos valores es fácil encontrar las pérdidas al sumar las potencias inyectadas en los dos nodos que definen una línea.

Por ejemplo, consideremos la línea de transmisión ik , en una etapa. Sean:

V_i	tensión del nodo i
V_k	tensión del nodo k
θ_{ik}	desfase entre los nodos i y k
Y_{ik}	admitancia de la línea ik
G_{ik}	conductancia de la línea ik
B_{ik}	susceptancia de la línea ik
r_{ik}	resistencia de la línea ik
s_{ik}	reactancia de la línea ik

Con las fórmulas precedentes y algunas nociones de electricidad, la potencia transferida del nodo i al nodo k está dada por:

$$P_{ik} = V_i^2 G_{ik} - V_i V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik})$$

Si se denota por P la potencia que llega al nodo k y PL las pérdidas sobre la línea, tenemos $P_{ik} = P + PL$, y como P es igual a $-P_{ki}$ (ley de conservación de la potencia), llegamos a:

$$PL = P_{ik} + P_{ki}$$

Además $G_{ik} = G_{ki}$ y $B_{ik} = B_{ki}$, entonces :

$$P_{ki} = V_k^2 G_{ik} - V_i V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} - B_{ik} \sin \theta_{ik})$$

sumando las últimas dos expresiones

$$PL = G_{ik}(V_i^2 + V_k^2 - 2V_iV_k\cos\theta_{ik})$$

Como $G_{ik} = \frac{r_{ik}}{r_{ik}^2 + s_{ik}^2}$ y para líneas de alta tensión $r_{ik} \ll s_{ik}$, tenemos $G_{ik} \approx \frac{r_{ik}}{s_{ik}^2}$.

Además, es bastante realista suponer que el sistema de transmisión está funcionando a corriente continua. Esta aproximación entrega respuestas bastante correctas, debido a los órdenes de magnitud involucrados. Esto permite realizar algunas simplificaciones a las expresiones anteriores:

Se supone $V_i = 1, V_k = 1$ y $\cos\theta_{ik} \approx 1 - \frac{\theta_{ik}^2}{2}$ entonces tenemos:

$$PL = \frac{r_{ik}}{s_{ik}^2}\theta_{ik}^2$$

Si se cumple $f_{mt} = \frac{1}{s_m}(\theta_{it} - \theta_{kt})$ en una línea de transmisión m , desde la barra i hasta la barra k , entonces las pérdidas se aproximan por $\approx r_m f_{mt}^2$. Para esta expresión se han cambiado índices: $s_m = s_{ik}$ es la reactancia y $r_m = r_{ik}$ es la resistencia. Esta pérdida en la línea se representa con pérdidas en los nodos asociados a esta línea e iguales a la mitad de este valor, con lo que se tiene que

$$p_{nt} = \frac{1}{2} \sum_{m \in \Omega_n} r_m f_{mt}^2$$

es la suma de la mitad de las pérdidas de todas las líneas conectadas con la barra n .

Análogamente existe una expresión para la pérdida de energía en las líneas de transmisión para el momento de demanda máxima.

$$P_{nt} = \frac{1}{2} \sum_{m \in \Omega_n} r_m F_{mt}^2$$

cuando se cumple la relación $F_{mt} = \frac{1}{s_m}(\Theta_{it} - \Theta_{kt})$ y Θ_{it} y Θ_{kt} son los ángulos de desfase de la tensión en el instante de demanda máxima.

Con esto las ecuaciones quedan, para la satisfacción de la demanda promedio:

$$\bar{d}_{nt} + \frac{1}{2} \sum_{m \in \Omega_n} r_m f_{mt}^2 \leq \sum_{j \in J_n} g_{jt} + \sum_{m \in \Omega_n} f_{mt}$$

y para la satisfacción de la demanda máxima:

$$\frac{\bar{d}_{nt}}{p} + \frac{1}{2} \sum_{m \in \Omega_n} r_m F_{mt}^2 \leq \sum_{j \in (J_{T_e} \cup J_{H_e}) \cap J_n} g_{jmax} a_{jt} + \sum_{j \in J_{H_s} \cap J_n} g_{jt} + \sum_{m \in \Omega_n} F_{mt}$$

Lo que escribiremos en notación matricial como:

$$\begin{aligned} \bar{d}_t + \frac{1}{2}Rf_t^2 &\leq Ug_t + Sf_t \\ \bar{d}_t/p + \frac{1}{2}R'F_t^2 &\leq G_{\max}a_t + U'g_t + S'F_t \end{aligned} \quad (4.7)$$

Donde las matrices S , S' , U , U' , G_{\max} , R y R' son las necesarias para representar las ecuaciones anteriores, $f_t^2 = (f_{mt}^2)_m$ y $F_t^2 = (F_{mt}^2)_m$.

4.7.4 Restricciones de Flujo de Agua

Los volúmenes almacenados por los embalses, usados para generación, vertidos, etc., deben estar entre las capacidades técnicas de los embalses. Si un embalse es un proyecto, este es el momento de restringir su operación hasta que sea construido.

$$\begin{aligned} V_{lmin}\alpha_{lt}(x) &\leq V_{lt} \leq V_{lmax}\alpha_{lt}(x) \\ V_{glmin}\alpha_{lt}(x) &\leq V_{gl} \leq V_{glmax}\alpha_{lt}(x) \\ V_{rlmin}\alpha_{lt}(x) &\leq V_{rl} \leq V_{rlmax}\alpha_{lt}(x) \\ 0 &\leq V_{vlt} \\ V_{flt} &= h_l(V_{lt-1}) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \forall l \in J_{He} \\ \forall t \in \{1, \dots, T\} \end{array}$$

Con la función α_{lt} definida de la siguiente manera:

$$\alpha_{lt}(x) = \begin{cases} 1 & l \in J_{He}^e \\ X_{lt} & l \in J_{He}^p \end{cases}$$

además $h_l(\cdot)$ representa la función que entrega la cantidad de agua filtrada dado el volumen de agua en el embalse, este valor puede incluir también el agua que se evapora. Como esta cantidad es pequeña con respecto al volumen del embalse se puede aproximar esta por una función lineal. El volumen filtrado en la etapa t depende del estado del embalse en la etapa t , como la variable de estado es el volumen final del embalse, la variable V_{lt-1} representa el volumen inicial en la etapa t . Es decir

$$V_{flt} = h_l(V_{lt-1}) = h_l V_{lt-1}, \Rightarrow V_{ft} = HV_{t-1}.$$

Y además se tiene que $V_v \in \mathbb{R}_+$ lo que dice que la restricción del volumen vertido es redundante.

Las otras restricciones se escriben en forma matricial como:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_2 V_t &\leq B_2 X_t + C_2 \\ \mathbb{I}_2 V_{gt} &\leq B_3 X_t + C_3 \\ \mathbb{I}_2 V_{rt} &\leq B_4 X_t + C_4 \end{aligned} \quad \forall t \quad (4.8)$$

Con las matrices I_2 , B_i y C_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ adecuadas.

El volumen final de un embalse en la etapa t debe ser igual al volumen inicial en la etapa t , que es el volumen final de la etapa $t - 1$, más lo que ingresó y menos lo que se extrajo durante la etapa t .

$$V_{lt} = V_{lt-1}(1 - h_l) + \text{agua}_{lt} - V_{gl} - V_{vl} - V_{rl} \quad \forall l \in J_{He}, \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

donde V_{l0} representa el dato de volumen inicial del embalse l , y donde agua_{lt} , al igual que en las restricciones de generación, representa la cantidad de agua que llega al embalse l , y depende de la operación de embalses y centrales aguas arriba y de los aportes de las hidrologías de las cuencas relevantes para este embalse. Es decir $\text{agua}_{lt} = D_2^* \widehat{V}_t + E_2 \bar{\omega}_t$.

Con esto la ecuación matricial correspondiente a esta restricción es:

$$D_2 \widehat{V}_{t-1} + D_3 \widehat{V}_t + E_2 \bar{\omega}_t = 0 \quad \forall t \quad (4.9)$$

4.7.5 Restricciones de Riego

La cantidad extraída para riego de cada embalse debe estar entre los límites técnicos de capacidad del embalse. Restricción que ya ha sido detallada en las restricciones de flujo de agua.

Las restricciones de riego, establecidas mediante convenios sobre los derechos de agua, consisten en garantizar suministros de agua en algunos puntos de la red hidrográfica. Para lograr esto se define el nivel del agua en estos puntos (la suma de los aportes de agua a estos puntos) y se obliga que este valor cumpla los requisitos del convenio, es decir ciertas cotas superiores e inferiores.

Análogo a lo anterior se puede escribir esta restricción como:

$$D_4 \widehat{V}_t + E_3 \bar{\omega}_t \leq e \quad \forall t \quad (4.10)$$

4.7.6 Restricciones de Transmisión

La cantidad de flujo f_{mt} y F_{mt} deben estar dentro de la capacidad de la línea m en todas las etapas. Si la línea es parte de un proyecto, los coeficientes $\alpha_{mt}(x)$ se encargan que el flujo por la línea sea cero hasta que el proyecto sea concretado.

$$|f_{mt}| \leq \bar{f}_m \alpha_{mt}(x) \quad \text{y} \quad |F_{mt}| \leq \bar{F}_m \alpha_{mt}(x) \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall t$$

donde

$$\alpha_{mt}(x) = \begin{cases} 1 & m \in M^e \\ X_{mt} & m \in M^p \end{cases}$$

Lo que escrito en forma matricial quiere decir:

$$\mathbf{I}_3 f_t \leq B_5 X_t + C_5 \quad \text{y} \quad \mathbf{I}_3 F_t \leq B_5 X_t + C_5 \quad (4.11)$$

4.8 Formulación Completa

Ahora se está en condiciones de detallar todas las restricciones involucradas en la formulación (4.3) del problema. La restricción $ri(x) \leq 0$ es exactamente (4.4), mientras que las restricciones (4.5) hasta (4.11) representan las restricciones de operación $ro_t(x, y_{t-1}, y_t, \omega_t)$. Se llega a la siguiente formulación de (4.3):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & ci(x) + \mathbb{E}_{\omega_1}\{Q_1(x, y_0, \omega_1)\} & (4.12.1) \\ x \in \mathcal{X} & & \\ \text{s.a.} \quad & AX \leq v & (4.12.2) \\ Q_t(x, y_{t-1}, \omega_t) = & \text{Min}_{y_t \in \mathcal{Y}_t} co_t y_t + \mathbb{E}_{\omega_{t+1}}\{Q_{t+1}(x, y_t, \omega_{t+1})\} & (4.12.3) \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{I}_1 g_t \leq B_1 a_t & (4.12.4) \\ & Z a_t \leq X_t & (4.12.5) \\ & V g_t \leq D_1 \widehat{V}_t + E_1 \tilde{\omega}_t & (4.12.6) \\ & g_t \leq \eta V g_t & (4.12.7) \\ & \bar{d}_t + \frac{1}{2} R f_t^2 \leq U g_t + S f_t & (4.12.8) \\ & \bar{d}_t / p + \frac{1}{2} R' F_t^2 \leq G_{\max} a_t + U' g_t + S' F_t & (4.12.9) \\ & \mathbf{I}_2 V_t \leq B_2 X_t + C_2 & (4.12.10) \\ & \mathbf{I}_2 V g_t \leq B_3 X_t + C_3 & (4.12.11) \\ & \mathbf{I}_2 V r_t \leq B_4 X_t + C_4 & (4.12.12) \\ & D_2 \widehat{V}_{t-1} + D_3 \widehat{V}_t + E_2 \tilde{\omega}_t = 0 & (4.12.13) \\ & D_4 \widehat{V}_t + E_3 \tilde{\omega}_t \leq e & (4.12.14) \\ & \mathbf{I}_3 f_t \leq B_5 X_t + C_5 & (4.12.15) \\ & \mathbf{I}_3 F_t \leq B_5 X_t + C_5 & (4.12.16) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Se puede simplificar esta expresión al recordar que

$$\begin{aligned} y_t &= (a_t, g_t, V v_t, V g_t, V f_t, V r_t, V_t, f_t, F_t) = (a_t, g_t, \widehat{V}_t, f_t, F_t) \\ \omega_t &= (\tilde{\omega}_t, \bar{d}_t) \end{aligned}$$

Se pueden reagrupar restricciones que sean similares, por ejemplo las restricciones que ligan las etapas de inversión y operación:

$$\begin{cases} Z a_t \leq X_t \\ \mathbb{I}_2 V_t \leq B_2 X_t + C_2 \\ \mathbb{I}_2 V g_t \leq B_3 X_t + C_3 \\ \mathbb{I}_2 V r_t \leq B_4 X_t + C_4 \\ \mathbb{I}_3 f_t \leq B_5 X_t + C_5 \\ \mathbb{I}_3 F_t \leq B_5 X_t + C_5 \end{cases} \iff Y y_t - B X_t + C \leq 0$$

Restricciones que sólo relacionan variables de operación:

$$\begin{cases} \mathbb{I}_1 g_t \leq B_1 a_t \\ g_t \leq \eta V g_t \end{cases} \iff G y_t \leq 0$$

Restricciones que incluyen las variables aleatorias:

$$\begin{cases} V g_t \leq D_1 \widehat{V}_t + E_1 \tilde{\omega}_t \\ D_2 \widehat{V}_{t-1} + D_3 \widehat{V}_t + E_2 \tilde{\omega}_t = 0 \\ D_3 \widehat{V}_t + E_3 \tilde{\omega}_t \leq e \end{cases} \iff \widetilde{D} y_{t-1} + D y_t + E \tilde{\omega}_t \leq 0$$

Restricciones que tienen términos no lineales:

$$\begin{cases} \bar{d}_t + \frac{1}{2} R f_t^2 \leq U g_t + S f_t \\ \bar{d}_t / p + \frac{1}{2} R' F_t^2 \leq G \max a_t + U' g_t + S' F_t \end{cases} \iff \widehat{D} y_t + K(y_t) + \widehat{E} \bar{d} \leq 0$$

Donde $K(y_t)$ es el término no lineal.

Para realizar finalmente la última reagrupación:

$$\begin{cases} Y y_t - B X_t + C \leq 0 \\ G y_t \leq 0 \\ \widetilde{D} y_{t-1} + D y_t + E \tilde{\omega}_t \leq 0 \\ \widehat{D} y_t + K(y_t) + \widehat{E} \bar{d} \leq 0 \end{cases} \iff \widetilde{D}' y_{t-1} + D' y_t + K'(y_t) - B X_t + \widetilde{E} \omega_t \leq 0$$

Expresión en la que se han resumido los términos del lado derecho $E' \omega_t + C' = \widetilde{E} \omega_t$. Utilizando la notación simplificada se llega al problema:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_i(x) + \mathbb{E}_{\omega_1} \{Q_1(x, \omega_1)\} \\ x \in \mathcal{X} \quad & \\ \text{s.a.} \quad & A X \leq v \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $\forall t \in \{1, \dots, T\}$

$$Q_t(x, y_{t-1}, \omega_t) = \underset{y_t \in \mathcal{Y}_t}{\text{Min}} \{c\omega_t y_t + \mathbb{E}_{\omega_{t+1}}\{Q_{t+1}(x, y_t, \omega_{t+1})\}\}$$

$$\text{s.a.} \quad \tilde{D}'y_{t-1} + D'y_t + K'(y_t) - BX_t + \tilde{E}\omega_t \leq 0$$

Este problema, con las descripciones de las ecuaciones hecha anteriormente, es el problema matemático al que se llega al modelar las decisiones de inversión. Es un problema de recurso multietapas con restricciones convexas, debido a las desigualdades en las restricciones de satisfacción de demanda.

4.9 Existencia de Solución en el Problema de Decisión de Inversiones

En el problema planteado en (4.13) se muestra que la formulación general de este problema es de la forma de un problema de recurso multietapas con restricciones cuadráticas. Este problema se puede expresar en forma equivalente como:

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & cx + \mathbb{E}_{\omega_1}\{\text{Min}c\omega_1 y_1 + & \mathbb{E}_{\omega_2}\{\dots & + \mathbb{E}_{\omega_T}\{\text{Min}c\omega_T y_T\} & \dots\}\} \\ \text{s.a.} & A_1 x & & & \leq b_1 \\ & A_{11} x & + K_1(y_1) & & \leq E_1 \omega_1 \\ & A_{21} x & + B_1 y_1 & + K_2(y_2) & \leq E_2 \omega_2 \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & A_{T1} x & + B_{T-1} y_{T-1} & + K_T(y_T) & \leq E_T \omega_T \end{array} \quad (4.14)$$

En un enfoque en que se trabaja con escenarios discretos, podemos tomar como escenarios en la etapa t un número finito J_t de eventos que se realizarán de la variable aleatoria ω_t . Luego, al realizar la aproximación que se dispone de un vector aleatorio discreto, el

problema es equivalente a resolver el siguiente problema mixto de gran tamaño:

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} & cix + \sum_{s_1 \leq J_1} \{\text{Min} c_{o_1} y_1^{s_1} + \sum_{s_2 \leq J_2} \{ \dots + \sum_{s_T \leq J_T} \{\text{Min} c_{o_T} y_T^{s_1, \dots, s_T} \} \dots \} \} \\
\text{s.a.} & \\
A_1 x & \leq b_1 \\
A_{11} x + K_1(y_1^{s_1}) & \leq E_1 \omega_1^{s_1} \\
A_{21} x + B_1 y_1^{s_1} + K_2(y_2^{s_1 s_2}) & \leq E_2 \omega_2^{s_2} \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots \\
A_{T1} x + B_{T-1} y_{T-1}^{s_1, \dots, s_{T-1}} + K_T(y_T^{s_1, \dots, s_T}) & \leq E_T \omega_T^{s_T}
\end{array} \tag{4.15}$$

Estos problemas son equivalentes en el sentido que tienen el mismo conjunto de soluciones para la variable de primera etapa x y las soluciones $y_t^{s_1, \dots, s_t}$ corresponden a la solución del problema de recurso t -ésimo dado su antecesor $y_{t-1}^{s_1, \dots, s_{t-1}}$.

Se demostrará que este problema mixto equivalente tiene solución de donde se desprende que el problema de recurso en dos etapas con variables enteras tiene solución.

Para demostrar la existencia de solución del problema mixto equivalente se mostrará que existe punto factible y que la relajación lineal de este problema tiene solución. Con lo que se obtiene una cota inferior al problema entero. Como existe un punto factible, y sólo puede haber una cantidad finita de puntos factibles enteros, existe el mínimo.

El problema mixto tiene un conjunto factible no vacío. El problema tiene como punto factible trivial una solución en la que no se realiza ninguna inversión, todas las variables enteras son cero. En esta situación un punto factible para las variables continuas es que la demanda sea satisfecha por la central de falla, ninguna central genere, por ende no existe transmisión entre los nodos de la red, y que todos los afluentes son vertidos, considerando las restricciones de caudales que debe respetar (riego, caudales mínimos). Es decir un punto factible del problema mixto, siguiendo la notación mostrada en 4.5

es:

$$\begin{aligned}
x_{it} &= 0 & \forall i \in J^p \cup M^p, \forall t \\
a_{jt}^{s_1, \dots, s_t} &= 0 & \forall j \in \mathcal{J}, \forall t \\
g_{jt}^{s_1, \dots, s_t} &= 0 & \forall j \in \mathcal{J} - \{j | j = \text{central de falla}\}, \forall t \\
g_{jt}^{s_1, \dots, s_t} &= \bar{d}_t^{s_t} & j = \text{central de falla}, \forall t \\
Vv_{lt}^{s_1, \dots, s_t} &= \omega_t^{s_t} & \forall l \in J_{He}, \forall t \\
Vg_{lt}^{s_1, \dots, s_t} &= 0 & \forall l \in J_{He} \cup J_{Hs}, \forall t \\
Vf_{lt}^{s_1, \dots, s_t} &= 0 & \forall l \in J_{He}, \forall t \\
Vr_{lt}^{s_1, \dots, s_t} &= 0 & \forall l \in J_{He}, \forall t \\
V_{lt}^{s_1, \dots, s_t} &= 0 & \forall l \in J_{He}, \forall t \\
f_{mt}^{s_1, \dots, s_t} &= 0 & \forall m \in \mathcal{M}, \forall t \\
F_{mt}^{s_1, \dots, s_t} &= 0 & \forall m \in \mathcal{M}, \forall t
\end{aligned}$$

Para demostrar la existencia de solución para la relajación lineal del problema mixto equivalente basta demostrar que el problema se reduce a la optimización de una función inf-compacta.

Utilizando la definición 3.1, esto es equivalente a demostrar que la función objetivo es semi continua inferior con dominio compacto.

Se puede considerar que el conjunto factible es acotado ya que todas las variables representan aspectos físicos del sector eléctrico por lo cual se puede suponer que existen cotas para todos los valores posibles. Al revisar rápidamente las variables que definen el problema es posible identificar sus respectivas cotas:

- Las variables de inversión están acotadas por una cantidad de proyectos a estudiar.
- Las generaciones de centrales están acotadas por su capacidad.
- La generación de la central de falla está acotada por la demanda.
- Los volúmenes presentes en las ecuaciones de balance hidráulico están acotados por los afluentes o las capacidades de los embalses o aducciones.
- Los flujos por las líneas están acotados por su capacidad.

es decir:

$$\begin{aligned}
x_{it} &\leq 1 && \forall i \in J^p \cup M^p, \forall t \\
a_{jt}^{s_1, \dots, s_t} &\leq 1 && \forall j \in \mathcal{J}, \forall t \\
g_{jt}^{s_1, \dots, s_t} &\leq G_{\max jt} && \forall j \in \mathcal{J} - \{j | j = \text{central de falla}\}, \forall t \\
g_{jt}^{s_1, \dots, s_t} &\leq \text{Max } \bar{d}_t^{s_t} && j = \text{central de falla}, \forall t \\
Vv_{lt}^{s_1, \dots, s_t} &\leq \text{Max}_{s_t, t} \omega_t^{s_t} && \forall l \in J_{He}, \forall t \\
Vg_{l't}^{s_1, \dots, s_t} &\leq Vg_{\max l'} && \forall l' \in J_{He} \cup J_{Hs}, \forall t \\
Vf_{lt}^{s_1, \dots, s_t} &\leq Vf_{\max l} && \forall l \in J_{He}, \forall t \\
Vr_{lt}^{s_1, \dots, s_t} &\leq Vr_{\max l} && \forall l \in J_{He}, \forall t \\
V_{lt}^{s_1, \dots, s_t} &\leq V_{\max l} && \forall l \in J_{He}, \forall t \\
f_{mt}^{s_1, \dots, s_t} &\leq F_{\max m} && \forall m \in \mathcal{M}, \forall t \\
F_{mt}^{s_1, \dots, s_t} &\leq F_{\max m} && \forall m \in \mathcal{M}, \forall t
\end{aligned}$$

Luego, como la función objetivo es lineal, se concluye que el problema lineal tiene solución, consecuentemente el problema mixto equivalente también. Gracias a la equivalencia con el problema de recurso mixto multietapas que modela el problema de decisiones de inversión en el sector eléctrico, se deduce que este último tiene solución.

Capítulo 5

Algoritmos e Implementación

El problema de decisiones de inversión en el sector eléctrico se ha modelado utilizando un problema de recurso multietapas con restricciones cuadráticas y variables enteras.

La implementación de este modelo presenta diversos obstáculos difíciles de superar, como son la presencia de variables enteras, restricciones no lineales, la necesidad de un algoritmo multietapas y el gran tamaño que se requiere para representar un sistema eléctrico como el chileno. Por este motivo se ha optado por representar y obtener resultados numéricos para simplificaciones de este modelo.

En este capítulo se presentan las simplificaciones necesarias al modelo para transformarlo en un problema abordable computacionalmente, se definen además sensibilidades a este modelo para medir el costo de algunas simplificaciones. Se presentan en seguida los tres programas utilizados para resolver el problema de decisiones de inversión. Finalmente se definen los ejemplos que fueron resueltos en este trabajo.

5.1 Simplificaciones al Modelo

Se ha simplificado el modelo descrito en el capítulo anterior para poder definir un problema abordable con las herramientas computacionales disponibles.

El modelo que efectivamente se ha implementado consiste en:

1. Modelar un sistema uninodal. Con esta simplificación, desaparecen el sistema de

transmisión y las pérdidas, con lo que también desaparecen las únicas restricciones no lineales.

Las restricciones de satisfacción de la demanda (4.12.8) y (4.12.9), en la formulación completa del problema, ahora son de la forma:

$$\begin{aligned}\bar{d}_t &\leq U g_t \\ \bar{d}_t/p &\leq G_{\max} a_t + U' g_t\end{aligned}$$

2. Satisfacer solamente la demanda de energía en cada etapa, ignorando la demanda por potencia máxima. Luego, de las ecuaciones anteriores sólo sobrevive $\bar{d}_t \leq U g_t$.
3. Considerar sólo el embalse del Lago Laja. La generación del resto de las centrales hidráulicas se obtiene de matrices de energía generable. Esta simplificación es razonable para el sistema chileno. En el problema de inversiones se requieren horizontes de estudio grandes, unos diez años y el Lago Laja es el único embalse con regulación interanual en Chile, esto es, que puede guardar agua de un año a otro.
4. Ignorar las restricciones de riego en el embalse. Esto significa que desaparece la restricción (4.12.14).
5. No considerar mínimos técnicos para las centrales térmicas. Esta simplificación elimina las variables enteras del problema de operación del sector eléctrico. Este es un fenómeno de suma importancia en la operación de corto plazo de un sistema eléctrico, pero debido a la magnitud de las etapas con que se evalúan las inversiones (meses, trimestres) este efecto no es notorio. En la modelación esto significa que se pueden substituir las restricciones (4.12.4) y (4.12.5) por la siguiente:

$$I_1 g_t \leq B_1' X_t$$

6. Se ha simplificado la operación del sistema eléctrico con el fin de evitar un problema multietapas. El resolver el problema de operación en una etapa para todo el horizonte de planificación causa un aprovechamiento del recurso hídrico que no es realista dada la incertidumbre que este tiene. Una separación anual de la operación entrega una mejor representación de la aleatoriedad hídrica. Esta separación se logra cortando la ecuación de balance de agua (4.12.13) en cada año. De esta forma se puede resolver toda la operación sólo con resolver un problema lineal, sin tener que abordar un problema de recurso multietapa lineal.

Para que la operación del embalse en este contexto sea razonable se deben agregar valores iniciales de volumen del lago para todos los años y funciones de costo

futuro del agua para el Lago Laja. Los datos de funciones de valor futuro de agua se obtienen del modelo GOL.

El volumen inicial para un año es el resultante de la optimización de la operación el año anterior. Luego podemos decir que la nueva restricción (4.12.13) es de la forma:

$$D_2 \widehat{V}_{t-1}^* + D_3 \widehat{V}_t + E_2 \tilde{\omega}_t = 0$$

Además se deben agregar las funciones de costo futuro del agua en la función objetivo $CF_t(V_t)$. Funciones que son convexas y se aproximan por una función lineal por partes convexa. Con esto se pueden representar de forma lineal.

Una vez incorporadas estas modificaciones se obtiene el siguiente problema reducido:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & ci(x) + \mathbb{E}_\omega\{Q(x, \omega)\} \\ x \in \mathcal{X} \\ \text{s.a.} \quad & AX \leq v \end{aligned}$$

donde $\forall t \in \{1, \dots, T\}$:

$$\begin{aligned} Q(x, \omega) = \sum_{0 \leq t \leq T} \text{Min}_{y_t \in \mathcal{Y}_t} \quad & \{co_t(y_t) + CF_t(V_t)\} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbb{I}_1 g_t \leq B'_1 X_t \\ & V g_t \leq D_1 \widehat{V}_t + E_1 \tilde{\omega}_t \\ & g_t \leq \eta V g_t \\ & \bar{d}_t \leq U g_t \\ & \mathbb{I}_2 V_t \leq B_2 X_t + C_2 \\ & \mathbb{I}_2 V g_t \leq B_3 X_t + C_3 \\ & \mathbb{I}_2 V r_t \leq B_4 X_t + C_4 \\ & D_2 \widehat{V}_{t-1}^* + D_3 \widehat{V}_t + E_2 \tilde{\omega}_t = 0 \end{aligned}$$

Si se agrupan estas restricciones de la misma forma en que se agrupó el problema completo, considerando que

$$\begin{aligned} y_t = (a_t, g_t, V v_t, V g_t, V f_t, V r_t, V_t, f_t, F_t) &= (a_t, g_t, \widehat{V}_t, f_t, F_t) \\ \omega_t = (\tilde{\omega}_t, \bar{d}_t) \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & ci(x) + \mathbb{E}_\omega\{Q(x, \omega)\} & (5.1.1) \\ x \in \mathcal{X} & & (5.1) \\ \text{s.a.} \quad & AX \leq v & (5.1.2) \end{aligned}$$

donde $\forall t \in \{1, \dots, T\}$:

$$Q(x, \omega) = \sum_{0 \leq t \leq T} \text{Min}_{y_t \in \mathcal{Y}_t} co_t(y_t) \quad (5.1.3)$$

$$\text{s.a.} \quad \widetilde{D}'y_{t-1}^* + D'y_t - BX_t + \widetilde{E}\omega_t \leq 0 \quad (5.1.4)$$

donde y_{t-1}^* representa un dato para el problema lineal, la información útil es el valor del volumen final del embalse en la etapa $t - 1$. Este dato debe ser igual al valor óptimo que obtiene una operación de la etapa $t - 1$. Para garantizar que el volumen inicial en la etapa t sea igual al volumen final de la etapa $t - 1$ se debe resolver cada problema de operación varias veces, cada vez asignando el valor final de la etapa $t - 1$ como el valor y_{t-1}^* , hasta llegar a fijar y_T^* .

Este problema es un problema de recurso simple lineal. Como los y_{t-1}^* son datos fijos para los problemas lineales las restricciones del problema de segunda etapa son:

$$\begin{aligned} \widetilde{D}'y_{t-1}^* + D'y_t - BX_t + \widetilde{E}\omega_t &\leq 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, T\} \\ \Leftrightarrow \widetilde{D}'y^* + D'y - BX + \widetilde{E}\omega &\leq 0 \\ \Leftrightarrow D'y &\leq BX - \widetilde{E}\omega - \widetilde{D}'y^* \\ \Leftrightarrow D'y &\leq BX + E''\omega \end{aligned}$$

Los problemas de recurso en dos etapas lineal han sido ampliamente abordados en la literatura y se demuestra en [6] que tienen solución.

La descripción detallada del modelo implementado se encuentra en el anexo Modelo Implementado.

Para un ejemplo representativo del sistema chileno el problema modelado consta, para un escenario, de unas 280 variables enteras, 1300 variables continuas y unas 1400 restricciones. Si se considera que 1000 de las variables continuas y 1000 restricciones corresponden a variables y restricciones de la segunda etapa, al considerar 40 escenarios esto significa 40000 variables y 40000 restricciones de segunda etapa. Así, el problema mixto equivalente a este problema de recurso tiene 280 variables enteras, 40300 variables continuas y 40400 restricciones.

5.2 Sensibilidades en la Modelación

Buscando mejorar la modelación del problema de operación presente en el modelo implementado, se han resuelto ejemplos simplificados del problema eléctrico utilizando un problema de recurso multietapas lineal y representando un sistema multiembalse.

Debido al problema de gran tamaño necesario para modelar el problema de inversiones en el sector eléctrico, y a la complejidad del algoritmo de optimización estocástica con que se resuelve cualquier mejora en la modelación, repercute en un aumento del problema a proporciones que dificulta su solución computacional.

Se desea determinar la dificultad computacional involucrada en mejorar el modelo que se ha logrado implementar, descrito en la sección 5.1. En este sentido se ha estudiado el aumento en la carga computacional que significa representar de mejor forma la aleatoriedad hidráulica y que provoca la utilización de un modelo multietapas. También se ha investigado el aumento en trabajo computacional requerido en representar un sistema con más de un embalse.

El aumento en la carga computacional será representada por el aumento en iteraciones y tiempo de ejecución que tiene un algoritmo entre resolver el modelo simplificado y el modelo mejorado.

5.2.1 Modelo Multietapas

El modelo multietapas no considera la simplificación que consiste en realizar la operación del sistema en un sólo paso y conserva la ecuación de equilibrio de embalse durante todo el horizonte. Para representar la incertidumbre hidrológica se utiliza un modelo de recurso multietapas en el que, en cada etapa, se mantienen inciertos los caudales futuros.

Luego, al realizar las demás simplificaciones al modelo presentado en (4.12) se obtiene la siguiente formulación para el problema de inversiones en el sector eléctrico:

$$\begin{aligned}
& \text{Min} && ci(x) + \mathbb{E}_{\omega_1} \{Q_1(x, y_0, \omega_1)\} \\
& x \in \mathcal{X} \\
& \text{s.a.} && AX \leq v \\
Q_t(x, y_{t-1}, \omega_t) & = && \text{Min}_{y_t \in \mathcal{Y}_t} co_t y_t + \mathbb{E}_{\omega_{t+1}} \{Q_{t+1}(x, y_t, \omega_{t+1})\} \\
& \text{s.a.} && \mathbb{I}_1 g_t \leq B'_1 X_t \\
& && V g_t \leq D_1 \hat{V}_t + E_1 \tilde{\omega}_t \\
& && g_t \leq \eta V g_t \\
& && \bar{d}_t \leq U g_t \\
& && \mathbb{I}_2 V_t \leq B_2 X_t + C_2 \\
& && \mathbb{I}_2 V g_t \leq B_3 X_t + C_3 \\
& && \mathbb{I}_2 V r_t \leq B_4 X_t + C_4 \\
& && D_2 \hat{V}_{t-1} + D_3 \hat{V}_t + E_2 \tilde{\omega}_t = 0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Al realizar la misma agrupación de restricciones que ha sido hecha en 4.8 y 5.1 se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \text{Min} && ci(x) + \mathbb{E}_{\omega_1}\{Q_1(x, \omega_1)\} \\
& x \in \mathcal{X} \\
& \text{s.a.} && AX \leq v \\
& \text{donde} && \forall t \in \{1, \dots, T\} \\
& Q_t(x, y_{t-1}, \omega_t) = && \text{Min}_{y_t \in \mathcal{Y}_t} \{co_t y_t + \mathbb{E}_{\omega_{t+1}}\{Q_{t+1}(x, y_t, \omega_{t+1})\}\} \\
& \text{s.a.} && \tilde{D}'y_{t-1} + D'y_t - BX_t + \tilde{E}\omega_t \leq 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Este problema de recurso lineal multietapas es comparado con el modelo en (5.1) para determinar el aumento en carga computacional que representa.

5.2.2 Modelo Multiembalse

Otro efecto que se ha deseado probar es la dificultad de representar un sistema eléctrico multiembalse. Si se modela la operación del sistema eléctrico chileno con etapas trimestrales no es importante representar un sistema multiembalse, ya que el lago Laja es el único embalse que tiene regulación suficiente para guardar agua de un año para otro.

Pero en general, sí existen sistemas eléctricos en los cuales resulta necesario reflejar que se puede almacenar agua por largos períodos en diversos embalses. Ejemplos de sistemas en los que existe más de un embalse que puede guardar agua por más de un año son Brasil, Argentina y la costa oeste de Estados Unidos.

El tamaño de las etapas con que se representa la operación de un sistema eléctrico es fundamental para definir la necesidad de representar los embalses. Por ejemplo, el sistema chileno requiere además la representación de embalses como el de Colbún, la Laguna del Maule y la Laguna Invernada si es que se modela con etapas semanales o mensuales, ya que estos embalses son capaces de guardar agua por más de un mes. Luego, se requiere de modelos multiembalse para estudios de corto y mediano plazo del sistema chileno.

Cada embalse hidráulico en un sistema eléctrico es capaz de transportar energía, almacenada en forma de agua, de un período al siguiente. Los embalses son la única forma que se ha modelado en que se pueden relacionar distintos períodos. Mientras más embalses existan más capacidad de transportar energía existirá y el problema resulta ser más acoplado temporalmente. Luego la modelación de más alternativas de embalse representa un aumento en la complejidad del problema que es mayor que el simple hecho

de necesitar más variables.

El modelo que representa un sistema multiembalse es igual al descrito en (5.1), donde las ecuaciones de equilibrio de agua en embalses son escritas para más de un embalse.

5.3 Programa MSLiP

Se obtuvieron resultados numéricos para el modelo simplificado utilizando el programa de optimización estocástica MSLiP.

El programa MSLiP (Multistage Stochastic Linear Programming) fue desarrollado por H. Gassmann, es presentado en [9] y consta de un manual de instrucciones para su uso, ver [10]. El programa es capaz de resolver problemas de recurso multietapas lineales que se presenten en formato estándar. Este formato es descrito en [2].

Se dispone del código fuente de este programa, que es sumamente portable, por lo que fácilmente se puede instalar en máquinas con distinta arquitectura. Actualmente se ha ejecutado este programa en las siguientes máquinas del Departamento de Ingeniería Matemática: SUN (Copahue), Digital (Llaima) y Silicon Graphics (Hornopirén).

Debido a que este programa no es capaz de resolver problemas con variables enteras, se han obtenido respuestas con MSLiP para la relajación lineal del modelo simplificado descrito en (5.1).

Con este programa se ha podido estudiar la dificultad del problema de inversión, estudiar aumento en dificultad con distintas modelaciones y comprobar el funcionamiento del programa creado, que utiliza el algoritmo de descomposición de Benders.

5.4 Descomposición de Benders con Variable Entera

Debido a que el programa MSLiP no puede resolver problemas con variables enteras se creó un programa que implementa el algoritmo de descomposición de Benders, permitiendo problemas con variables enteras en la primera etapa.

El algoritmo de descomposición de Benders con variable entera en la primera etapa converge puesto que es un algoritmo finito cuando se tiene un problema de recurso con

aleatoriedad discreta. Esto debido a que el algoritmo de descomposición de Benders es finito en el caso que se tenga aleatoriedad discreta, y el algoritmo de branch and bound es finito.

Este programa fue desarrollado en FORTRAN y utiliza rutinas de OSL para resolver los problemas lineales necesarios. Es debido a esto que sólo se puede ejecutar en computadores que tengan instalado OSL. El programa ha sido instalado en las siguientes máquinas del Departamento de Ingeniería Matemática: Matra Capitán (Garfio) y SUN (Copahue).

El programa es capaz de resolver problemas de recurso de dos etapas, con variables enteras en la primera y aleatoriedades tanto en la matriz como en el lado derecho. Es decir problemas de la forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} && cx + \sum_{j=1}^J Q(x, \omega_j) \\
 & x \in \mathcal{X} \\
 & \text{s.a.} && Ax \leq b \\
 & && Q(x, \omega_j) = \text{Min}_{y \in \mathcal{Y}} qy \\
 & && \text{s.a. } W(\omega_j)y \leq H\omega_j - Tx
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde \mathcal{X} es un conjunto que puede contener variables enteras.

Estos problemas se separan en el problema de primera etapa y el de segunda etapa. El problema de primera etapa, denominado el problema maestro tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} && cx \\
 & x \in \mathcal{X} \\
 & \text{s.a.} && Ax \leq b
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

mientras que el problema de segunda etapa tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 Q(x, \omega_j) = & \text{Min}_{y \in \mathcal{Y}} qy \\
 \text{s.a.} & W(\omega_j)y \leq H\omega_j - Tx
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

En el algoritmo de Benders también se puede trabajar con un problema maestro que incluya un escenario, es decir:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} && cx + qy_1 \\
 & x, y_1 \in && \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \\
 & \text{s.a.} && Ax \leq b \\
 & && Tx + W(\omega_1)y_1 \leq H\omega_1
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Existen tres alternativas para ejecutar este programa:

1. Para resolver un problema de recurso de dos etapas con variables enteras en la primera etapa. En este caso el problema maestro es de la forma (5.7).
2. Resolviendo un problema de recurso lineal de dos etapas. Maestro (5.7).
3. Resolviendo un problema de recurso lineal de dos etapas. Con problema maestro (5.5)

Se ha comprobado que incluir un escenario del problema de segunda etapa en el problema maestro reduce la cantidad de iteraciones necesarias ya que al incluir un escenario en el maestro la solución del maestro considera aspectos de factibilidad del problema de segunda etapa.

Se mantiene la posibilidad de ejecutar el programa con un maestro sin escenario para poder comparar con otras implementaciones del algoritmo de descomposición de Benders.

Los pasos que realiza el programa consisten principalmente en:

- Leer los datos generales del archivo **fort.0**.
- Leer el problema estocástico en formato estándar de archivos indicados en **fort.0**. El programa es capaz sólo de leer la descripción de escenarios utilizando el formato de bloques, ver [2].
- Escribe un archivo por escenario conteniendo el problema lineal que se debe resolver en ese escenario.
- Implementa el algoritmo de descomposición de Benders accedando uno a uno los problemas de segunda etapa almacenados en los archivos. Utiliza el algoritmo de descomposición de Benders descrito en la sección 3.6.1 modificado. Se modifica en que la solución del problema (3.11), que en este problema es mixto, se hace con Branch and Bound.
- Una vez terminado el algoritmo se escriben las respuestas obtenidas.

Con este programa se ha resuelto el modelo simplificado de inversiones en el sector eléctrico, se ha comparado sus soluciones a problemas de recurso lineales a lo obtenido con MSLiP.

5.5 Paralelización del Algoritmo

Debido al gran tamaño del problema del sector eléctrico y la dificultad del algoritmo requerido para solucionar problemas de recurso, surge la necesidad de optimizar el programa elaborado para resolver el modelo.

Para optimizar el programa creado se pueden hacer dos cosas:

- El programa creado no fue programado tomando en cuenta consideraciones de eficiencia, luego existen muchas mejoras que se pueden hacer para tornarlo un programa más eficiente.
- Se puede estudiar la posibilidad de paralelizar el programa creado. Debido a características del algoritmo de descomposición de Benders, que consta de resolver muchos problemas lineales similares, la posibilidad de paralelizar el algoritmo es prometedora.

Se ha estudiado el efecto de paralelizar el algoritmo de descomposición de Benders con variable entera creado para resolver el problema.

Gracias a que se puede ejecutar el OSL en el computador paralelo Matra Capitan se ha podido trabajar en desarrollar los programas paralelos necesarios para obtener una solución paralela.

Los puntos claves en una paralelización del programa creado consisten en: la creación de los subproblemas, el resolver los subproblemas en el algoritmo de descomposición de Benders y resolver el problema mixto de primera etapa.

Se ha trabajado en paralelizar la creación de los subproblemas y la resolución de los subproblemas en el algoritmo de descomposición de Benders.

Para la creación de los subproblemas, primero se lee todo el archivo de escenarios estocásticos creando un archivo por procesador con un pedazo del archivo original. Luego cada procesador está encargado de crear los subproblemas asociados a los escenarios del archivo que le corresponde leer.

El algoritmo de descomposición de Benders paralelo es muy similar al descrito en 3.6.1.

Para resolver el problema (5.4) si se considera el problema general de la forma

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx + qy_1 + \gamma & (5.8.1) \\ x, y_1, \gamma \in & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b & (5.8.2) \\ & Tx + W(\omega_1)y_1 \leq H\omega_1 & (5.8) \\ & \gamma \geq \sum_{j=1}^J p_j \{ \pi_j^i (H\omega_j - Tx) \} \quad i = 1, \dots, I & (5.8.3) \\ & \sigma_{k(s)}^s (H\omega_j - Tx) \leq 0 \quad s = 1, \dots, S & (5.8.4) \end{aligned}$$

y los subproblemas como en (5.6) los cambios en el algoritmo debido a la paralelización son los siguientes:

Paso 0: Resolver el problema (5.8) sin γ y con $I = S = 0$.

Si es infactible, FIN.

Si no, $k = 1$, $\gamma_k^* = -\infty$. Se denota la solución óptima por x_k^*, y_{1k}^*

Paso 1: Dada la solución óptima del maestro x_k^* , cada procesador modifica y resuelve los subproblemas (5.6) que le corresponden, cada procesador resuelve (Numero de subproblemas / Numero de procesadores) subproblemas.

De esta solución cada procesador devuelve al maestro, por cada subproblema (5.6) que resuelve:

Si es factible, el valor óptimo, $Q(x_k^*, \omega_j)$ y los valores duales óptimos π_j^*

Si es infactible, la dirección σ_j tal que $\sigma_j(H\omega_j - Tx_k^*) > 0$ para construir el corte de factibilidad.

Paso 2: Esperar para recibir la información de todos los procesadores.

Si existe j subproblema infactible entonces $S = S + 1$, se denota $\sigma_{k(s)}^s \equiv \sigma_j$, y se agrega un corte de factibilidad (5.8.5) al maestro. Ir a Paso 3.

Si todos los problemas son factibles, entonces Si $\gamma_k^* \geq \sum_{j=1}^J p_j Q(x_k^*, \omega_j)$, FIN, se encontró el óptimo.

Si no $I=I+1$, agregar un corte de optimalidad (5.8.4) al maestro. Ir a Paso 3.

Paso 3: $k = k + 1$, resolver el nuevo problema (5.8).

Si es infactible, FIN, maestro infactible, el problema no tiene solución.

Si es factible, sea la solución $x_k^*, y_{1k}^*, \gamma_k^*$ e ir a Paso 1.

5.6 Interpretación Eléctrica de Algoritmo de Descomposición de Benders

En esta sección se explica que significa para un problema de inversiones en el sector eléctrico utilizar el algoritmo de descomposición de Benders presentado en 3.6.1 para resolver el modelo simplificado presentado en 5.1.

Si se considera un ejemplo de un problema de inversiones, en el que se pueden realizar hasta 5 tipos de inversiones sobre un período de 5 años en etapas trimestrales (20 etapas), se están considerando hasta $20^5 = 3,200,000$ planes de obras posibles. Es claro que muchos de estos planes de obras pueden ser descartados inmediatamente, aún así el número de planes de obras que se deben investigar es elevado.

Al utilizar el algoritmo de descomposición de Benders sobre el modelo simplificado se obtiene el plan de obras que minimiza los costos de inversión más el promedio de los costos de operación. Para realizar esto el algoritmo gradualmente restringe las soluciones posibles del problema de inversión al obtener información de los costos de operación para las decisiones de inversión tomadas.

En el ejemplo descrito anteriormente, la primera solución del problema maestro, sin información de la operación, nos entregará que la solución óptima consiste en no realizar ninguna inversión.

Esta solución del problema de primera etapa causará que los problemas de operación tengan costos muy elevados. Lo que se traducirá en grandes valores para las variables duales de las restricciones de capacidad de generación. Es decir el problema tendrá un gran valor marginal para la potencia instalada, y con eso un gran incentivo a instalar potencia. Esta información es entregada, en la forma de un corte de Benders, al problema maestro restringiendo la región factible de este problema. Por ejemplo, excluyendo de la región factible a todos los planes de obra que realicen menos de 3 proyectos.

El problema maestro incluyendo los cortes de Benders se resuelve entregando otro punto óptimo, que esta vez considerará los costos de operación. Este nuevo punto óptimo es utilizado para resolver los problemas de operación, obteniendo el costo de operación promedio que causa la inversión. Si el costo de operación promedio es menor o igual al costo de operación que se estimó al resolver el problema de inversiones, entonces el algoritmo termina. En caso contrario se debe agregar este costo de operación adicional al problema de inversiones utilizando los cortes de Benders. De esta forma se corrige la estimación que hace el problema de inversiones de los costos de operación. Luego se vuelve a resolver el maestro para continuar las iteraciones.

En general, la solución del problema maestro es una cota inferior del valor óptimo de costos de inversión más promedio de costos de operación. Esto debido a que no se tiene descrita completamente la función que representa los costos de operación para el problema de inversión. La curva se construye gradualmente agregando en cada iteración un corte de Benders.

Por otro lado la suma de los costos de inversión más los costos de operación obtenidos para la inversión dada representan una cota superior del problema, pues esto equivale a evaluar la función objetivo en un punto.

El criterio de detención consiste en ver que las cotas superior e inferior sean iguales.

En el modelo que será resuelto, descrito en 5.1, no existen problemas de factibilidad. Para que un ejemplo del sector eléctrico pueda causar problemas de factibilidad, debe incluir restricciones del tipo:

Caudales de vertimiento o generación mínimo y un caudal afluente cero.

Exigir un volumen de embalse final y no disponer de suficiente agua en el embalse y afluentes para lograrlo.

Para estas restricciones, si existe un proyecto que puede solucionar el problema, un corte de factibilidad obtenido del problema infactible causará que en una posterior solución del maestro se exija la presencia de dicho proyecto. Si no existe tal proyecto, entonces el corte de factibilidad dejará el problema de inversiones infactible.

Esquemáticamente el algoritmo sigue los siguientes pasos:

- Paso 1: Resolver el problema de inversiones sin ninguna información del problema de operación. El plan de obras óptimo obtenido es entregado a los subproblemas de operación. Ir a Paso 2.
- Paso 2: Resolver todos los subproblemas para el plan de obras óptimo. Si alguno es infactible se obtiene el corte de factibilidad y se agrega al maestro. Ir a Paso 4. Si todos son factibles se obtiene una cota superior del costo de operación. Ir a Paso 3.
- Paso 3: Se compara la cota superior obtenida en el paso 2 con la cota inferior obtenida al resolver el problema de inversiones. Si son iguales se llegó al óptimo, si no se agrega al maestro el corte de optimalidad que representa los mayores costos de operación. Ir a Paso 4.

Paso 4: Se resuelve el problema de inversiones nuevamente, obteniendo la nueva cota inferior del problema. Ir a Paso 2.

5.7 Definición de Ejemplos

En relación a los datos utilizados, se ha trabajado básicamente con dos tipos de problemas:

- Problemas de la librería estándar de optimización estocástica POSTS, esta librería es presentada en [12], y se ha utilizado para verificar que el programa creado entregue respuestas correctas y comparar el algoritmo MSLiP con la implementación del algoritmo de descomposición de benders creado.
- Problemas que modelan el sector eléctrico chileno. Estos problemas provienen de los datos utilizados por la CNE para realizar la determinación del precio de nudo en Octubre de 1996. Estos problemas abordan el modelo de decisión de inversiones definido en el capítulo 4.

Se utilizaron de la librería POSTS los siguientes problemas de dos etapas:

Nombre	# escen.	Características del Problema
storm 8	8	Gran número de bases óptimas en los subproblemas.
fxm 6	6	Problema muy acoplado entre etapas 1 y 2. Problema de factibilidad en etapa 1.
fxm 16	16	
pltexp 6	6	Tiene número reducido de bases óptimas para los subproblemas.
pltexp 16	16	

Se crearon los siguientes casos para representar el problema de inversiones en el sector eléctrico. Los datos de estos ejemplos corresponden al modelo simplificado descrito en 5.1.

Nombre	# escen.	Características del Problema
cnefix	40	Caso inversiones fijas, igual a lo sugerido por CNE. 40 escenarios hidrológicos.
cne40	40	Se estudia inclusión de Peuchén, Mampil, Rucúe, Ralco y hasta 6 Ciclo Comb. 40 escenarios hidr.
cne10h4d	40	Igual a cne40 con 10 escenarios hidr. y 4 escenarios de demanda.
cne10h1d	10	Igual a cne40 con 10 escenarios hidr. y demanda promedio.

También se han creado casos que representan el sector eléctrico pero para los modelos descritos en 5.2.1 y en 5.2.2. Estos ejemplos fueron creados con el objeto de comparar distintas formas de representar el problema eléctrico.

Para el problema multietapas se utilizan datos del sistema eléctrico para una modelación de diez años en etapas trimestrales. Se utilizan siempre con los mismos ocho escenarios hidráulicos.

Nombre	# etapas.	escen.	Características del Problema
cne2et	2	8	Inversión - operación.
cne3et	3	8 (4,2)	Inversión y 2 etapas de operación.
cne4et	4	8 (2,2,2)	Inversión y 3 etapas de operación.

Se ha preparado un ejemplo ficticio para estudiar la complejidad de una representación multiembalse. El sistema eléctrico representado considera dos embalses de proporciones similares. Para crear el ejemplo con un embalse, se retira una central con embalse y se ajusta la demanda, en la cantidad de energía que proporciona esta central en el ejemplo con dos embalses. Esta compensación se realiza para que el procedimiento de solución no sea muy distinto. Los ejemplos, ejecutados con un horizonte de cinco años, con etapas trimestrales, con diez escenarios hidrológicos y 20 escenarios de demanda, son los siguientes:

Nombre	# escen.	Características del Problema
embal1	200	Caso con 1 embalse.
embal2	200	Caso con 2 embalses.

Con estos datos se han realizado cuatro estudios distintos.

1. El primer estudio tiene como propósito confirmar que el programa creado resuelve correctamente un problema de recurso lineal de dos etapas. Además se prueban las distintas formas de ejecutar el programa y comparan tiempos de ejecución para el mismo problema en los distintos computadores disponibles.

Para esto se realizan tres ejercicios:

- Resolver los problemas de POSTS utilizando MSLiP y el programa en su versión lineal.
 - Ejecutar las distintas opciones del programa creado para un problema perteneciente a la librería POSTS.
 - Para finalizar se ejecuta MSLiP, sobre un caso del sector eléctrico, en los distintos computadores del DIM, para determinar diferencias en rapidez.
2. El segundo estudio consiste en resolver el problema eléctrico propiamente tal, para lo cual se deben resolver los cuatro ejemplos del sector eléctrico utilizando el programa creado con la opción para problemas con variables enteras.
 3. El propósito del tercer estudio es determinar el aumento en carga computacional al resolver un modelo más detallado. Para lograrlo se resuelven los ejemplos multi-etapas y multiembalses utilizando MSLiP.
 4. El último estudio investiga la mejora en tiempo de ejecución que se puede obtener al utilizar una implementación en paralelo del programa creado. Se resuelve el caso cne10h1d con el programa secuencial y luego con el paralelo.

Capítulo 6

Resultados y Conclusiones

A continuación se presentarán los resultados obtenidos en los cuatro estudios definidos en el capítulo anterior.

Para facilitar la presentación de los resultados, se denominan las distintas alternativas de ejecución del programa creado que implementa el algoritmo de descomposición de Benders como sigue:

- DBVE. Descomposición de Benders con variable entera y un escenario en el problema de primera etapa.
- DBVC. Descomposición de Benders con variables continuas y un escenario en el problema de primera etapa.
- DBVCse. Descomposición de Benders con variables continuas, pero el problema maestro sin escenario.

Además se utilizarán las abreviaturas "c.o." y "c.f." para referirse a los cortes de optimalidad y factibilidad respectivamente.

Los resultados numéricos se han obtenido en diversos computadores del departamento de ingeniería matemática. Se han ejecutado el MSLiP y el programa creado en:

Computador	Tipo	Sistema Operativo
Hornopirén	Silicon Graphics, Indigo II	OS IRIX 6.2
Copahue	SUN Sparcstation 10	SUN OS 4.1.3
Llaima	Digital, DEC 3000	OSF1 V2.0

Todos los tiempos de ejecución reportados corresponden al *usertime* de la función *dtime* en FORTRAN.

6.1 Estudio 1

Resultados obtenidos al resolver los problemas de POSTS. Los resultados se obtuvieron con MSLiP y con la opción del programa de descomposición de Benders que considera variables continuas sin escenario en el maestro (DBVCse).

Resultados obtenidos con MSLiP, ejecutado en Hornopirén:

Caso	v.o.teórico	v.obj.	# c.o.	# c.f.	Δt [seg]
storm 8	15535231.897	15535231.897	35	11	272.80
fxm 6	18416.686	18417.066	13	41	7.42
fxm 16	18416.655	18416.759	13	44	9.41
pltexp 6	-9.479354	-9.479354	3	0	2.79
pltexp 16	-9.663308	-9.663308	1	0	3.84

Resultados obtenidos con MSLiP, ejecutado en Copahue:

Caso	v.o.teórico	v.obj.	# c.o.	# c.f.	Δt [seg]
storm 8	15535231.897	15535231.897	35	11	1411.09
fxm 6	18416.686	18417.066	13	41	35.03
fxm 16	18416.655	18416.759	13	44	44.21
pltexp 6	-9.479354	-9.479354	3	0	15.13
pltexp 16	-9.663308	-9.663308	1	0	20.23

Resultados obtenidos con programa DBVCse, ejecutado en Copahue:

Caso	v.o.teórico	v.obj.	# c.o.	# c.f.	Δt [seg]
storm 8	15535231.897	15535231.897	26	0	231.31
fxm 6	18416.686	18417.066	14	20	116.35
fxm 16	18416.655	18416.759	14	24	176.43
pltexp 6	-9.479354	-9.479354	1	0	2.85
pltexp 16	-9.663308	-9.663308	1	0	6.30

Ejemplo para mostrar diferencias en la solución para distintas opciones de ejecución del programa creado. Los siguientes resultados se obtienen para el problema cne40 que representa el problema de inversión en el sector eléctrico. Ambas ejecuciones fueron detenidas al realizar 60 iteraciones cuando el error relativo entre la cota superior y la cota inferior era menor que 0.5%.

Opción ejec.	v.obj.	# c.o.	# c.f.	Δt [seg]
DBVE	10945.8	60	0	50101.4
DBVC	10937.8	60	0	14522.2

A continuación, para problemas de POSTS, se muestra la diferencia en la solución debido a la forma de ejecutar el programa creado.

Problema	Opción ejec.	v.obj.	# c.o.	# c.f.	Δt [seg]
fxm 16	DBVCse	18416.759	14	24	176.43
	DBVC	18416.759	13	0	104.96
storm 8	DBVCse	15535231.897	26	0	231.31
	DBVC	15535231.897	17	0	258.94

Finalmente, se desea hacer notar la diferencia en tiempos de ejecución debido al computador que se utilize. De los resultados obtenidos con MSLiP para problemas de la librería POSTS podemos destacar:

Computador	# c.o.	# c.f.	Δt
Hornopiren	35	11	272.8
Copahue	35	11	1411.1

Además se definió un problema de dos años del sector eléctrico para mostrar el desempeño de los distintos computadores frente al problema de inversiones en el sector eléctrico. El ejemplo de sector eléctrico es un caso reducido del problema descrito en cne40. Consiste de la etapa de inversión, una etapa de operación de dos años y cinco escenarios hidrológicos. Este problema reducido fue resuelto con los mismos cortes en todos los computadores.

Computador	# c.o.	# c.f.	Δt
Hornopiren	4	0	2.8
Copahue	4	0	25.2
Llaima	4	0	16.1

6.2 Estudio 2

En este estudio se resuelven los problemas que describen el problema de inversión en el sector eléctrico como fue presentado en la sección 5.1. Los problemas fueron resueltos con el programa creado, con su opción de ejecución DBVE. A continuación se presentan aspectos de la ejecución del programa:

Caso	v.obj.	# cortes	Δt [seg]
cnefix	11101.19	1	430.2
cne40	10945.82	60	50101.4
cne10h4d	11012.76	60	51321.0
cne10h1d	10961.60	60	61034.2

Los resultados detallados de las variables que describen el sector eléctrico se encuentran en el Anexo B Resultados Problema de Inversiones. En los cuatro casos estudiados se consideró la fecha de entrada de hasta diez proyectos distintos, estos son:

Proyecto	Clave
Peuchén	PE
Mampil	MM
Rucúe	RU
Ralco	RAL
Ciclo Combinado	CC

Además de estos proyectos se consideraron cierta la ejecución de los siguientes proyectos:

Proyecto	Clave	Etapas
Condores	CON	34
San Isidro	CC1	9
Nueva Renca	CC2	5
Nehuenco	CC3	7

El siguiente cuadro muestra la fecha recomendada de realización los proyectos en los distintos casos, los proyectos fijos se muestran en caracteres *itálicos*.

Etapa	cnefix	cne40	cne10h4d	cne10h1d
5	<i>CC2</i>	<i>CC2</i>	<i>CC2</i>	<i>CC2</i>
6				
7	<i>CC3</i>	<i>CC3,MM,RU</i>	<i>CC3,PE</i>	<i>CC3,PE</i>
8				
9	<i>RU,CC1</i>	<i>CC1</i>	<i>CC1</i>	<i>CC1</i>
10	<i>PE</i>			
11	<i>MM</i>		<i>RU</i>	
12				
13				
14				
15			<i>MM</i>	
16				
17				
18				
19		<i>CC</i>		
20				
21			<i>RAL</i>	<i>MM</i>
22				
23	<i>RAL</i>	<i>RAL</i>		<i>2 CC</i>
24			<i>CC</i>	<i>RAL</i>
25				
26	<i>CC</i>			
27				
28			<i>CC</i>	
29				
30	<i>CC</i>	<i>PE</i>		
31	<i>CC</i>	<i>2 CC</i>	<i>CC</i>	<i>CC</i>
32				
33				
34	<i>CON</i>	<i>CON</i>	<i>CON</i>	<i>CON</i>
35	<i>CC</i>	<i>2 CC</i>	<i>3 CC</i>	<i>3 CC</i>
36				
37				
38				
39		<i>CC</i>		
40				

A continuación se muestra el valor de la cota superior e inferior del algoritmo de descomposición de Benders obtenidas para un ejemplo del sector eléctrico con variables

enteras.

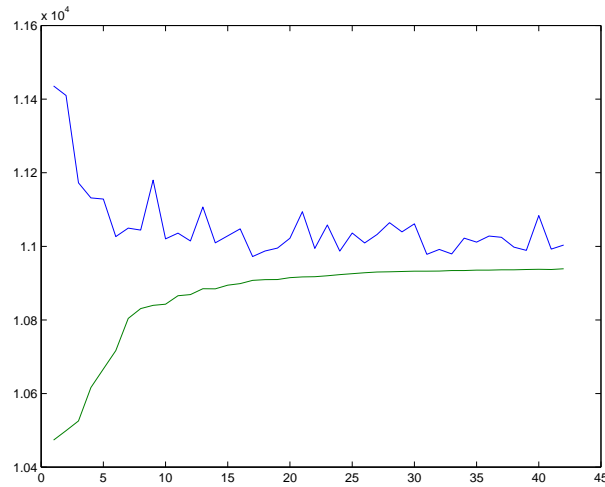


Figura 6.1: Convergencia en algoritmo de Benders

Se han obtenido respuestas del problema eléctrico ejecutando el programa con variables continuas y deteniendo las iteraciones antes, para contrastar las respuestas obtenidas. A continuación se presentan los resultados generales para el problema cne40. El problema fue resuelto permitiendo 45 y 60 iteraciones para variables continuas y enteras (DBVC, DBVE).

Opción ejec.	Max.iter.	v.obj.	# c.o.	# c.f.	Δt [seg]
DBVE	45	10939.8	45	0	27297.6
DBVC	45	10931.8	45	0	10690.2
DBVE	60	10945.8	60	0	50101.4
DBVC	60	10937.8	60	0	14522.2

Las respuestas a las variables de inversión para estos ejemplos son:

Etapa	DBVC 60	DBVE 60	DBVC 45	DBVE 45
5	<i>CC2</i>	<i>CC2</i>	<i>CC2</i>	<i>CC2</i>
6				
7	<i>CC3,0.7PE,0.3MM</i>	<i>CC3,MM,RU</i>	<i>CC3,0.4PE 0.3MM,0.8RU</i>	<i>CC3</i>
8				
9	<i>CC1</i>	<i>CC1</i>	<i>CC1</i>	<i>CC1</i>
10				MM
11				
12				
13	0.9RU			
14				
15				
16				
17				
18				
19	1.1CC	CC	0.6CC	RU,CC
20	0.4RAL			
21	0.3RAL			RAL
22				
23		RAL		PE
24				
25				
26				
27			0.6CC	
28	0.7CC			CC
29				
30		PE		
31		2 CC	1.1CC	
32	1.2CC		0.4CC	CC
33				
34	<i>CON</i>	<i>CON</i>	<i>CON</i>	<i>CON</i>
35	2.0CC	2 CC	2.2CC	CC
36				
37				
38				
39	0.1PE,1.0CC 0.3RAL	CC	0.4PE,1.1CC	2CC
40				

6.3 Estudio 3

Con este estudio se investiga el mayor costo computacional en utilizar una mejor modelación para describir el problema eléctrico. Se obtuvieron resultados para un modelo lineal multietapas y para un modelo ficticio lineal multiembalse.

Se relvió con MSLiP un ejemplo del problema de decisión de inversiones, simulado durante diez años, con ocho escenarios hidrológicos. Versiones de dos, tres y cuatro etapas del problema fueron resueltas para los mismos escenarios hidrológicos. En todos estos ejemplos la primera etapa representa la toma de decisiones de inversión.

Caso	v.obj.	# c.o.	# c.f.	Δt [seg]
cne2et	3020.63	239	0	8488.2
cne3et	3026.33	1895	44	2963.1
cne4et	3029.49	3280	121	4312.0

Los siguientes son los resultados para problemas con distinta cantidad de embalses.

Caso	v.obj.	# c.o.	# c.f.	Δt [seg]
embalse1	2716.80	29	0	1045.6
embalse2	2153.89	28	0	1502.7

6.4 Estudio 4

Se compara ahora el rendimiento de un algoritmo secuencial contra uno paralelo para implementar la descomposición de Benders.

Se presentan los resultados para el caso cne40 con variables de inversión continuas, se detuvo el algoritmo en 45 iteraciones.

Caso	# cortes	Δt [seg] user	Δt [seg] syst.	Speed up
Secuencial	45	10951.43	158.22	
2 Procesadores	45	4461.59	74.55	2.12
6 Procesadores	45	1770.31	27.62	5.73
8 Procesadores	45	1293.86	20.39	7.76

En el siguiente cuadro se muestra el *speed up* que se obtuvo en este ejemplo por paralelizar el algoritmo:

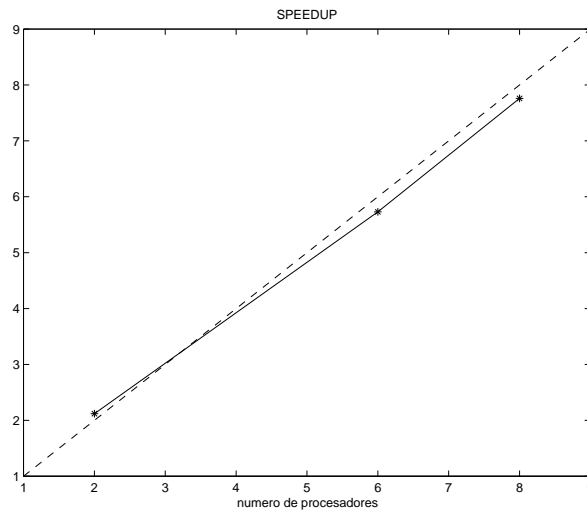


Figura 6.2: Speed up algoritmo de Benders

6.5 Conclusiones

Como conclusiones generales se pueden mencionar tres puntos:

1. La creación de un modelo que, por primera vez, trata a los problemas de inversión y operación del sistema eléctrico de forma conjunta.
2. La utilización de herramientas matemáticas del área de la optimización estocástica, apropiadas para abordar este problema.
3. La creación de un programa que realiza el método de descomposición de Benders, permitiendo el uso de variables enteras en la primera etapa.
4. El uso de algoritmos paralelos permite implementar modelaciones realistas del problema de inversiones del sistema eléctrico gracias a la gran reducción en el tiempo de ejecución que provocan.

A continuación, siguiendo el planteamiento de los objetivos específicos de este trabajo, se presentan conclusiones particulares a los distintos aspectos abordados.

6.5.1 Problema de Operación del Sector Eléctrico

En este trabajo se ha descrito un sistema eléctrico general utilizando una modelación lineal. Esta representación de la operación de un sistema eléctrico se presenta en el capítulo 4.

Producto de la modelación descrita se obtiene un problema de recurso mixto multi-etapas para representar la operación del sistema eléctrico. El modelo permite considerar aleatoriedad hidrológica y de demanda.

Se ha resuelto el problema de operación propiamente tal para una simplificación del problema descrito, presentado en 5.1. El modelo simplificado es el requerido por el modelo de inversión.

Resultados para el problema de operación se obtienen al resolver el modelo de inversión utilizando variables de inversión fijas. Una solución obtenida del modelo de operación es el caso cnfix presentado en 6.2.

Una modelación más detallada trae consigo una mayor carga computacional, como se puede ver en los resultados obtenidos para problemas multi-etapas y multi-embalse en 6.2.

6.5.2 Optimización Estocástica

Debido a la alta aleatoriedad de variables involucradas en los problemas del sistema eléctrico se aborda este problema desde la perspectiva de la optimización estocástica. Se ha notado que un marco apropiado para resolver el problema de inversión son los problemas de recurso mixto multi-etapas.

Dadas las ecuaciones que describen el problema de operación eléctrica, estos modelos permiten representar la aleatoriedad de la hidrología y de demanda como variaciones en el lado derecho de algunas restricciones.

Resultados de existencia de soluciones para el problema planteado y convergencia del algoritmo utilizado son presentados en las secciones 4.9 y 3.6.1 respectivamente.

6.5.3 Problema de Inversión del Sector Eléctrico

El problema de inversiones en el sector eléctrico ha sido modelado considerando: la aleatoriedad hidrológica, de demanda y determinando el accionar de otros actores del sector.

En general el problema de inversiones se modeló como un problema de recurso multi-etapas con variables enteras. Se obtuvieron respuestas numéricas para una simplificación del modelo general, que consiste de un modelo de recurso con dos etapas y variables enteras en la primera. El modelo general es descrito en 4, mientras que el simplificado en 5.1.

Se utilizó un algoritmo de descomposición de Benders para obtener respuestas al modelo que describe el problema de inversiones.

6.5.4 Solución Problema Mixto

Para resolver el problema de recurso mixto se creó un programa que implementa el algoritmo de descomposición de Benders. El programa correctamente resuelve los problemas de recurso lineales y permite resolver, utilizando Benders, problemas de recurso lineales en dos etapas, con variables enteras en la primera y con aleatoriedades en la matriz y en el lado derecho.

Resultados comparando el desempeño del programa creado contra MSLiP son presentados en el estudio 1, sección 6.1. En los resultados obtenidos para los problemas de la librería estándar POSTS se observa que el programa creado obtiene las mismas respuestas que MSLiP en todos los problemas, y cuando se consideran los tiempos de ejecución para la misma máquina el programa creado es más rápido salvo en los ejemplos fxm.

En el mismo estudio se comparan las distintas alternativas de ejecución que tiene el programa:

- La ejecución considerando variables enteras es mucho más lenta que resolver el mismo problema lineal.
- En el caso en que se creen cortes de factibilidad, resolver el problema incluyendo un escenario en el problema maestro es más eficiente. El hecho de incluir un escenario en el maestro evita que se pierda tiempo en crear los cortes de factibilidad.
- En el caso en que no es necesario crear cortes de factibilidad es más eficiente

resolver un problema en que el maestro no incluye subproblema. El problema maestro que debe resolver si incluye un escenario es más complicado, por lo que demora más.

Los resultados para el problema de inversiones del sector eléctrico se presentan en el estudio 2, sección 6.2. Se presentan los valores de la función objetivo, tiempos y cantidad de cortes para cuatro problemas.

El problema con las variables de inversión fijas a la recomendación de la CNE (cnefix) es el que entrega un valor de función objetivo más elevado. Los dos problemas enfrentados solamente a aleatoriedad hidrológica: cne40 (40 escenarios) y cne10h1d (10 escenarios), tienen valores de función objetivo menores que el problema sujeto a incertidumbre en la demanda e hidrologías.

En la misma sección se comparan el resultado de las variables de inversión para los distintos casos, donde se nota una gran dependencia de la solución lograda dado el caso.

El algoritmo de descomposición de Benders con variable entera implementado converge como es mostrado en la figura 6.1 en los casos con y sin variable entera. Es importante destacar que la cota inferior del problema crece monótonamente, mientras que la cota superior es variable debido a que representa la evaluación en un punto factible.

Los resultados del aumento en la carga computacional para una mejor modelación del problema de operación del sistema eléctrico se muestran en el estudio 3, sección 6.3.

En caso en que se resuelva el problema con más de dos etapas aumenta dramáticamente el número de cortes necesarios para que el algoritmo converga. Esta característica para problemas grandes significa que aumenta el tiempo de ejecución del algoritmo. En el ejemplo presentado que es un ejemplo pequeño, el caso con dos etapas, es más lento debido a que resolver el problema de segunda etapa entero resultó ser más complicado.

En el caso con ocho etapas el problema es tan grande que actualmente sólo puede ser ejecutado en Hornopirén.

El aumento en la cantidad de embalses causa que cada uno de los problemas de operación que se deben resolver sea más difícil. Luego para la misma cantidad de cortes necesaria para converger, el programa se demora más.

El algoritmo paralelo reduce significativamente el tiempo de procesamiento. La implementación paralela realizada, que aborda solamente algunos aspectos, logró reducir el tiempo de ejecución en 88% en el caso con ocho procesadores. En general se apreció un buen speed up.

6.6 Futuras direcciones

Para mejorar la representación que el modelo hace del sector eléctrico existen diversos puntos que se pueden profundizar, como son:

- Resolver este problema modelando nodos de generación y demanda, líneas de transmisión y pérdidas en las líneas.
- Resolver el problema con mínimos técnicos en centrales térmicas (obliga a usar variables enteras en todas las etapas.)
- Abordar completamente un problema multietapas, pues se debe preparar un algoritmo que no dependa de otro modelo para definir sus costos internos.

El abordar modelos más complejos requerirá, debido a la magnitud de los problemas que estos modelos significan, de procesadores más poderosos y algoritmos más eficientes. En este sentido los algoritmos en paralelo representan una seria posibilidad para poder abordar adecuadamente estos modelos más completos.

Debido a que la creación del programa no consideró aspectos de rapidez del algoritmo, como primer paso para la optimización de este programa se debe replantear el código. Mejoras se obtendrán al evitar que el programa realice tantos accesos a disco. Otro aspecto que puede ser positivo es poder ejecutar este programa en la máquina Silicon Graphics, Hornopirén.

Se debe estudiar el beneficio que se puede obtener al modificar el programa que soluciona los problema lineales (OSL) por CPLEX, puesto que este software presenta, en los últimos informes, mejores resultados para problemas de optimización con variables enteras.

Se debe continuar el estudio del efecto de algoritmos paralelos en el tiempo de ejecución de respuestas computacionales al problema de decisión de inversiones. Un punto importante que puede resultar muy útil abordar es resolver el problema mixto de primera etapa en paralelo. El algoritmo sufre un cuello de botella en este punto ya que todos los procesadores deben esperar que se resuelva el problema maestro, que se realiza utilizando branch and bound. Este paso permite la implementación de un algoritmo en paralelo.

Los resultados del problema de inversión en el sector eléctrico muestran que las decisiones de inversión dependen fuertemente de la cantidad de escenarios hidráulicos y de la demanda. Además se observa que es muy sensible la solución de un problema a incluir

variables de inversión enteras. Debido a esto es que se deberán hacer consideraciones con respecto a la forma de la función objetivo que se debe minimizar. Es importante realizar ejemplos de este modelo con una función con términos cuadráticos, que representen la varianza de la función objetivo con respecto a las variables aleatorias. Este problema entregará soluciones que minimizan el costo promedio y que tienen al mismo tiempo una varianza pequeña. La solución será entonces más robusta a cambios en las variables aleatorias.

Apéndice A

Modelo Implementado

A.1 Variables

A.1.1 Variables de Inversión

Para representar las inversiones posibles de realizar, se deben utilizar variables binarias. Se necesita una variable por proyecto y por etapa en que se puede invertir. Esta variable x_{it} vale cero si el proyecto i no se ha realizado hasta la etapa t , y vale uno cuando el proyecto ya se realizó. Las variables que se han utilizado son:

Proyecto	Variable	Etapas	Tipo
Peuchén	XPE_t	7,...,40	libre
Mampil	XMM_t	7,...,40	libre
Rucúe	XRU_t	7,...,40	libre
Los Cóndores	$XCON_t$	34,...,40	fija
Ralco	$XRAL_t$	20,...,40	libre
San Isidro	$XCC1_t$	8,...,40	fija
Nueva Renca	$XCC2_t$	5,...,40	fija
Nehuenco	$XCC3_t$	7,...,40	fija
Ciclo Combinado	XCC_t	10,...,40	libre

En la práctica resulta necesario definir una variable de inversión totalizante por etapa. El propósito de esta variable es reunir el gasto en inversión en cada etapa y así obtener una formulación más concisa de la función objetivo.

La variable $CINV_t$ representa el costo de inversión en la etapa t , para todo $t \in \{5, \dots, 40\}$.

A.1.2 Variables de Operación

En esta parte del problema, se desea escoger las variables de operación que realicen la operación a costo marginal más barato del sistema. Para eso se minimiza el costo de operación más un costo futuro del agua almacenada en el sistema al final del período. Este problema se soluciona escogiendo cuánto deben generar las distintas centrales del sistema en cada etapa del horizonte de planificación.

Para describir la operación del sistema uninodal explicado anteriormente, las variables de operación necesarias son:

- Generación de centrales del sistema.

Centrales Existentes:

Central	Variable	Etapas	Central	Variable	Etapas
El Toro	GT_t	1,...,40	Diego de Almagro	GDA_t	1,...,40
Abanico	GAB_t	1,...,40	Huasco Vapor	GHV_t	1,...,40
Antuco	GAN_t	1,...,40	Huasco Gas	GHG_t	1,...,40
Hidro1	$GSIS1_t$	1,...,40	Bocamina	GBO_t	1,...,40
Hidro2	$GSIS2_t$	1,...,40	Ventana 1	$GV1_t$	1,...,40
Hidro3	$GACO_t$	1,...,40	Ventana 2	$GV2_t$	1,...,40
Col., Peh.	GCP_t	1,...,40	Renca	GRE_t	1,...,40
Png., L.A., S.I.	$GOTRA_t$	1,...,40	Laguna Verde	GLV_t	1,...,40
1er tramo Falla	$GFLL1_t$	1,...,40	El Indio	GIN_t	1,...,40
2do tramo Falla	$GFLL2_t$	1,...,40	Guacolda	GGU_t	1,...,40
3er tramo Falla	$GFLL3_t$	1,...,40	Central Manten.	$GMAN_t$	1,...,40
			Autogeneradores	$GECO_t$	1,...,40

Las centrales Hidro1, Hidro2 e Hidro3 representan el resto de las centrales hidráulicas en Chile.

Centrales Futuras:

Central	Variable	Etapas
Peuchén	GPE_t	7,...,40
Mampil	GMM_t	7,...,40
Rucúe	GRU_t	7,...,40
Los Cóndores	$GCND_t$	34,...,40
Ralco	$GRAL_t$	20,...,40
San Isidro	$GCC1_t$	8,...,40
Nueva Renca	$GCC2_t$	5,...,40
Nehuenco	$GCC3_t$	7,...,40
Ciclo Combinado	GCC_t	10,...,40

- Volumen del embalse Laja. $VL_t, t \in \{1, \dots, 40\}$
- Caudales afluentes y extraídos del embalse Laja. En todas las etapas se utilizan variables necesarias para representar la operación de un embalse:

Central	Variable	Etapas
Volumen generado	QLG_t	1,...,40
Volumen vertido	QLV_t	1,...,40

- Volumen final anual del embalse Laja. Para las etapas que coinciden con el fin de un año se debe agregar una variable que represente el volumen final del embalse y tenga asociado un costo.

$$VLF_t, t \in \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$$

- Costo futuro del agua del embalse Laja. Representa el costo asociado al volumen final del embalse Laja.

$$CVLF_t, t \in \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$$

- Costo de operación del sistema. Es una variable totalizante para simplificar la expresión de la función objetivo. $COP_t, t \in \{1, \dots, 40\}$.

Todas estas variables son continuas y positivas.

A.1.3 Variables Aleatorias

Como fue mencionado anteriormente la aleatoriedad hidrológica es representada mediante un conjunto finito de escenarios basados en datos hidrológicos históricos. La

aleatoriedad en la demanda se representa mediante un conjunto finito de escenarios creados al suponer que el crecimiento anual de la demanda puede variar uniformemente en un rango.

Estos escenarios consisten en asignar distintos valores posibles a ciertas variables. Las cantidades que deben cambiar entre escenarios son:

- caudales afluentes en distintos puntos de la cuenca del Laja
- energías generables de las centrales hidráulicas que no están en el Laja
- valores de la demanda de potencia promedio trimestral.

Para esto, como se muestra en la sección de restricciones de operación más adelante, basta cambiar en las mayoría de las restricciones el lado derecho de la restricción.

A.2 Restricciones

A.2.1 Función Objetivo

La función que se desea minimizar es simplemente la suma de los costos actualizados en todas las etapas.

La operación ha sido separada anualmente, como se explicará con más detalle en la sección de restricciones de operación, y debido a esta separación anual se debe agregar el costo de oportunidad del agua embalsada al finalizar cada año (CVLF_t).

Así podemos escribir la función objetivo como:

$$\text{OBJECT : } \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+i)^{t-1}} (\text{CINV}_t + \text{COP}_t) + \sum_{t=1}^{T/4} \frac{1}{(1+i)^{4t-1}} \text{CVLF}_{4t}$$

A.2.2 Restricciones de Inversión

Las principales restricciones de inversión se deben a la definición de las variables de inversión. Puesto que estas representan el hecho que se haya construido o no el proyecto

hasta esa etapa, no debe ocurrir que una central deje de existir. Luego existen restricciones de la forma:

$$\text{CR}_{\text{nom},t} : \quad X_{\text{nom},t} \leq X_{\text{nom},t+1}$$

para todo $t \in \{1, \dots, 40\}$ en que el proyecto de nombre "nom" exista.

Para que exista una variable que represente los pagos trimestrales de las inversiones realizadas se debe agregar una restricción donde esta variable sea igual a la suma de las trimestralidades del costo de cada proyecto, multiplicada su variable $X_{\text{nom},t}$.

$$\text{COSTI}_t \quad \text{CINV}_t = \sum_{\text{nom} \in I} C_{I_{\text{nom}}} X_{\text{nom},t}$$

De esta misma forma se pueden modelar otras restricciones particulares a los proyectos en prueba. Si, por ejemplo, existen dos versiones de un mismo proyecto se debe cumplir que a lo más se construya uno de los dos.

A.2.3 Restricciones de Operación

En primer lugar existen las restricciones de generación de centrales existentes. Estas restricciones pueden ser de tres tipos: para centrales térmicas, hidráulicas con matrices de energía o hidráulicas modeladas.

Las centrales térmicas no pueden generar más que su capacidad máxima, por ejemplo para la central Bocamina:

$$\text{BOCA}_t : \quad \text{GBO}_t \leq \text{MAXGBO}$$

Las centrales hidráulicas no modeladas explícitamente generan la energía en cada escenario hidrológico de acuerdo a lo que le corresponde según su matriz de energía generable. Para representar la aleatoriedad, aquí se modifica la disponibilidad de caudales afluentes de un escenario hidrológico a otro. Por ejemplo para Colbún-Pehuenche:

$$\text{CBPH}_t : \quad \text{GCP}_t = \omega_{\text{CP},t}$$

donde $\omega_{\text{CP},t}$ representa la energía generable por la central Colbún-Pehuenche en la etapa t . Este dato es el que se modifica entre escenarios distintos.

Las centrales hidráulicas modeladas, son las centrales en la cuenca del Laja. Como se está modelando la regulación hidráulica de esta cuenca se tiene que la generación de una

central es su rendimiento por el caudal afluente. El dato de caudal afluente también se ve modificado de un escenario a otro para representar la aleatoriedad. La central abanico cumple:

$$\text{ABAN}_t : \quad \text{GAB}_t = \eta_{\text{AB}} (DT * \text{QLV}_t + \omega_{\text{AB}} t)$$

Otro grupo de restricciones de operación son las relacionadas con el volumen de agua en el embalse Laja.

Primero se debe mencionar las restricciones con que se definen las filtraciones del lago Laja, que se han supuesto lineales en función del volumen. Se obtiene esta función mediante una regresión lineal del caudal filtrado versus el volumen del lago Laja.

$$\text{LAJA1}_t : \quad \text{QLV}_t = \alpha \text{VL}_t + \beta$$

Las restricciones que controlan el nivel del lago Laja son las de equilibrio de agua. Estas son las restricciones que naturalmente ligan una etapa con otra. Al tener las etapas ligadas así, se puede guardar agua para períodos de sequía o usarla oportunamente si no es necesitada a futuro. Como en la realidad no se sabe como será el clima a futuro se ha eliminado esta ligazón de un año a otro. Estas restricciones se utilizan entre etapas de un año, pero no de un año a otro.

Debido a que la operación ha sido separada anualmente existen tres tipos de restricciones:

- Restricciones de inicialización. En las que el volumen inicial de un año se le asigna un dato fijo. Este dato debe ser el volumen final del lago el año anterior.

$$\text{LAJIN}_t : \quad \text{VL}_t = \text{DATO}_t$$

- Restricciones de equilibrio de agua. Indican que el volumen al comienzo de la etapa siguiente es igual al volumen del comienzo de la etapa menos lo que se saca más lo que llega. El dato del volumen afluente al lago Laja en una etapa, es un dato aleatorio, es decir cambia con los escenarios.

$$\text{LAJA2}_t : \quad \text{VL}_{t+1} = \text{VL}_t - DT (\text{QLV}_t + \text{QLG}_t) + \omega_{\text{L}} t$$

- Restricciones de fin de año. Son las restricciones con las que se define el volumen final del año, el que tiene asociado un costo alternativo, estas restricciones solamente ocurren en $t \in \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

$$\text{LAJA2}_t : \quad \text{VLF}_{t+1} = \text{VL}_t - DT (\text{QLV}_t + \text{QLG}_t) + \omega_{\text{L}} t$$

Una vez definido el volumen final del embalse existen las restricciones con las que se define la función de costo alternativo de este volumen. Como la función de costo futuro es convexa se puede escribir como una serie de restricciones lineales. Estas rectas se escogen como las aproximaciones lineales que mejor aproximan la curva que representa los costos estratégicos del agua del Lago Laja, según el modelo GOL. Estos costos estratégicos, que representan el costo alternativo del agua embalsada, son creados por el GOL al asociarle a un nivel del embalse un costo igual al costo actualizado de la operación futura óptima desde ese punto. Las restricciones son de la forma:

$$\begin{aligned} \text{CFAG1}_t : & \quad \text{CVLF}_t \geq \alpha_1 \text{VLF}_t + \beta_1 \\ \text{CFAG2}_t : & \quad \text{CVLF}_t \geq \alpha_2 \text{VLF}_t + \beta_2 \end{aligned}$$

Las siguientes restricciones son las asociadas a la generación de las centrales futuras, estas son de dos tipos, térmicas e hidráulicas. Estas ecuaciones son las que ligan los problemas de inversión y operación de este problema de recurso. Son muy similares a las restricciones de generación de centrales térmicas e hidráulicas con matrices de energía generable. Por ejemplo para la central térmica futura CC1:

$$\text{COMB}_t : \quad \text{GCC}_t \leq \text{MAXGCC} * \text{XCC}_t$$

para la central hidráulica futura MM, se necesitan las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \text{MAMP1}_t : & \quad \text{GMM}_t \leq \text{MAXGMM} * \text{XMM}_t \\ \text{MAMP2}_t : & \quad \text{GMM}_t \leq \omega \text{MM}_t \end{aligned}$$

Una restricción muy importante es la restricción de satisfacción de demanda. En esta restricción se define la generación de la central de falla, que es la energía que el sistema no abastece. La central de falla es representada por tres centrales con costos variables distintos.

$$\begin{aligned} \text{DEMAN}_t : & \quad \text{DEM}_t = d_t \\ \text{FALLA}_t : & \quad \sum_{j=1}^3 \text{GFLL}j_t + \sum_{\text{nom} \in I_t} G_{\text{nom}_t} = \text{DEM}_t \\ \text{FALL1}_t : & \quad \text{GFLL1}_t \leq 0.1 * \text{DEM}_t \\ \text{FALL2}_t : & \quad \text{GFLL2}_t \leq 0.1 * \text{DEM}_t \\ \text{FALL3}_t : & \quad \text{GFLL3}_t \leq 0.8 * \text{DEM}_t \end{aligned}$$

donde d_t representa el dato aleatorio de demanda que se modifica entre escenarios de demanda distinta, "nom" corresponde al nombre de una central que puede generar en la etapa t y I_t es el conjunto de todas las centrales que están disponibles en la etapa t .

Además la variable dual asociada a esta restricción representa el costo marginal del sistema en esta etapa.

La última restricción de operación es la restricción totalizante de los costos de operación, aquí se le asigna un costo por MW de generación promedio a todas las centrales térmicas y a la generación de la central de falla.

$$\text{COSTO}_t : \quad \text{COP}_t = \sum_{\text{nom} \in I^*_t} CO_{\text{nom}} G_{\text{nom}_t}$$

donde el conjunto I^*_t es el subconjunto de I_t que contiene a las centrales térmicas que están disponibles para generar en la etapa t .

Los coeficientes de costo variable de las centrales térmicas son calculados de valores de combustibles y rendimientos ingresados para cada central térmica. Junto con esos datos también se ingresan los coeficientes de disponibilidad de las centrales térmicas e hidráulicas que no usen matriz de energía generable. Mediante estos coeficientes se incluye el efecto de las salidas de centrales por mantenimiento. Este efecto se representa disminuyendo la potencia máxima generable al multiplicar la potencia máxima por el coeficiente que es menor que uno.

Apéndice B

Resultados Problema de Inversiones

En este anexo se presentan resultados detallados de la operación del caso cne40.

1. Costos marginales promedio, por etapa.

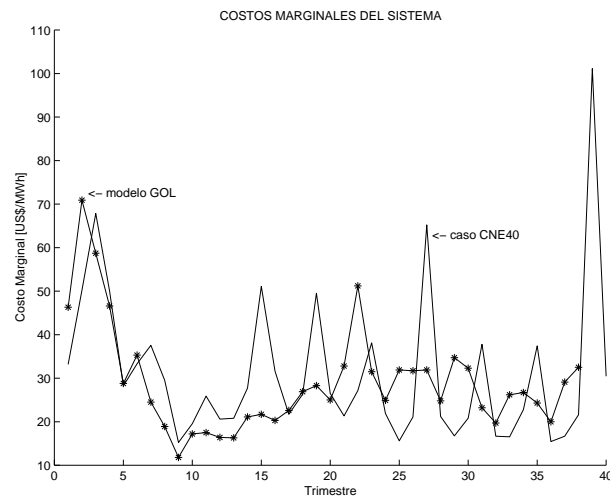


Figura B.1: Costo Marginal, Problema Inversiones

El cuadro anterior muestra el costo marginal promedio por etapa que se obtiene para la solución final del problema de inversiones, en el caso entero. La curva

aparece contrastada contra el resultado de costos marginales obtenido utilizando el modelo GOL.

En el siguiente cuadro se muestra el beneficio marginal promedio obtenido por proyectos en este ejemplo. El beneficio marginal se determinó como los ingresos netos que perciben las centrales partidos por su capacidad disponible. Se presentan los resultados para los proyectos Mampil, Ralco y los Ciclos Combinados.

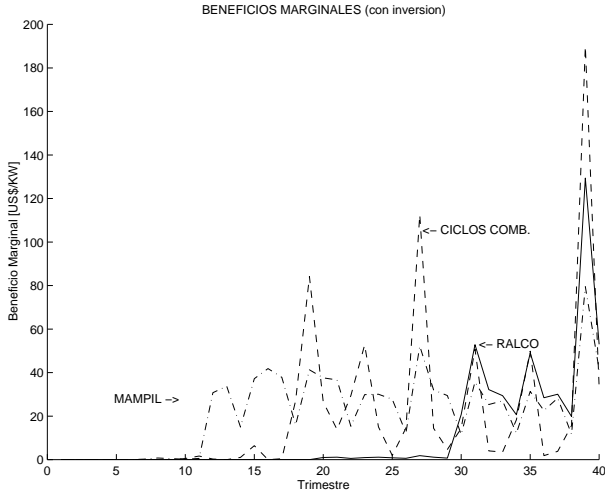


Figura B.2: Beneficio Marginal, Problema Inversiones

Se observa que los marginales son suficientes para que las centrales reciban ingresos por sobre sus costos operacionales, lo que permite pagar el proyecto.

2. Nivel de embalse promedio, por etapa.

A continuación se muestra la evolución del único embalse que es modelado en este ejemplo. Se observa la estacionalidad que normalmente ocurre en el sistema eléctrico chileno.

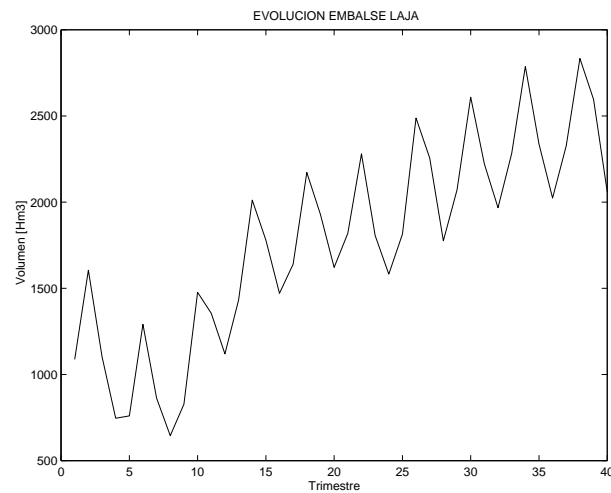


Figura B.3: Evolución Volumen del Lago Laja

Bibliografía

- [1] J.R.Birge, *Decomposition And Partitioning Methods For Multi-Stage Stochastic Linear Programs*, Operations Research vol.33, pp.989-1007, 1985.
- [2] J.R.Birge, M.A.H. Dempster, et. al., *A Standard Input Format for Multiperiod Stochastic Linear Programs*, Committee on Algorithms Newsletter # 17, pp. 1-19, 1987.
- [3] Brannlund, Sjelvgren and Andersson, *Optimal Short Term Operation Planning of a Large Hydrothermal Power System Based on a Nonlinear Network Flow Concept*, IEEE Transactions on Power Systems, vol. PWR5-1 no. 4 pp. 75-82, Nov. 1986.
- [4] Cazalet, *Decomposition of Complex Decision Problems With Applications to Electrical Power System Planning*, Standford University, 1970.
- [5] E.Skoknic y E.Calderón, *Modelo Global de Inversiones (MGI). Descripción General y Planteamiento de Las Ecuaciones*, CIER-Subcomite de Planificación e Ingeniería de Sistemas Eléctricos, 1990.
- [6] Y.Ermoliev and R.J-B.Wets editors, *Numerical Techniques for Stochastic Optimization*, Springer-Verlag, 1988.
- [7] Escudero, *Production Planning Via Scenario Modelling*, Research Report IBM Research Division, T.J. Watson Research Center, NY.
- [8] L.F.Escudero, J. Salmerón, et.al., *SEGEM: A Simulation approach for Electric Generation Management*, IEEE Summer Meeting, 1997.
- [9] H.I.Gassmann, *MSLiP: A Computer Code For The Multistage Stochastic Linear Programming Problem*, Math. Prog., vol. 47 pp. 407-423, 1990.
- [10] H.I.Gassman, *MSLiP User's Guide*, 1990.

- [11] J.L.Higle and S.Sen, *Stochastic Decomposition: An Algorithm For Two Stage Linear Programs With Recourse*, Mathematics of Operations Research, vol. 16, pp. 650-669, 1991.
- [12] D.F.Holmes, *A Portable Stochastic Programming Test Set, (POSTS)*,<http://www-personal.umich.edu/~jrbirge/dholmes/post.html>.
- [13] A.R.Kan and L.Stougie, *Stochastic Integer Programming*, Stochastic Optimization Problems,pp. 201-213. 1979.
- [14] F.V.Louveaux, *A Solution Method for Multistage Stochastic Programs with Recourse with Application to an Energy Investment Problem*, Operations Research, p.p. 889-901, 1980.
- [15] Pereira et.al, *Power System Expansion Planning Under Uncertainty*, pp. 68-74.
- [16] Pereira, *Optimal Stochastic Operations Scheduling of Large Hydroelectric Systems*, Electrical Power Energy Systems, vol. 11, no. 3 pp.161-169, July 1989.
- [17] Pereira et. al., *Combining Analytical Models And Monte-Carlo Techniques In Probabilistic Power System Analysis*, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 7 no. 1 pp. 265-272, Feb. 1992
- [18] Power Systems Research Inc., *Modelo de Despacho Hidro-Térmico con Restricciones de Transmisión -SDDP/CDEC-*, Nov. 1994.
- [19] Rotting and Gjelsvik, *Stochastic Dual Dynamic Programming For Seasonal Scheduling In The Norwegian Power System*, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 7 no. 1 pp. 273-279, Feb. 1992.
- [20] Shimizu and Ishizuka, *Optimality Conditions And Algorithms For Parameter Design Problems With Two-Level Structure*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-30, no. 10, pp. 986-993, Oct 1985.
- [21] R.M.Van Slyke and R.Wets,*L-Shaped Linear Programs With Applications to Optimal Control and Stochastic Programming*, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 17, No. 4., 1969.
- [22] R.J.-B.Wets, *Stochastic Programming*, Handbooks in OR & MS, Vol. 1, pp. 573-629, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1989.
- [23] D.S.Yakowitz, *A Regularized Stochastic Decomposition Algorithm For Two-Stage Stochastic Linear Programs*, Computational Optimization and Applications, vol. 3, pp. 59-81, 1994.