
METODOLOGÍAS BASADAS EN VaR PARA EL ANÁLISIS DE RIESGO EN PROYECTOS DE EMBALSES

PROSPER LAMOTHE*
EDUARDO CONTRERAS**

Resumen

Esta investigación, aplica el modelo de Value at Risk, al mercado agrícola en Chile, en particular a proyectos de concesión de obras de riego. En estos proyectos, la viabilidad del negocio para el concesionario de la obra de riego, depende de la rentabilidad del negocio de los agricultores (clientes del concesionario), y también de los riesgos de la ejecución de las obras. La rentabilidad del negocio agrícola, depende a su vez de una serie de factores de riesgo, entre los que destacan los riesgos de mercado (de precios de los productos) y los riesgos climáticos. Como principal conclusión, se valida la hipótesis de que es posible estimar rentabilidades y riesgos para el concesionario de un proyecto de embalse, mediante una metodología como la desarrollada.

Palabras Clave: Análisis de riesgo - VaR - Evaluación de Proyectos.

*Académico. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Autónoma de Madrid.

**Académico. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Departamento de Ingeniería Industrial. Universidad de Chile.

1. Introducción

La aplicación de VaR a proyectos de riego es relevante, ya que en el estado chileno, que inició en la década de los noventa un sistema de concesión de obras públicas a empresas privadas (fundamentalmente carreteras, puentes, aeropuertos y puertos), se ha analizado la posibilidad de extender este sistema la construcción de obras de riesgo.

En este sentido, el aporte de la investigación se relaciona con la novedad de aplicar técnicas de VaR a portafolios de commodities agrícolas (cuya rentabilidad determina la del embalse). La correcta estimación de los riesgos de este tipo de proyectos, contribuirá a facilitar la toma de decisiones de las empresas privadas participantes, evitando costos asociados a una inadecuada valoración de los riesgos.

2. Marco Teórico de la Investigación

2.1. Análisis probabilístico

Consiste en calcular estimadores de tendencia central y de dispersión del VPN de un proyecto de inversión a través de su función de distribución de probabilidades. Para un proyecto es posible calcular el VPN esperado y la desviación estándar de dicho VPN (Blanck y Tarquin, 1998). En este enfoque juega un papel importante el Teorema del Límite Central: Si una variable aleatoria X puede ser expresada como la suma de n variables aleatorias independientes, entonces para un " n grande" la variable aleatoria X sigue aproximadamente una distribución normal (Joiron, 2004).

El VPN es en efecto una variable aleatoria que es igual a la suma (ponderada) de $n+1$ variables aleatorias: los flujos de caja. Por lo que con las funciones de distribución de los flujos de caja se puede obtener el comportamiento probabilístico del VPN.

2.2. Nuevos desarrollos: el Value at Risk (VaR)

La metodología VaR (Longerstaey J. & Zangar P, 1995), ha sido ampliamente difundida, aplicada a distintos tipos de activos, fundamentalmente financieros. Lo que el VaR mide es la exposición al riesgo para un cierto nivel de confianza, es decir, el monto máximo que se podría perder para ese nivel de confianza, en cierto intervalo de tiempo.

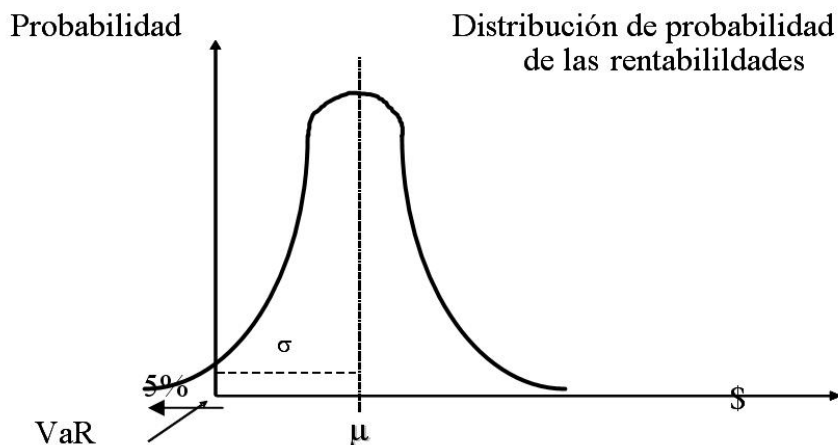


Figura 1: Value at Risk (VaR)

La métrica se ha establecido en el mercado como una medida clave del riesgo, desde que el Comité de Basilea estableció que los bancos deberían ser capaces de cubrir pérdidas en sus portafolios sobre un horizonte de 10 días un 99 % del tiempo.

Relación entre el VaR y las opciones reales

Existe una complementariedad teórica y práctica entre el VaR y el enfoque de opciones reales, este último busca valorar el aporte de las decisiones futuras de los gestores de un proyecto, que introducen mejoras en la gestión dependiendo de la evolución de las variables riesgosas (una síntesis de estas "flexibilidades" se puede analizar en Contreras y Fernández, 2003). Ambos consideran que las variables riesgosas evolucionan a futuro según algún proceso estocástico. Más aún, el modelamiento, por ejemplo de los precios, que se realice para calcular el VaR, debe ser el mismo modelamiento que se utilice para calcular el valor de las opciones asociadas a la evolución futura de dichos precios (Alessi, 2005)

Desde el punto de vista práctico, tanto en el cálculo del VaR como en el de las opciones reales se puede utilizar un modelo paramétrico, asumiendo normalidad de las variables (lo que conduce al modelo de Black y Sholes en el caso de opciones y al modelo RiskMetrics en el caso de VaR), o se pueden estimar las variabilidades de las variables mediante simulación de Monte Carlo, es decir, mediante un modelo no paramétrico (Embrechts. 2003). En síntesis, hay mucho en común entre los dos enfoques, los que se pueden considerar complementarios, sólo que apuntan a objetivos distintos: en el caso del VaR se busca medir en nivel de riesgo de un activo financiero o un proyecto, mientras que con las opciones reales se busca medir el valor de las flexibilidades que se

generan en razón de la existencia de aquellos niveles de riesgo.

Dado que el objetivo de este trabajo es medir riesgos en proyectos de embalses, la metodología propuesta y la aplicación están orientadas al cálculo del VaR de los proyectos, pero se incluye además una aplicación de opciones reales.

3. Fundamentos del VaR

El VaR o Value at Risk, es hoy una de las herramientas más utilizadas por los gerentes de Riesgo en la medición de riesgo de mercado. Su medición tiene fundamentos estadísticos y el estándar de la industria es calcular el VaR con un nivel de significancia de 5 %. Esto significa que solamente el 5 % de las veces, o 1 de 20 veces, es decir una vez al mes con datos diarios, el retorno del portafolio caerá más de lo que señala el VaR, en relación del retorno esperado.

Analíticamente el VaR (Joiron, 2004), se define por el límite superior de la integral de la función de los rendimientos esperados r (s).

$$E[r] - VaR = \int_{-\infty}^{-VaR} r(s) ds = \alpha \quad (1)$$

Usualmente se asume que el valor esperado de los rendimientos es cero, $E[r]=0$, con lo cual la solución a la expresión anterior se transforma en:

$$\int_{-\infty}^{-VaR} r(s) ds = \alpha$$

Una representación alternativa consiste en estimar el VaR como:

$$VaR = \alpha \sqrt{\sigma^2 \Delta t} \quad (2)$$

donde α es el factor que define el área de pérdida de los rendimientos, σ^2 la varianza de los rendimientos, y Δt el horizonte de tiempo para el cual se calculará el factor de riesgo VaR. Si el valor medio es distinto de cero, el VaR se puede medir de forma relativa al valor medio (Dowd, 1999).

La ecuación (2) representa el VaR del retorno de un activo. Si se busca el VaR del valor, en lugar del retorno, debe tenerse en cuenta que el valor V es igual al número de unidades de activo N multiplicado por el precio del mismo ($V=N*P$). Se puede verificar entonces que el cambio de valor $(V1 - V0) / V0 = \alpha \sqrt{\sigma^2 t}$, de donde se desprende que la ecuación (2) de los retornos, para el caso del VaR del valor de un activo, se transforma en:

$$VaR = V0 \alpha \sqrt{\sigma^2 t} \quad (3)$$

El riesgo total medido como VaR, corresponde entonces a la pérdida potencial máxima que puede ocurrir a causa de un evento riesgoso, con un determinado intervalo de confianza, y en un determinado horizonte de tiempo. Analíticamente, lo que se quiere es encontrar un VaR tal que:

$$P = Prob\{\Delta V \leq VaR\} \quad (4)$$

Donde V representa una función de valor tal como el valor presente de un activo.

3.1. Cálculo del VaR paramétrico de una cartera

Un portafolio (o un proyecto), está compuesto por posiciones activas y pasivas que son afectadas por factores de riesgo. Estas posiciones tienen un Value at Risk que depende de la volatilidad de los factores de riesgo que las afectan.

En teoría, los portafolios están contruidos de tal manera, que la relación entre los instrumentos que lo componen hacen que el riesgo agregado sea menor que la suma de los riesgos individuales (Markowitz, 1952). Por lo anterior, la contribución de cada posición al riesgo del portafolio depende de la relación entre los diferentes factores de riesgo que lo componen. Esta relación entre factores de riesgo puede ser medida a través del coeficiente de correlación (ρ).

Una vez determinada la correlación entre los diferentes factores de riesgo que componen el portafolio, se puede proceder a calcular el VaR diversificado. El Value at Risk de un portafolio puede estimarse como:

$$(VaR_{portafolio})^2 = \sum_{i=1}^n (VaR_i)^2 \rho_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n VaR_i VaR_j \rho_{ij} \quad (5)$$

donde:

n: número de factores de riesgo.

VaR_i : Value atRisk del factor de riesgo i.

ρ_{ij} : Correlación entre el factor de riesgo i y el factor de riesgo j.

$VaR_{portafolio}$: Value at Risk del portafolio que equivale a $\sqrt{(VaR_{portafolio})^2}$

Esta suma no sólo contiene los VaR individuales, los cuales están representados en el primer sumando, sino también todos los distintos productos cruzados representados por el segundo término. Para efectos de la aplicación a un embalse, para llegar a aplicar la ecuación (5) primero se han de calcular los VaR individuales de los factores de riesgo con la ecuación (2). En el caso particular de los precios de productos agrícolas, el Value at Risk se determina a partir de la desviación estándar de los precios de los productos, el valor

asociado a las ventas de dicho productos (equivalente al peso de un activo dentro de una cartera), y considerando un valor α de la distribución normal correspondiente a un 95 % de confianza.

3.2. Otras metodologías de cálculo de VaR: Simulación

Hay tres metodologías de cálculo de VaR que han adquirido mayor difusión:

La Simulación Histórica: Esta es una simulación simple, que requiere relativamente pocos supuestos respecto a las distribuciones estadísticas de los factores de riesgo. Para el caso de un activo consiste en ordenar los valores históricos de una variable (por ejemplo el retorno de una acción) y ordenarlos de menor a mayor para construir un histograma. Dicho histograma permite encontrar el valor que deja a la izquierda un 5 % de los casos (o un 1 % según el nivel de confianza que se desee para el VaR). Este método resulta difícil de aplicar al VPN de un proyecto, ya que se requerirían series históricas de VPN (que no existen) o calcular VPN para cada set de valores de las variables riesgosas (precios de los productos agrícolas), pero asumiendo que cada set de valores de las variables se mantiene constante en el horizonte de evaluación.

El Método Paramétrico de varianzas / covarianzas presentado en 3.1, está basado en el supuesto de que los factores de riesgo subyacentes en el mercado siguen una distribución normal multivariada.

El método de Simulación de Monte Carlo: tiene similitudes con la simulación histórica. En la de Monte Carlo los valores son obtenidos simulando mediante la generación aleatoria de valores de acuerdo a alguna función de distribución. En el caso de varios factores de riesgos, este método se basa en información suficiente sobre la distribución conjunta de estas variables. Entonces generando valores de acuerdo a esta distribución conjunta podemos generar un gran número de escenarios, y para cada uno de ellos calcular un VPN, de forma que un número elevado de escenarios nos permite obtener una buena aproximación a la distribución del VPN. El menor quintil (1 %, 5 % según el nivel de confianza) de esa distribución será la aproximación al VaR (Glasserman, P., Heidelberger P. and Shahabuddin.P. 2000).

Comparación entre las tres metodologías

Los métodos difieren en su potencial para capturar riesgos de opciones, o de activos semejantes a opciones (como las opciones reales). Difieren también en su facilidad de implementación, su facilidad para presentar y explicar resultados, la flexibilidad para analizar efectos de cambios de supuestos y por

último en la confiabilidad de los resultados. El mejor método podrá ser seleccionado entonces dependiendo de cuál de los aspectos anteriores importa más (Feria, 2005) (Jorion, 2004).

Los métodos de simulación trabajan bien independientemente de la presencia de opciones en los portafolios, porque en estos métodos se recalculan los valores de mercado para cada "jugada" de los factores básicos de mercado, incluyendo los valores implícitos de las opciones. En contraste, el método de varianzas-covarianzas (método paramétrico), funciona bien para instrumentos y portafolios con limitados contenidos de opciones, son menos capaces de capturar los riesgos de este tipo que los métodos de simulación. (Best, 1999). Tomando en cuenta que los proyectos de embalses tienen implícitas opciones (de cambio de cultivos por ejemplo), se considera más apropiada la simulación de Monte Carlo.

La simulación histórica y el método paramétrico de varianzas - covarianzas son más fáciles de implementar que la simulación de Monte Carlo. Los dos primeros requieren solo de datos históricos de las variables riesgosas. Ambos se pueden desarrollar sin mayor dificultad en un software utilitario básico como Excel.

La simulación de Monte Carlo requiere, además de los datos históricos, de un modelamiento computacional, de preferencia con algún software ad hoc para simulación o una programación para esos efectos (Matlab, Visual Basic, Macros sobre Excel, Risk, u otro). Adicionalmente Monte Carlo requiere simular la distribución conjunta de las variables riesgosas, para lo cual se requiere hacer descomposición de Cholesky lo cual nuevamente requiere softwares ad hoc o programación.

Un problema único de la simulación de Monte Carlo, es el hecho de que el modelador del sistema puede elegir la distribución de probabilidad de los factores de mercado, esta flexibilidad le permite hacer una mala elección.

Como síntesis del análisis comparativo anterior; se privilegiará por el mayor potencial de la simulación de Monte Carlo para capturar el valor de las opciones. Por tratarse de una investigación, son menos relevantes las desventajas que pueda tener el método en términos de su mayor dificultad de implementación y la mayor dificultad para presentar y explicar los resultados.

4. Pasos previos: análisis de sensibilidad y metodología

Como paso preliminar, se realizó un análisis de sensibilidad para identificar las variables relevantes a analizar. Estos análisis se realizaron para tres proyectos y se llegó a los siguientes resultados.

Proyecto Ancoa: La elasticidad a los precios es entre 5 y 6 veces mayor que la de la inversión, y entre 3 y 4 veces mayor que la elasticidad a la tasa de incorporación a riego.

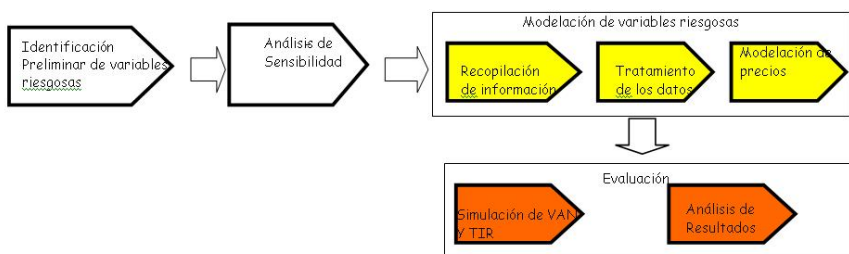
Proyecto Laja-Diguillín: La elasticidad a los precios es entre 6 y 10 veces mayor que la de la inversión, y aproximadamente 2 veces la de la tasa de incorporación a riego.

Proyecto Victoria de Vilcún: La elasticidad a los precios es aproximadamente 6 veces mayor que la de la inversión, y aproximadamente 4 la de la tasa de incorporación a riego.

Todos los resultados consistentemente muestran la importancia del conjunto de precios de productos agrícolas como variables de riesgo. No obstante lo anterior, se modelaron también los riesgos relativos a la inversión, pero teniendo presente que las variables más importantes de modelar son los precios ¹. El riesgo climático es relevante para la situación sin proyecto, pero su eliminación es justamente la fuente de beneficios y de disposición a pagar por parte de los agricultores (en la situación con proyecto), y por tanto el diferencial de riesgos queda capturado en el modelamiento agro-económico de la metodología de evaluación vigente. El riesgo climático no cubierto por el diseño del embalse, se puede considerar con la inclusión de eventos aleatorios de "Saltos" de Poisson (esta forma de modelar se incluye en el capítulo 7).

La figura describe la metodología propuesta para el método no paramétrico.

Figura 2: Diagrama de flujo del procedimiento de evaluación bajo incertidumbre.



Fuente: Elaboración propia

¹Cabe señalar, que por falta de datos, no se pudo sensibilizar con respecto a los rendimientos de los terrenos (los que a su vez dependen del clima).

En el punto siguiente se describe el modelamiento de los precios. Para el análisis de los puntos de recopilación de información y tratamiento de datos, ver Contreras (2008).

5. Aplicación de la metodología propuesta

5.1. Procesos de precios

Para modelar precios de acciones y commodities en los métodos de simulación se supone (entre otros modelos) que los precios siguen un Proceso de Wiener generalizado (Vilariño, 2001) (Joiron, 2004) (Feria, 2005), esto es, que tiene un drift constante μ y una varianza constante σ^2 , en la práctica se supone que el drift y la varianza sean una proporción del precio S , de aquí se puede mostrar entonces el modelo de comportamiento de precios conocido como Movimiento Browniano Geométrico a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu[t, S(t)]dt + \sigma[t, S(t)]dW_t \quad (6)$$

donde $dS(t)$ representa el cambio en los precios, S , en un intervalo pequeño de tiempo, dt , $dW_t = \xi \sqrt{t}$ (proceso de Gauss- Wiener, con $\xi \sim N(0,1)$), luego la ecuación anterior esta normalmente distribuida con media μdt y desviación estándar $\sigma \sqrt{t}$. En otras palabras,

$$\frac{dS(t)}{dt} \rightarrow \phi(\mu dt, \sigma \sqrt{dt}) \quad (7)$$

Ahora supongamos que el precio S , sigue un proceso de Ito (Lamothe y Pérez Somalo, 2004), se demuestra (elevando ambos términos de (6) al cuadrado y en función de la tabla de multiplicación aplicable a las integrales estocásticas) que:

$$dG = \left(\frac{dG}{dS} \mu S + \frac{dG}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2G}{dS^2} S^2 \sigma^2 \right) dt + \frac{dG}{dS} \sigma S dW \quad (8)$$

Se deriva entonces el proceso seguido por $\ln(S)$ (el logaritmo natural del precio) utilizando el lema de Ito. Sea $G = \ln S$, luego

$$\frac{dG}{dS} = \frac{1}{S} \quad \frac{d^2G}{dS^2} = -\frac{1}{S^2} \quad \frac{dG}{dt} = 0$$

Reemplazando los términos en el proceso seguido por G , se llega a:

$$dG = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW \quad (9)$$

Reemplazando en la última ecuación dG por $d\ln(S)$, se llega a:

$$dLn(S) = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW \quad (10)$$

Por lo tanto para modelar los precios, se debiera considerar esta distribución, es decir:

$$LnS_T \sim \phi[LnS + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}] \quad (11)$$

donde $\phi(m, s)$ denota una distribución normal con media m y desviación estándar σ . Esta expresión se puede discretizar (Vilariño, 2001) como:

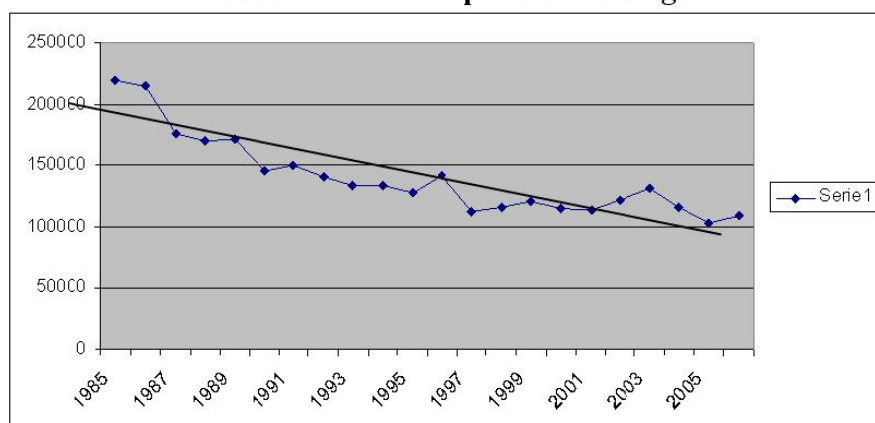
$$LnS_T = [LnS + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi] \quad (12)$$

En lo que respecta a modelos de volatilidad, Brooks y Persans (2002) indican que Alexander y Leigh (1997) examinaron, modelos GARCH, modelos EWMA y modelos de promedios de pesos similares (sin darle mayor peso al reciente), encontrando como resultado que éste último resulta superior a los otros dos, este método de promedio simple es el utilizado en este trabajo.

Se elige el modelo de movimiento browniano geométrico, principalmente por su mayor simplicidad, y en segundo lugar porque los precios históricos mayoritariamente siguen una tendencia. A modo de ejemplo, a continuación se presentan la serie de precios del trigo. La existencia de estas tendencias sugiere que este modelamiento es mejor que el de modelos sin drift como el de Ornstein y Uhlenbeck (descrito en Ergashev, 2002) de reversión a la media sin tendencia o las series de tiempo de ruido blanco”, aunque se podrían considerar también modelos de reversión a la media con tendencia, si bien estos últimos son más complejos de implementar².

Existen desde luego modelos alternativos para precios de comodites. Por ejemplo Engel y Valdés (2002) concluyen que modelos AR (1) simples y de camino aleatorio, son más precisos para el mediano plazo (hasta 5 años, no hacen el análisis para periodos superiores a 5 años) en el caso de precios de comodities, que modelos más complejos (modelos AR(1) con coeficientes estocásticos estimados mediante el filtro de Kalman). Un modelo de movimiento browniano, es un modelo de camino aleatorio continuo en logaritmos (Metcalf y Hasset, 1995), y en ese sentido los resultados de Engel y Valdés sugieren la conveniencia de usar un modelo como el de la ecuación (12) en el corto plazo, pero como se señala más adelante, en el largo plazo se espera que los precios converjan hacia algún precio de equilibrio (el costo marginal si el mercado es competitivo). Una alternativa se puede ver en Lamothe y Otero (2003), que

²Se agradece al profesor José Miguel Cruz, del Departamento de Ingeniería Industrial, por sus aportes en este análisis de procesos con o sin reversión a la media en el caso de precios de productos agrícolas.

Gráfico 1: Serie de precios del Trigo

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de ODEPA

aplican un proceso de Metcalf & Hasset (en lugar del movimiento browniano geométrico) con tendencia y reversión a la media.

Más allá de este análisis teórico, se realizaron análisis estadísticos a las series de precios. Antes de realizar los test de raíz unitaria, es conveniente inspeccionar los correlogramas de las series. Los cuadros construidos (Contreras, 2008) permitieron apreciar que en todos los casos, las autocorrelaciones caen muy lentamente en el tiempo. Por otra parte, para varias de las series, el primer coeficiente de autocorrelación parcial es alto (mayor que 0.7), siendo los coeficientes restantes cercanos a cero, ello es indicativo de la potencial presencia de una raíz unitaria, lo que a su vez probaría que los precios siguen un camino aleatorio con drift y que por ende los retornos logarítmicos siguen un proceso browniano geométrico.

El próximo paso consiste en llevar a cabo test de raíces unitarias para cada serie (Fernández, 2007), a fin de verificar las conjeturas anteriores. De acuerdo a tests de Dickey-Fuller aumentados (ADF), en todos los casos (exceptuando la serie de la palta), no rechazamos H_0 (presencia de una raíz unitaria) al 99 por ciento de confianza. Se aplicó el test de Dickey y Fuller aumentado (ADF) mediante el uso de E-views. Por lo tanto, se puede afirmar que empíricamente no se observa la reversión, aún cuando teóricamente debería estar en el largo plazo.

En efecto, los movimientos brownianos tienden a alejarse de sus valores iniciales, lo cual es apropiado para algunas variables como los precios de los activos especulativos pero, en otros casos, aunque los valores de corto plazo se muevan aleatoriamente, en largo plazo tienden a ajustarse hacia promedios históricos o a precios de equilibrio (Villalpando, 2007). En estos casos, se dice que la variable sigue un proceso de reversión hacia la media.

Como ya se ha dicho, por simplicidad se trabajará con modelos de procesos

brownianos, aún cuando en la práctica las volatilidades (con reversión a la media), debieran ser menores que las estimadas con el modelo seleccionado. Para ilustrar lo anterior, se han realizado dos simulaciones de precios para productos del valle de La Ligua, se seleccionaron cinco productos: palta, maíz, porotos granados, naranjas, mandarinas y limones. Con los precios de estos productos se construyó una cartera (en la que cada producto "pesa" según su porcentaje de contribución al margen) y se simularon precios futuros a 20 años para finalmente calcular un valor presente de los precios simulados con procesos brownianos y con procesos con reversión. Para este último se estimaron coeficientes de reversión a la media mediante regresiones de mínimos cuadrados, y se consideró que los precios de equilibrio de largo plazo eran los precios promedio históricos de cada producto.

Tabla 1: Comparación procesos estocásticos con y sin reversión a la media.

Nombre de hoja de resultados	Reversión a la Media
Número de variables simuladas	5
Número de Iteraciones	100
Media	586.993927
Desviación Estandar	167.0213067
Varianza	27896.11689
Valor Mínimo	\$ 435.21
Valor Máximo	\$ 1,385.81

Nombre de hoja de resultados	Proceso Browniano
Número de variables simuladas	5
Número de Iteraciones	100
Media	340.652515
Desviación Estandar	251.5801141
Varianza	63292.5538
Valor Mínimo	\$ 138.48
Valor Máximo	\$ 1,530.03

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 1 se observa que efectivamente el proceso browniano estima una volatilidad mayor³. Debe tenerse en cuenta que esta diferencia no es necesariamente la que podría observarse en las aplicaciones a proyectos que se presentan más adelante, ya que en esos casos se simularán más productos, y estas simulaciones se aplicarán tanto a los precios de los productos en la situación con proyecto, como a los de la situación sin proyecto, además de que se consideran riesgos en otras variables.

En lo sucesivo se trabajará con procesos brownianos, tomando en cuenta: su mayor facilidad de implementación (y por ende de adopción por parte de los tomadores de decisiones), el respaldo empírico de los test de raíces unitarias,

³Además estima una media menor, ya que considera la tendencias (todas negativas excepto la del limón), sin que estas reviertan a una media de largo plazo, es decir, sin que se frenen esas tendencias.

y el hecho de que se trabajará con valores presentes, indicador con el cual los flujos en los que se generan las mayores discrepancias entre ambos modelos, son los que pesan menos en valor actual, aminorando así la diferencia.

En un trabajo conjunto con la Dirección de Obras Hidráulicas del Ministerio de Obras Públicas, se hicieron simulaciones para las rentabilidades de varios proyectos de embalses: Ancoa, Laja, Diguillín, Victoria de Vilcún, Ligua y Petorca (estos dos últimos son los que se presentan en el punto siguiente). Adicionalmente se analizaron los proyectos Quino y Traiguén, para calibrar los modelos. En varios de estos proyectos se modeló además el sobre costo o sobre plazo de la inversión

5.2. Aplicación de la metodología no paramétrica al proyecto Ligua - Petorca

Se desarrolló un programa en Visual Basic (Carmona, 2007), que tomaba como Input las planillas de evaluación del modelo determinístico (Ayala y Cabrera, 2007). Con este programa se modelaron los precios para los cultivos. Una alternativa habría sido modelar directamente la variabilidad de los flujos de caja (la idea de Cash Flow at Risk, de Stein, Usher y otros, 2001), pero como a la fecha no existen proyectos concesionados de riego, no se cuenta con la información histórica necesaria.

Para estudiar el nivel de efectividad del modelamiento, y de su valor predictivo, se tomará como historia (input) 25 años y se estimarán los siguientes 5 años. Como se posee registro sobre los últimos 30 años, se calculan errores medios de los 5 últimos años comparando la serie de valores reales versus los estimados.

Para los resultados obtenidos con 10.000 iteraciones, se realizaron los Test RMSE, MAE, MAPE y Thail Inequality Coefficient, comparando los modelos con y sin correlación, y la estimación determinística basada en el promedio simple de los 20 primeros años como pronóstico de los seis siguientes.

Tabla 2.- Test de pronósticos.

TEST DE PRONÓSTICOS	10.000 simulaciones			
	Precios Cultivos	no correl	correl	Promedio (20 y)
RMSE		5660.6503	5623.1371	15404.9892
MAE		55.0804	54.9272	97.0281
MAPE		10.5020	10.4654	35.1131
Thail Inequality Coefficient		0.0525	0.0521	0.1224

Fuente: Elaboración propia

Se puede apreciar que los modelos con y sin correlación superan a la estimación determinística en todos los Test (errores menores que la estimación determinística) siendo siempre el modelo con correlación algo más preciso que el sin correlación. El Thail Inequality Coefficient, mide el ajuste, de forma que

el valor cero implica ajuste perfecto, y el valor uno implica un pésimo ajuste. Se validan así los modelos desarrollados, al menos en el horizonte de 5 años.

Modelo Estocástico para Ligua y Petorca

El modelo se construyó sobre la planilla elaborada por el equipo consultor de Ayala y Cabrera, en particular para todos los datos determinísticos no modelados (fundamentalmente costos) se asume que los valores de dichas planillas son correctos. De esa fuente se tomaron los costos de Inversión, control de heladas, costos de impulsión, costos de riego y gastos indirectos.

Con estos datos se obtuvo un VPN determinístico para Ligua de 15,921 millones y para Petorca de 36,782 millones. A priori esta evaluación debiese diferir de la que se haga mediante simulación, ya que las proyecciones de precios de productos agrícolas de Ayala y Cabrera no consideran ninguna tendencia de precios.

Para generar VaR por simulación, es importante mencionar que no todos los cultivos poseían precios históricos para el periodo de análisis. Por tanto, se seleccionaron los siguientes: chirimoya, mandarina, papaya, cebada, maíz, trigo, ají, choclo, poroto, porotos verdes, tomate, arveja, palta, lechuga, naranja, limón, lúcuma.

La tasa de descuento utilizada en la valoración, y en las sucesivas valoraciones en este trabajo, es la tasa libre de riesgo relevante para Chile (4,5 %). La determinación de esta tasa está tomada de las estimaciones de Cartes, Contreras y Cruz (2005)

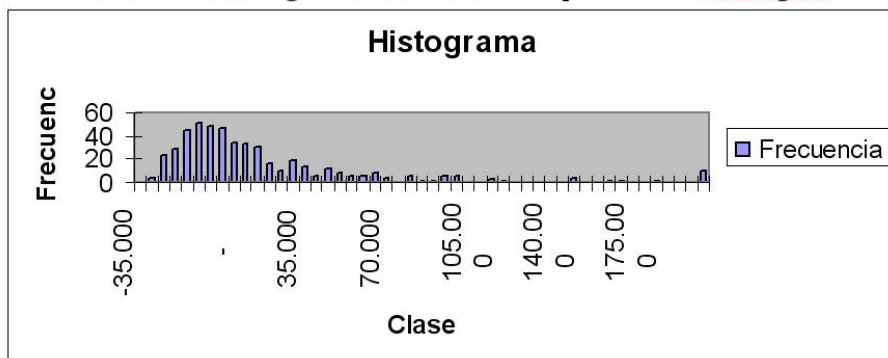
Ahora bien, la simulación estática implicaría el supuesto poco realista de que se produce y se comercializan cultivos aún con márgenes negativos. Corrigiendo esto, es decir, no permitiendo márgenes negativos (lo que equivale a trabajar con un enfoque de valoración de opciones reales), se obtienen los resultados siguientes:

El valor esperado del VPN resultó \$19.610.000.000, y el VaR con 95 % de confianza es de -\$27.000.000.000, y la probabilidad de VPN negativo es de 39,8 %. Si se consideran los Earnings at Risk (EaR), es decir, el mejor 5 %, este da un valor de +110.000.000.000. La tabla de frecuencias transformada en histograma, se presenta a continuación:

En el caso del proyecto Petorca, se obtuvo un VPN esperado de 26.430. Además del valor esperado se observa que el VaR con el 95 % de confianza es de (aproximadamente) -\$47.000.000.000, y que la probabilidad de obtener VPN negativo es de 49,8 %. El EaR es de +\$180.000.000.000.

Los procesos de precios por tener tendencias negativas disminuyen la rentabilidad en relación a la evaluación determinística, mientras que las opciones reales tienden a aumentar la rentabilidad, el efecto neto termina siendo en el caso de Petorca una disminución de rentabilidad esperada del modelo no paramétrico en relación al estudio determinístico, y en el caso de la Ligua se calcula una mayor rentabilidad en valor esperado respecto a la calculada bajo el enfoque

Gráfico 2: Histograma del VPN con opciones de La Ligua.



Fuente: Elaboración propia

determinístico.

Se pudo determinar la existencia de probabilidades de VPN negativo distintas de cero, lo cual constituye información valiosa para la toma de decisiones.

5.3. Estimación del VaR paramétrico para Ligua

En la estimación paramétrica que se presenta a continuación, a priori se espera algún sesgo negativo en cuanto a riesgo respecto al modelo no paramétrico, ya que el modelo paramétrico no captura las opciones. Por esa razón se espera que el VaR paramétrico sea mayor, dado que el VaR no paramétrico incluye flexibilidades que desplazan el VaR hacia la derecha de la distribución, haciendo asimétrico el histograma del VPN.

Para poder desarrollar el modelo paramétrico se requiere la matriz de correlaciones de los productos. Esta matriz (que denominaremos B) se presenta en la página siguiente. Para obtener los pesos de cada tipo de cultivo dentro del total de predios de la cuenca, se utilizaron las fichas de cultivos construidas a partir de las encuestas y el trabajo de terreno del estudio de Ayala y Cabrera. Los datos de volatilidades utilizados en el método paramétrico son los mismos que se usaron en el método no paramétrico. Estas volatilidades se presentan ya ponderadas por los pesos de cada producto en la cartera en la tabla 4 (le denominamos Vector A).

A continuación se calcula el vector C (producto de A por la matriz de correlaciones) y por último se multiplica este vector C por el vector A traspuesto (A') y se obtiene así el valor del riesgo de la cartera de productos agrícolas: 5,85 %. La desviación estándar (Riesgo) por tanto resulta ser la raíz del valor anterior, que arroja un resultado de 24,23 %.

Si se tratara de matrices de dos por dos, el modelo que se está construyendo sería el siguiente:

Donde la matriz B corresponde a la de correlaciones y el vector A es del

$$\text{Riesgo} = [w \cdot \sigma_1 \quad (1-w) \cdot \sigma_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \cdot \sigma_1 \\ (1-w) \cdot \sigma_2 \end{bmatrix} = w^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho \quad (13)$$

de riesgos ponderados por pesos.

Tabla 3: Matriz de correlaciones

Matriz B: Correlaciones																		
	Chico	Arveja Verde	Tomato	Oboda	Chilimeño	Machucos	Lechuga	Limon	Lucuma	Miso	Banaja	Papa	Poroto Chino	Poroto Verde	Tajo	Aji	Papa	
Chico	100.00%	-19.71%	38.30%	-1.70%	-45.92%	-16.71%	2.80%	-19.87%	9.30%	-3.12%	-5.30%	-5.80%	26.90%	-49.87%	25.57%	21.94%	37.12%	-44.57%
Arveja Verde	-19.71%	100.00%	-18.19%	10.67%	40.46%	-26.44%	19.24%	-5.37%	-2.01%	0.12%	7.83%	-29.97%	16.46%	5.86%	-1.96%	-1.96%	-17.67%	-21.74%
Tomato	38.30%	-18.19%	100.00%	-10.76%	-55.30%	-12.81%	5.16%	-11.88%	11.75%	-6.33%	-13.21%	-6.33%	30.12%	44.55%	47.52%	14.36%	32.25%	13.49%
Oboda	-1.70%	10.67%	-10.76%	100.00%	9.40%	-14.13%	11.30%	-0.02%	-0.02%	14.41%	-3.76%	3.66%	-0.60%	-10.37%	5.30%	-4.82%	-19.47%	-1.27%
Chilimeño	-45.92%	40.46%	-55.30%	9.40%	100.00%	6.82%	3.06%	-20.75%	-12.92%	-8.90%	8.74%	5.52%	-45.31%	-13.36%	-45.64%	-28.72%	-44.93%	-5.30%
Machucos	-16.71%	-26.44%	-12.81%	-14.13%	6.82%	100.00%	-35.24%	10.46%	-1.73%	-17.09%	4.50%	1.36%	-1.21%	-7.29%	-11.81%	-1.65%	-20.18%	-14.13%
Lechuga	2.80%	19.24%	5.16%	11.30%	3.06%	-35.24%	100.00%	-2.44%	8.91%	15.77%	-9.76%	-6.96%	-2.83%	-2.05%	0.96%	4.14%	2.06%	-11.05%
Limon	-19.87%	-5.37%	-11.88%	-0.02%	-20.75%	10.46%	-2.44%	100.00%	7.62%	-3.87%	2.29%	-5.40%	-4.74%	-2.28%	-25.81%	-10.80%	-8.40%	0.02%
Lucuma	9.30%	-2.01%	11.75%	-0.02%	-12.92%	-1.73%	8.91%	7.62%	100.00%	4.23%	-1.25%	-13.86%	-0.22%	12.45%	8.86%	8.83%	19.75%	-19.90%
Miso	-3.12%	0.12%	-6.33%	14.41%	-8.90%	-17.09%	15.77%	-3.87%	4.23%	100.00%	-11.77%	7.86%	5.52%	-14.48%	3.60%	2.82%	-1.27%	-14.97%
Banaja	-5.30%	7.83%	-13.21%	-3.76%	3.76%	4.30%	9.30%	2.29%	-1.25%	-11.77%	100.00%	4.73%	9.04%	-7.60%	-1.36%	-4.75%	-9.04%	3.75%
Papa	-5.80%	-29.97%	6.33%	3.66%	5.52%	-1.36%	-6.96%	-2.83%	-12.88%	7.86%	4.75%	100.00%	-5.00%	-14.80%	2.82%	0.28%	-5.57%	-5.40%
Papa	26.90%	-29.97%	30.12%	0.65%	-43.31%	-1.21%	-2.83%	-4.74%	0.28%	5.52%	9.04%	-5.00%	100.00%	41.33%	26.52%	30.46%	6.40%	
Poroto Chino	-49.87%	16.46%	47.52%	-10.37%	-12.36%	-7.29%	-2.83%	-2.28%	12.45%	-14.48%	-3.60%	-14.80%	4.23%	100.00%	58.24%	30.24%	21.60%	23.35%
Poroto Verde	25.57%	-1.96%	47.52%	5.30%	-45.64%	-11.81%	0.96%	-2.81%	-8.86%	-3.60%	-1.89%	-2.28%	26.52%	58.24%	100.00%	27.40%	44.99%	-13.79%
Tajo	21.94%	-1.96%	14.36%	4.82%	-28.72%	-1.65%	4.14%	-10.80%	8.83%	9.82%	-4.75%	0.28%	8.24%	30.24%	27.40%	100.00%	16.33%	-3.82%
Aji	37.12%	-17.67%	13.49%	-19.47%	-44.93%	-20.18%	2.06%	-8.40%	19.75%	1.37%	20.46%	-6.57%	26.46%	22.60%	44.99%	16.33%	100.00%	-11.40%
Papa	-44.57%	-21.74%	13.49%	-1.27%	-5.30%	-14.13%	-13.88%	0.02%	-19.90%	-14.97%	-9.04%	-5.40%	-4.75%	-23.55%	-14.80%	-3.82%	-11.40%	100.00%

Fuente: Elaboración propia a partir de series de precios de ODEPA.

Se deben multiplicar los pesos (obtenidos a partir de las estructuras de cultivos) por los riesgos individuales, de esta forma se obtiene el vector A:

Tabla 4: Riesgos ponderados por pesos en La Liga.

Riesgo ponderado por pesos	Chico	Arveja Verde	Tomato	Oboda	Chilimeño	Machucos	Lechuga	Limon	Lucuma	Miso	Banaja	Papa	Poroto Chino	Poroto Verde	Tajo	Aji	Papa	
Vector A	1.007%	1.069%	0.783%	0.273%	0.707%	1.066%	0.419%	2.141%	0.069%	0.418%	0.385%	24.091%	2.907%	2.609%	0.644%	0.246%	0.285%	1.067%

Fuente: Elaboración propia.

Se obtuvo un riesgo (varianza) de la cartera de productos agrícolas de 5,85%. La desviación estándar por tanto resulta ser la raíz del valor anterior, que arroja un resultado de 24,23%. Finalmente, se calcula el VaR, fijando el valor esperado del VPN en 19.610 (ver Tabla 5), que es el valor obtenido mediante la simulación, para ese valor se despeja el valor actualizado de los beneficios netos (descontando la inversión actualizada) y sobre ese monto se aplica la variabilidad determinada para la cartera. Se obtuvo un VaR de \$141.028. El valor anterior corresponde al VaR relativo, es decir, la pérdida con respecto al valor esperado. En términos absolutos, el VaR es de -\$121.418.

Tabla 5: Cálculo del VaR en La Liga

Parámetro 5%	-1.6449	←	→	5.00%
Parámetro 95%	1.6449	←	→	95.00%
	Rentabilidades		Resultados	VaR
Límite Alto	54.28%		\$ 160,638.33	\$ 141,028
Límite Medio	14.42%		\$ 19,610.00	-
Límite Bajo	-25.43%		-\$ 121,418.33	\$ 141,028

Fuente: Elaboración propia.

Se obtiene un VaR considerablemente menor que el obtenido mediante

el método no paramétrico (-\$27.000). La probabilidad de VPN negativo resultó 41 % (el percentil en el que el VPN es aproximadamente igual a cero), este valor se compara con una probabilidad de VPN negativo de 39,8 % obtenida mediante el método no paramétrico.

Como se anticipaba, la medida de riesgo es mayor con el método paramétrico. Este sesgo tiene que ver con la no valoración de las opciones reales en este modelo. No deben haber diferencias por las tendencias en los precios, ya que estas están implícitas en la valoración paramétrica por que se tomó como VPN esperado el que se obtuvo mediante el método no paramétrico. De hecho esto se hizo justamente para centrar el análisis comparativo en la medición de riesgos (y no en la medición de rentabilidades).

6. Calibración del modelo no paramétrico

Para validar el método, se aplicó el modelo a tres proyectos antiguos: Victoria de Vilcún, Quino y Traiguén. Esto permite simular los procesos de precios con la información disponible hasta el momento en que se evaluaron esos proyectos años atrás, y luego contrastar los VPNs esperados (ex ante) según la simulación del modelo, con el VPN real ex post que se obtiene de reevaluar el proyecto con los precios reales observados.

A continuación se presentan los resultados para Quino y Traiguén (la Tabla 9, incluye también Victoria de Vilcún). Se comparan los resultados de las evaluaciones de 1991 (Figuerola y otros, 1993), con las simulaciones del modelo y con los VAN ex post calculados con precios de los cultivos en el período 1991-2006. Se trabajó con cifras en millones de \$ de 1991. Considerando los cambios de precios reales entre 1991 y 2006 (se toma como base 1992 para hacer los resultados comparables con los del modelo determinístico), el VPN ex post de Traiguén fue de \$430 millones y el de Quino fue de -\$1056 millones. Mientras que los resultados de las simulaciones fueron:

Tabla 5: Cálculo del VaR en La Liga

<i>Parámetro 5%</i>	-1.6449	←→	5.00%
<i>Parámetro 95%</i>	1.6449	←→	95.00%
	<i>Rentabilidades</i>	<i>Resultados</i>	<i>VaR</i>
<i>Límite Alto</i>	54.28%	\$ 160,638.33	\$ 141,028
<i>Límite Medio</i>	14.42%	\$ 19,610.00	-
<i>Límite Bajo</i>	-25.43%	-\$ 121,418.33	\$ 141,028

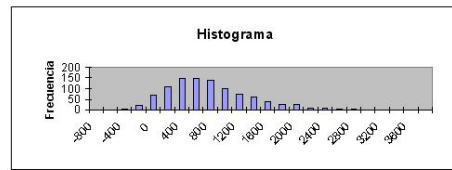
Fuente: Elaboración propia.

Para los dos proyectos los resultados ex post se encuentran dentro del his-

Tabla 7: Resultados simulación del VPN para Traiguén (millones de \$)

Media	692
Desviación estándar	604
Mínimo	-534
Máximo	3541

Gráfico 4: Histograma para Traiguén.



Fuente: Elaboración propia.

tograma y la media de estas simulaciones es más similar al valor ex post que el valor determinístico (ver resumen en Tabla 9). Se confirman que la evaluación ex post entrega resultados que se asemejan más a los del modelo que las evaluaciones determinísticas previas. Con los resultados de estas calibraciones del modelo en los respectivos proyectos presentados, se considera validada la metodología no paramétrica y se valida la hipótesis de que se pueden estimar los riesgos de proyectos de embalses mediante modelos basados en VaR.

Tabla 9: Resumen de resultados de la calibración (Miles de \$ ó US):

Proyecto	VPN det.	VPN simulado	VPN ex post	VaR simulado
Victoria de Vilcún	U\$13.085	U\$12.210	U\$11.558	U\$8.000
Quino	-\$686.000	-\$860.000	-\$1.056.000	-\$1.471.000
Traiguén	\$923.000	\$692.000	\$430.000	-\$123.000

Fuente: Elaboración propia.

Una extensión del modelo: versión "jump-diffusion":

Se realizaron simulaciones adicionales (no presentadas en este documento) con un modelamientos de procesos incluyendo saltos por eventos extremos. En el caso de proyectos de embalses para riego, se pueden considerar como eventos o caídas no consideradas en el Movimiento Browniano Geométrico, situaciones extremas de eventos climáticos (los embalses garantizan seguridad sólo en 85 de cada 100 años) como sequías prolongadas que afecten la disponibilidad de agua o inundaciones y rebalses que afecten las cosechas, también se podría tratar de cataclismos que dañen el embalse o las vías de transporte y comercialización de los cultivos. El proceso estocástico del logaritmo de los ingresos S es en este caso (Villamil, 2006):

$$dLn(S) = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW + Ln(J)dq \quad (14)$$

Donde dq toma valores 1 ó 0 con probabilidades λdt y $(1-\lambda)dt$. (proceso de Poisson). Esta es una versión "jump-diffusion" de Itô. Los resultados obtenidos con este modelamiento fueron aún mejores que los del modelo paramétrico presentados en la tabla 9.

7. Conclusiones

7.1. Objetivos, hipótesis y conclusiones finales

En relación a los objetivos iniciales de la investigación: Desarrollar una metodología de medición de rentabilidades y riesgos, basada en VaR, que permita realizar comparaciones entre proyectos del sector riego, y aplicar dicha metodología a proyectos de embalses, estos objetivos se cumplieron satisfactoriamente. La concreción de los objetivos anteriores permitió validar la hipótesis: se pueden estimar los riesgos de proyectos de embalses mediante modelos basados en VaR, en particular aquellos no paramétricos, que vía simulación de Monte Carlo permiten incluir además las opciones.

Respecto a la aplicabilidad del análisis de riesgo a proyectos de riego, las evaluaciones presentadas demuestran que la metodología propuesta con análisis de sensibilidad, el análisis probabilístico como marco teórico y la simulación como método práctico, es perfectamente aplicable, se comprobó además que parte importante de la información necesaria para la aplicación de la metodología está disponible y es pública (en particular los precios de productos agrícolas) y que en consecuencia es factible aplicar un enfoque no paramétrico de Value at Risk.

La metodología se calibró con los proyectos Victoria de Vilcún, Quino y Traiguén, obteniéndose muy buenos resultados predictivos, en el sentido de que la evaluación ex post entrega resultados que se asemejan más a los del modelo que las evaluaciones determinísticas previas. Con los resultados de estas calibraciones del modelo, se considera validada la metodología no paramétrica desarrollada la hipótesis de la investigación.

Se puede aseverar que los resultados obtenidos muestran que las herramientas de análisis de riesgo aportan valor a la evaluación de proyectos: tanto en la aplicación a los proyectos Ligua y Petorca, como en los proyectos Quino y Traiguén, se pudo determinar la existencia de probabilidades de VPN negativo distintas de cero, lo cual constituye información valiosa para la toma de decisiones ⁴.

La metodología y el modelo programado permiten además de cuantificar el Value at Risk (VaR) del proyecto, realizar una aplicación aproximada de opciones reales para valorizar la flexibilidad de abandonar los cultivos si los escenarios son demasiado desfavorables. Los resultados anteriores, permitirán una mejor priorización de proyectos. En efecto, si se generaliza la estimación de

⁴Este resultado también se verificó en el proyecto Ancoa (Contreras, 2008), que no se incluyó en este documento.

este tipo de métricas, será posible jerarquizar con más criterios: para proyectos de VPN similares, será posible discriminar según probabilidad de perder, VaR, intervalo de confianza, o una combinación de esos criterios. Estos nuevos criterios (actualmente las decisiones se toman basadas sólo en VPN) permitirán mejorar además el proceso de toma de decisiones de concesionar o no una obra de embalse.

Se comprobó que la medida de riesgo es mayor con VaR paramétrico. Este sesgo tiene que ver con la no valoración de las opciones reales que sí se consideran en el modelo no paramétrico. Dado que la aplicación paramétrica tomó como base los valores esperados del VPN de modelo no paramétrico, se puede afirmar que en el análisis comparativo las diferencias radican en la medición de riesgos (y no en la medición de rentabilidades).

Por último, se desarrolló un modelo de simulación (no paramétrico) que incluyó saltos de Poisson para capturar los efectos de eventos climáticos catastróficos. De acuerdo a los que se esperaba, los valores del VPN esperado y del VaR disminuyeron. Cabe señalar que en los dos proyectos analizados el modelo no paramétrico con eventos catastróficos (denominado modelo extendido) entregó resultados más cercanos al VPN ex post.

7.2. Nuevas líneas de investigación

Respecto a los pasos futuros, se puede mejorar un análisis que sólo se pudo desarrollar parcialmente en este estudio: la aplicación de opciones reales. Este último enfoque no fue posible de aplicarlo en forma rigurosa por falta de información respecto a la flexibilidad operacional que pudiera ser más interesante para proyectos de riego: la de cambiar la estructura de cultivos dependiendo de la evolución de los precios de los productos. No se contaba con información como para hacer esa valoración. En sustitución, se realizó un ejercicio valorando la opción de sustituir por cultivos que entregaran $VPN = 0$.

En lo que respecta al modelamiento de precios, dada la existencia de tendencias en los retornos de los precios, se podría explorar la alternativa de la aplicación de un proceso de Metcalf & Hassett (en lugar del movimiento browniano geométrico) que considera también tendencia y además reversión a la media. Adicionalmente, se puede modelar la evolución de los parámetros μ y σ a lo largo del tiempo (tratados entonces como μt y σt), con coeficientes de reversión a la media para dichos parámetros, y modelando procesos para estas variables en los primeros años del horizonte de evaluación. Por lo tanto una línea completa de investigación puede pasar por el análisis de procesos tipo Metcalf y Hassett, o modelos como los de Schwartz y Moon (2001).

Por último, una línea complementaria de investigación, consiste en determinar la estructura óptima de cultivos con modelos de portafolio (Markowitz, 1952). En esta investigación se trabajó con las actuales estructuras de cultivos

(obtenidas de estudios de consultores que levantan dicha información con encuestas y trabajo de terreno), la alternativa es estimar una estructura óptima según rentabilidad y riesgo, a la cual los agricultores podrían tender en el futuro si se mantuviesen los niveles de riesgo y rentabilidad (o la que tendrían con los niveles de riesgo y rentabilidad estimados según los procesos).

Referencias

- [1] Alessi, G. (2005) Value at Risk (VaR) in Real Options analysis. Università degli Studi - LÁquila. Facoltà di Economia. Dip. di Sistemi ed Istituzioni per l'Économia.
- [2] Ayala y Cabrera (2007) Estudio de Factibilidad Habilitación La Ligua -Petorca, Informe Técnico.
- [3] Best P. (1999). Implementing Value at Risk. John Wiley & Sons Ltd.
- [4] Blanck Leland y Tarquin Anthony.(1998) Ingeniería Económica. 3a. ed. McGraw Hill.
- [5] Carmona, S. (2007) Cuantificación del efecto de la incertidumbre de precios de cultivos en la evaluación económica de un proyecto de riego. Memoria de título de Ingeniero Civil Industrial. Universidad de Chile.
- [6] Cartes, Contreras y Cruz (2005) La Tasa Social de Descuento en Chile. Documentos de Trabajo. Serie de Gestión. N°77. Departamento de Ing. Industrial. Universidad de Chile.
- [7] Contreras E, y Fernández V. (2003). Una nueva metodología para la evaluación de proyectos de inversión: Las Opciones Reales. Revista de Ingeniería de Sistemas. Volumen XVII, Número 1, Julio de 2003.
- [8] Contreras E (2008) Aplicación de metodologías basadas en VaR para el análisis de riesgo en proyectos de embalses. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid.
- [9] Dowd K. (1999) Beyond Value at Risk - The new science of risk management. John Wiley & Sons Ltd. Reprinted January 1999.
- [10] Embrechts, P. H"oing, A. Juri A. (2002) Using Copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks. Department of Mathematics ETHZ, CH-8092 Zurich, Switzerland.

- [11] Engel y Valdés (2002) Prediciendo el precio del cobre: ¿Más allá del camino aleatorio?.En Dilemas y Debates en torno al cobre. Dolmen.(Patricio Meller editor)
- [12] Ergashev, B. (2002) A note on a generalized Black-Sholes formula. Department of Economics. Elliot Hall Campus.
- [13] Feria, J.M. (2005) El riesgo de Mercado: su medición y control. España. Delta Publicaciones.
- [14] Fernández V. (2007), Procesos no Estacionarios, Apuntes del curso IN72W, Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile.
- [15] Figueroa G, Muñoz V et al (1993) .Regadío Canal Victoria - Traiguén - Lautaro” Programa de Adiestramiento en preparación y evaluación de proyectos, Santiago - Chile. Insituto de Economía. Pontificia Universidad Católica.
- [16] Glasserman, Paul, Heidelberger Philip and Shahabuddi Perwez. (2000) Efficient Monte Carlo methods for value-at-risk.
- [17] Jorion P. (2004) Value at Risk: el nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados. Editorial Limusa. México 2004.
- [18] Lamothe Prosper y Otero Jorge (2003) Garantías de Valor Residual en la Industria Aeronáutica:Un Enfoque de Valoración Basado en Opciones Reales. Universidad Autónoma de Madrid.
- [19] Lamothe P. y Pérez Somalo (2004). Opciones Financieras y Productos Estructurados España. Mc Graw Hill. Segunda Edición.
- [20] Longerstae J. & Zangar P, Market risk research group at JP Morgan, (1995) .^A transparent tool”, Market Risk, Vol. 8, N° 1.
- [21] Metcalf y Hasset, (1995). Investment Ander alternative return assumptions: comparing random walk and mean reversion. National Bureau of Economic Research.
- [22] Markowitz, Harry. (1952). ”Portfolio Selection”, Journal of Finance, 7: pp. 77 -91.
- [23] Schwartz E. y M. Moon, (2001), Rational Pricing of Internet Companies Revisited.” Documento de trabajo, Anderson School of Business, University of California.

- [24] Stein J., Usher S., LaGattuta D. and Youngen J, (2001), ".^A Comparable Approach to Measuring CashFlow-At-Risk for Non-Financial Firms". National Economic Research Associates, Journal of Applied Corporate Finance. Vol 13. N° 4, 8-17.
- [25] Vilariño A. (2001) Turbulencias financieras y riesgos de mercado. Financial Times - Prentice Hall.
- [26] Villalpando L. (2007) Simulación de precios del petroleo brent. Disponible en <<http://detodoynada.nireblog.com/blogs1/detodoynada/files/trabajo-procesos.pdf>>.
- [27] Villamil J. (2006) Modelos de valoración de opciones europeas en tiempo continuo. Cuadernos de Economía. ISSN 0121-4772. v.25 n.44 Bogotá.