
manuales

Evaluación de inversiones bajo incertidumbre: teoría y aplicaciones a proyectos en Chile

Eduardo Contreras



Instituto Latinoamericano y del Caribe de Planificación
Económica y Social (ILPES)

Santiago de Chile, noviembre de 2009

Este documento fue preparado por Eduardo Contreras, del Departamento de Ingeniería Industrial (DII), Universidad de Chile. Profesor Adjunto. Miembro del Centro de Gestión (Ceges) del DII. (econtrer@dii.uchile.cl).

Las opiniones expresadas en este documento, que no ha sido sometido a revisión editorial, son de exclusiva responsabilidad del autor y pueden no coincidir con las de la Organización.

Publicación de las Naciones Unidas

ISSN versión impresa 1680-886x ISSN versión electrónica 1680-8878

ISBN: 978-92-1-323323-8

LC/L.3087-P

LC/IP/L.301

N° de venta: S.09.II.G.73

Copyright © Naciones Unidas, noviembre de 2009. Todos los derechos reservados

Impreso en Naciones Unidas, Santiago de Chile

La autorización para reproducir total o parcialmente esta obra debe solicitarse al Secretario de la Junta de Publicaciones, Sede de las Naciones Unidas, Nueva York, N. Y. 10017, Estados Unidos. Los Estados miembros y sus instituciones gubernamentales pueden reproducir esta obra sin autorización previa. Sólo se les solicita que mencionen la fuente e informen a las Naciones Unidas de tal reproducción.

Índice

Resumen	7
1. Introducción	9
2. Metodologías de análisis individual de riesgo en proyectos ...11	
2.1 Análisis de sensibilidad y de escenarios	11
2.2 Análisis probabilístico.....	19
2.3 Aversión al riesgo y equivalencia a la certidumbre	23
2.4 Ajuste simple en la tasa de descuento	26
2.5 Simulación.....	28
2.6 Nuevos desarrollos: el Valor en Riesgo (VeR)	32
3. Riesgo en carteras de inversiones: el Capital Assets Pricing Model (CAPM)	45
3.1 El Modelo CAPM: marco teórico	46
3.2 Una aplicación de CAPM a la evaluación de un proyecto de BancoEstado	56
4. Incertidumbre en decisiones secuenciales: opciones reales y árboles de decisión	59
4.1 Introducción a opciones reales	59
4.2 Aplicación de opciones reales a proyectos mineros mediante simulación.....	66
4.3 Árboles de decisión	73
5. Relación entre los distintos enfoques de análisis de riesgo	77
5.1 Relación entre VeR, análisis probabilístico, análisis de sensibilidad y simulación.....	77
5.2 Relación entre VeR, ajuste simple a la tasa de descuento, modelo CAPM, equivalencia a la certidumbre, opciones reales y árboles de decisión	78

6. Aplicación de VeR y opciones reales mediante simulación a proyectos de embalses	83
6.1 Procesos de precios.....	83
6.2 Tratamiento de las correlaciones entre activos.....	87
6.3 Desarrollo del programa	88
6.4 Aplicación a los proyectos Quino y Traiguén	88
6.5 Una extensión del modelo: Saltos de Poisson para eventos extraordinarios.....	90
7. Conclusiones	99
Bibliografía	101
Anexos	105
Serie manuales: números publicados	115

Índice de tablas

Tabla 1	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD	12
Tabla 2	CÁLCULO DE ELASTICIDADES	12
Tabla 3	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL PROYECTO LA VICTORIA DE VILCÚN.....	13
Tabla 4	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL PROYECTO LAJA DIGUILLÍN	14
Tabla 5	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL PROYECTO ANCOA	15
Tabla 6	RESULTADOS EVALUACIÓN AEROPUERTO CERRO MORENO	17
Tabla 7	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD AEROPUERTO CERRO MORENO	17
Tabla 8	AEROPUERTO CERRO MORENO; VAN EN FUNCIÓN DE CRECIMIENTO DEL PIB.....	18
Tabla 9	ANÁLISIS DE ESCENARIO PROYECTO WEB BANCA	19
Tabla 10	ESTADÍSTICAS DE LA SIMULACIÓN DE UN PROYECTO DE RIEGO.....	31
Tabla 11	BETAS DE BANCOS “PROXY”	57
Tabla 12	TASA DE DESCUENTO SIN APALANCAMIENTO.....	57
Tabla 13	TASA DE DESCUENTO CON APALANCAMIENTO	58
Tabla 14	ESTADÍSTICAS BÁSICAS SERIE HISTÓRICA PRECIOS DEL COBRE	68
Tabla 15	RESULTADOS	68
Tabla 16	CASOS DE ESTUDIO DE SENSIBILIDAD DEL PRECIO DEL COBRE	69
Tabla 17	RESULTADOS SENSIBILIDAD PRECIO DEL COBRE	69
Tabla 18	CASOS DE ESTUDIO SENSIBILIDAD VOLATILIDAD EN EL PRECIO DEL COBRE.....	69
Tabla 19	RESULTADOS SENSIBILIDAD VOLATILIDAD EN EL PRECIO DEL COBRE	70
Tabla 20	RESULTADOS TAMAÑO ÓPTIMO	71
Tabla 21	SENSIBILIDAD A PRECIO INICIAL DEL COBRE. VPN-C	71
Tabla 22	SENSIBILIDAD A PRECIO INICIAL DEL CU. VPN-SF	72
Tabla 23	SENSIBILIDAD A PRECIO INICIAL DEL CU. VPN-OP.....	72
Tabla 24	RESULTADOS OPCIONES.....	73
Tabla 25	INFORMACIÓN DE CLIMA	74
Tabla 26	PROBABILIDADES CONDICIONALES DE CLIMA	74
Tabla 27	RESULTADOS SIMULACIÓN DEL VAN PARA QUINO	89
Tabla 28	RESULTADOS SIMULACIÓN DEL VAN PARA TRAIGUÉN	89
Tabla 29	RESUMEN DE RESULTADOS DE LA CALIBRACIÓN.....	90
Tabla 30	EVENTOS Y PROBABILIDADES EN IX REGIÓN	94
Tabla 31	RESUMEN DE RESULTADOS DEL MODELO EXTENDIDO QUINO	95
Tabla 32	RESUMEN DE RESULTADOS DEL MODELO EXTENDIDO TRAIGUÉN	96

Índice de gráficos

Gráfico 1	ANÁLISIS DE ESCENARIOS PROYECTO WEB EN UN BANCO.....	19
Gráfico 2	OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN PARA UN PRODUCTO AGRÍCOLA	30
Gráfico 3	RESULTADO DE UNA SIMULACIÓN CON CRYSTALBALL	30
Gráfico 4	HISTOGRAMA DE LA SIMULACIÓN CON @RISK DE UN PROYECTO DE RIEGO.....	31
Gráfico 5	LA INCERTIDUMBRE AGREGA VALOR	60

Gráfico 6	VALOR DE ESPERAR	62
Gráfico 7	SERIE HISTÓRICA PRECIOS DEL COBRE	67
Gráfico 8	SERIE DE PRECIOS DEL TRIGO	85
Gráfico 9	SERIE DE PRECIOS DE LOS POROTOS	85
Gráfico 10	SERIE DE PRECIOS DE LA CEBADA	86
Gráfico 11	HISTOGRAMA PARA QUINO	89
Gráfico 12	HISTOGRAMA PARA TRAIGUÉN	89
Gráfico 13	TRAYECTORIA SIMULADA CON MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO	93
Gráfico 14	TRAYECTORIA SIMULADA CON UN PROCESO DE POISSON	93
Gráfico 15	TRAYECTORIA SIMULADA CON UN PROCESO INTEGRADO BROWNIANO GEOMÉTRICO MÁS SALTOS DE POISSON	93
Gráfico 16	HISTOGRAMA PARA QUINO MODELO EXTENDIDO	95
Gráfico 17	HISTOGRAMA PARA TRAIGUÉN MODELO EXTENDIDO	96

Índice de figuras

Figura 1	DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES DEL VPN	22
Figura 2	DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES DEL VPN DE DOS INVERSIONES	22
Figura 3	PLANO DE RIESGO RETABILIDAD PARA UN GRUPO DE PROYECTOS	23
Figura 4	COEFICIENTES DE VARIABILIDAD	24
Figura 5	FUNCIÓN DE UTILIDAD Y AVERSIÓN AL RIESGO	25
Figura 6	MODELO GENERAL DE SIMULACIÓN	28
Figura 7	HISTOGRAMA	29
Figura 8	VALOR EN RIESGO (VER)	32
Figura 9	VALOR EN RIESGO	38
Figura 10	COMBINACIONES RENTABILIDAD VERSUS RIESGO	48
Figura 11	DIVERSIFICACIÓN DE RIESGO	51
Figura 12	ÁRBOL DE DECISIÓN	76

Resumen

Este documento, en sus aspectos teóricos se inicia con la presentación y análisis de los elementos y tópicos relevantes en materia de cuantificación y valoración del riesgo y/o incertidumbre, a partir de los distintos desarrollos disponibles a la fecha en materia de medición de riesgos en proyectos. Se incluye el desarrollo de los siguientes temas: Análisis probabilístico, Análisis de Sensibilidad y de Escenarios, Ajuste simple en la tasa de descuento, Equivalencia a la certidumbre, Simulación, *Capital Assets Pricing Model* (CAPM), opciones reales y árboles de decisión. Para cada uno de ellos se presentan aplicaciones a proyectos. Por último, se presenta el *Valor en Riesgo* (VeR). El marco teórico y conceptual de este último, por ser la herramienta de más reciente aplicación, se profundiza y complementa en mayor medida que los restantes temas.

1. Introducción

La práctica de la evaluación de proyectos (y de disciplinas relacionadas como la valoración de empresas) mayoritariamente se realiza bajo supuestos de certidumbre, con dichos supuestos se pierde mucha información útil para la toma de decisiones, información que dado el estado del arte es bastante fácil de generar a partir de datos que muchas veces son públicos y con apoyo de tecnologías de información y *software* especializados de fácil acceso. El objetivo de este documento es difundir los conceptos y las formas de aplicarlos, para así contribuir al mejoramiento de la evaluación de proyectos privados y públicos, mediante la medición de la incertidumbre asociada a los resultados de los indicadores tradicionales.

Se dice que un proyecto es riesgoso cuando una o varias variables del flujo de caja son aleatorias en lugar de determinísticas. En estos casos no existirá certeza en los flujos de cada período. Y, como los indicadores de evaluación de proyectos, por ejemplo el VPN y la TIR, se calculan a partir de estos flujos, entonces estos indicadores serán también variables aleatorias (Diez y Avilés, 1998).

En presencia de incertidumbre ya no sirve aplicar el criterio tradicional que se ha utilizado hasta ahora para proyectos: maximizar el VPN de los flujos relevantes, ya que bajo incertidumbre este indicador es una variable aleatoria.

Algunas fuentes típicas de riesgo en proyectos son:

- Poco conocimiento de la industria
- Dinámica de los precios
- Dinámica de la demanda
- Gustos y modas
- Costos de insumos
- Tecnologías
- Uso de fuentes de información poco confiables
- Errores de interpretación de datos
- Errores en la manipulación de información

A continuación se revisan los principales enfoques utilizados para incorporar el riesgo y la incertidumbre a la evaluación de proyectos de inversión.

2. Metodologías de análisis individual de riesgo en proyectos

Este enfoque consiste en evaluar la conveniencia de cada alternativa de proyecto de inversión separadamente. Dentro de este enfoque existen diversos métodos para determinar la conveniencia de un proyecto:

2.1 Análisis de sensibilidad y de escenarios

2.1.1 Análisis de sensibilidad

Primero se realiza la evaluación del proyecto en una situación base, tomando los valores esperados o medios de las variables aleatorias. Después se determinan las variables más significativas que afectan los indicadores de conveniencia del proyecto, entre ellos:

- Precio de venta,
- precios de insumos,
- costos de producción,
- volúmenes de venta,
- coeficientes tecnológicos,
- inversión.

Se busca sensibilizar los indicadores ante variaciones en las variables significativas más inciertas (Sapag y Sapag, 1995).

TABLA 1
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Variable	VAN(t1)	VAN(t2)	TIR
Situación base			
Precio venta *(1-x%)			
Precio insumos *(1-y%)			
Ventas *(1-z%)			
Costos operación *(1+W%)			

Fuente: Elaboración propia.

Por ejemplo, se puede evaluar la situación base para el horizonte t1 del proyecto. Y evaluar precios de venta inferiores en un x% a los de la situación base, precio de uno o varios insumos importantes un y% más caros, ventas un z% inferiores, o costos de operación un w% más caros. Además, se puede evaluar el proyecto con un horizonte $t2 < t1$.

Lo relevante es determinar cuáles son las variables críticas que hacen que el proyecto sea o no conveniente, y si para variaciones o errores de esos parámetros, el proyecto sigue siendo atractivo. Por ese motivo, también pueden ser consideradas variables como la inversión fija, el valor residual de ésta al momento de liquidación del proyecto, inversión en capital de trabajo, etc.

Si el impacto de una variable riesgosa en el VPN es importante, entonces el proyecto es riesgoso. El nivel de riesgo se determina en la medida que el VPN se hace negativo para valores probables de la variable.

En este caso, se debe hacer una evaluación costo-beneficio de la conveniencia de comprar certidumbre. Por ejemplo, seguros o precios futuros.

Una de las formas en las que se suele presentar los resultados de un análisis de sensibilidad, es mediante el cálculo de elasticidades del VAN respecto a cada una de las variables riesgosas: $(\Delta VAN / VAN) / (\Delta X / X)$, donde X es cualquiera de las variables riesgosas sujeto de análisis. Con ese indicador, el cuadro de análisis se puede presentar de la siguiente forma:

TABLA 2
CÁLCULO DE ELASTICIDADES

Item	$(\Delta VAN / VAN) / (\Delta X / X)$
Situación Base	
Precio Venta* (1 - x%)	
Precio Insumos * (1 + y%)	
Ventas *(1 - z%)	
Costos Operación * (1 + W%)	

Fuente: Elaboración propia.

A continuación se presentan ejemplos de aplicación de este método a tres proyectos de riego. En las tablas 13, 14 y 16, a través del análisis de sensibilidad, se determina que en esos proyectos las variables más relevantes de analizar, son los precios de los productos agrícolas.

2.1.2 Aplicación de análisis de sensibilidad para tres proyectos de riego

Estos análisis se presentan a continuación para tres proyectos. La idea es investigar si las variables riesgosas son las mismas en este tipo de proyectos (embalses).

Análisis de sensibilidad del proyecto Canal La Victoria de Vilcún.

Se sensibilizó respecto a los precios de cada uno de los productos de los terrenos beneficiados por esa obra de riego, y para variaciones de todos los precios en conjunto. Se analizaron también los montos de las inversiones. Otras variables, en particular los costos operacionales (costos operacionales de mano de obra, de transporte y de comercialización) están sujetos a poca variabilidad, por lo que no fueron considerados¹. Los resultados se sintetizan en el siguiente cuadro:

TABLA 3
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL PROYECTO LA VICTORIA DE VILCÚN

Cultivo	Xo \$/Kg.	X1 \$/Kg.	VAN o \$	VAN1 \$	Delta VAN \$	Delta VAN VAN o	DeltaX Xo	Elasticidad
Trigo	89,9	98,9	5 863 332 018	5 812 634 841	-50 697 177	-0,86%	10,00%	-8,65%
Cebada	77,3	85,0	5 863 332 018	5 862 526 161	-805 856	-0,01%	10,00%	-0,14%
Avena	54,2	59,6	5 863 332 018	5 843 866 248	-19 465 770	-0,33%	10,00%	-3,32%
Papa	65,3	71,8	5 863 332 018	6 079 568 812	216 236 794	3,69%	10,00%	36,88%
Remolacha	22,2	24,4	5 863 332 018	6 002 695 748	139 363 730	2,38%	10,00%	23,77%
Frambuesa c.v. Meeker*	791,2	870,4	5 863 332 018	6 004 683 604	141 351 586	2,41%	10,00%	24,11%
Frambuesa c.v. Heritage*	615,3	676,9	5 863 332 018	5 862 264 932	-1 067 086	-0,02%	10,00%	-0,18%
Manzano c.v. Fuji	68,7	75,5	5 863 332 018	5 930 782 371	67 450 353	1,15%	10,00%	11,50%
Manzano c.v. Royal Gala	53,9	59,2	5 863 332 018	5 920 210 860	56 878 842	0,97%	10,00%	9,70%
Carne*	492,1	541,3	5 863 332 018	6 005 528 845	142 196 828	2,43%	10,00%	24,25%
Leche*	101,2	111,3	5 863 332 018	6 552 122 261	688 790 244	11,75%	10,00%	117,47%
Todos los precios			5 863 332 018	7 243 564 502	1 380 232 484	23,54%	10,00%	235,40%
Inversión (\$)	898 716 320	988 587 952	5 863 332 018	5 773 460 386	-89 871 632	-1,53%	10,00%	-15,33%

Fuente: Elaboración Propia a partir del Estudio de Factibilidad Habilitación Canal La Victoria de Vilcún. Geotécnica Consultores, 1997.

*En el caso de las frambuesas, carne y leche no hay una única proyección de precio.

Como conclusión importante de este análisis, se tiene que las variables riesgosas más importantes de modelar son los precios de los productos. A modo de ejemplo, la sensibilidad del VAN respecto a los precios de la leche, las papas, la remolacha, las frambuesas y la carne, es mayor que la sensibilidad respecto a la inversión. Si consideramos todos los precios en conjunto, la elasticidad obtenida 15 veces mayor que la de la inversión.

Análisis de sensibilidad del proyecto Laja – Diguillín.

También se sensibilizó respecto a los precios de cada uno de los productos (ver DOH, 2002), y para variaciones de todos los precios en conjunto. Se analizaron también los plazos de las inversiones y la tasa de incorporación a riego. Los resultados se sintetizan en la Tabla 4:

¹ Tampoco se consideraron en los otros proyectos.

TABLA 4
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL PROYECTO LAJA DIGUILLÍN

	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	Alternativa 5	Alternativa 6	Alternativa 7	EMBALSE
CEREALES								
Trigo	4,06	8,23	1,99	11,48	7,97	17,13	21,49	0,58
Avena	-0,01	-0,01	-0,01	-0,02	-0,02	-0,04	-0,04	-0,01
Cebada	0,57	1,14	0,29	1,69	1,12	2,41	3,19	0,33
CHACRAS								
Papas	2,38	4,61	2,07	6,78	5,01	11,15	13,54	1,00
Poroto consumo interno	0,29	0,56	0,22	0,82	0,59	1,31	1,61	0,06
Poroto exportación	0,54	1,08	0,28	1,54	1,07	2,30	2,89	0,10
Maíz de Grano	0,02	0,05	0,02	0,07	0,05	0,11	0,14	0,00
HORTALIZAS								
Espárragos Exportación	4,37	8,58	2,75	12,42	8,80	19,17	23,81	0,82
Espárragos Mercado Interno	2,25	4,42	1,42	6,40	4,54	9,88	12,28	0,42
Espárragos Mercado Agroindustrial	1,58	3,11	1,00	4,50	3,19	6,95	8,63	0,30
FRUTALES Y BERRIES								
Manzano Exportación	0,89	1,74	0,51	2,51	1,78	3,85	4,77	0,07
Manzano Mercado Interno	0,26	0,50	0,15	0,73	0,52	1,12	1,38	0,02
Peral Exportación	0,15	0,29	0,09	0,42	0,30	0,64	0,79	0,01
Peral Mercado Interno	0,03	0,06	0,02	0,09	0,06	0,14	0,17	0,00
Cerezo Exportación	0,15	0,30	0,09	0,43	0,31	0,66	0,82	0,01
Cerezo Mercado Interno	0,08	0,16	0,05	0,23	0,17	0,36	0,44	0,01
Arándano sin RT Exportación	0,13	0,25	0,06	0,48	0,26	0,54	0,89	0,32
Frambuesa Exportación	1,92	3,73	1,11	5,42	3,83	8,29	10,29	0,24
Frambuesa Mercado Interno	0,68	1,33	0,39	1,94	1,37	2,96	3,67	0,09
Frutilla Mercado Interno	0,89	1,72	0,51	2,50	1,77	3,84	4,75	0,10
PRADERAS ARTIFICIALES ANUALES								
Avena Forrajera	0,44	0,89	0,23	1,24	0,87	1,88	2,35	0,06
Ballicas anuales	0,03	0,05	0,02	0,08	0,06	0,13	0,15	0,00
Maíz de Silo	0,09	0,18	0,09	0,27	0,20	0,45	0,54	0,02
Tréboles anuales	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
PRADERAS ARTIFICIALES PERMANENTES								
Alfalfa	1,38	2,70	0,73	3,89	2,73	5,88	7,33	0,19
Tréboles blanco y rosado	0,54	1,05	0,29	1,57	1,07	2,29	2,96	0,23
Mezclas permanentes	0,04	0,07	0,03	0,11	0,08	0,18	0,22	0,01
PRADERAS NATURALES								
CULTIVOS IND (MENTA) Margen Neto	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,04	0,05
TOTAL	23,56	46,41	14,22	67,60	47,69	103,57	117,64	5,05
INVERSION	-2,83	-7,69	-2,98	-9,66	-6,55	-17,46	-20,77	1,93
ENTRADA RIEGO (+ 3 AÑOS)	-11,87	-26,67	-6,97	-33,87	-23,73			

Fuente: Elaboración Propia a partir del Estudio Evaluación de Medio Término Sistema de Regadío Canal Laja – Diguillín, Departamento de Planificación – DOH, 2002.

Como se puede apreciar en el cuadro, se confirma que entre las variables riesgosas más importantes de modelar tenemos los precios de los productos. Se puede apreciar que (dependiendo de los escenarios) el efecto de los precios del trigo, las papas o los espárragos, es del orden o mayor que la sensibilidad respecto a la inversión (cada uno de ellos por separado genera un efecto menor que el retraso de la tasa de incorporación a riego). Sin embargo, si se consideran todos los precios en conjunto, las elasticidades obtenidas son las más significativas que las relativas a la tasa de incorporación a riego.

Análisis de sensibilidad del proyecto Ancoa

En este proyecto no fue posible sensibilizar a nivel de precios de cada producto, dado que dicha información no se encontraba a ese nivel de desagregación en las planillas con las que se han construido las valoraciones preliminares desarrolladas a la fecha. Por lo tanto se sensibilizó respecto a todos los precios en conjunto. Se analizaron también los montos de las inversiones y la tasa de incorporación a riego. Los resultados se sintetizan en el siguiente cuadro:

TABLA 5
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DEL PROYECTO ANCOA

Escenario	Variable	$\Delta VAN / VAN$	$\Delta x / x$	Elasticidad
E1-A	Todos los precios	-0,195473294	-10%	1,95473294
E2-A	Todos los precios	-0,227818506	-10%	2,27818506
E3-A	Todos los precios	-0,277927999	-10%	2,77927999
E4-A	Todos los precios	-0,283921194	-10%	2,83921194
E5-A	Todos los precios	-0,25961588	-10%	2,5961588
E6-A	Todos los precios	-0,235368448	-10%	2,35368448
E7-A	Todos los precios	-0,253957806	-10%	2,53957806
E1-A	Inversión	-0,046142643	-10%	0,46142643
E2-A	Inversión	-0,047419769	-10%	0,47419769
E3-A	Inversión	-0,053448365	-10%	0,53448365
E4-A	Inversión	-0,055150014	-10%	0,55150014
E5-A	Inversión	-0,056256238	-10%	0,56256238
E6-A	Inversión	-0,057162764	-10%	0,57162764
E7-A	Inversión	-0,054545599	-10%	0,54545599
E1-A	Incorporación a riego	-0,071381644	-10%	0,71381644
E2-A	Incorporación a riego	-0,071766714	-10%	0,71766714
E3-A	Incorporación a riego	-0,072910485	-10%	0,72910485

Fuente: Elaboración Propia a partir del Estudio "Construcción Embalse Ancoa, Etapa de Diseño VII Región.", Consultora: SMI - Luis San Martín Moll, 2004.

Se confirma la importancia del modelamiento adecuado de los precios por sobre las otras variables riesgosas de los proyectos.

Conclusiones de los análisis de sensibilidad

Si se resumen los resultados de los tres proyectos tenemos:

Proyecto Ancoa: La elasticidad a los precios es entre 5 y 6 veces mayor que la elasticidad a la inversión, y entre 3 y 4 veces mayor que la elasticidad a la tasa de incorporación a riego.

Proyecto Laja – Diguillín: La elasticidad a los precios es entre 6 y 10 veces mayor que la elasticidad a la inversión, y aproximadamente 2 veces mayor que la elasticidad a la tasa de incorporación a riego.

Proyecto Victoria de Vilcún: La elasticidad a los precios es aproximadamente 6 veces mayor que la elasticidad a la inversión, y aproximadamente 4 veces mayor que la elasticidad a la tasa de incorporación a riego.

Todos los resultados consistentemente muestran la importancia del conjunto de precios de productos agrícolas como variables de riesgo².

Es necesario destacar que el riesgo hidrológico y climático de la situación con proyecto, no es relevante para la evaluación, ya que los embalses se diseñan con normativas de tamaño y capacidad tal que deben garantizar un 85% de seguridad de riego (Mideplan, 1996). El riesgo climático si es relevante para la situación sin proyecto, pero su eliminación es justamente la fuente de beneficios y de disposición a pagar por parte de los agricultores, y por tanto el diferencial de riesgos queda capturado en el modelamiento agro-económico de la metodología de evaluación vigente.

En el caso del margen de riesgo climático no cubierto de acuerdo al diseño del embalse, se puede considerar la inclusión de eventos aleatorios de “Saltos” de Poisson (esta forma de modelar se incluye en el capítulo dedicado al tema de VaR y simulación).

2.1.3 Ventajas y desventajas del método de análisis de sensibilidad

Las ventajas más evidentes son:

- Fácil aplicación y fácil de entender.
- Se puede combinar con otros métodos (para ver una análisis de sensibilidad aplicado sobre un modelo de flujos que siguen un proceso Browniano ver Hooper & Pointon, 2002).

Dentro de las desventajas del método tenemos que:

- Sólo permite analizar variaciones de un parámetro a la vez (lo que no es realista).
- No utiliza información como las distribuciones de probabilidad del parámetro a sensibilizar (si se dispone de esa información, el método no permite aprovecharla).
- No entrega distribución de probabilidades de los indicadores de rentabilidad (VPN o TIR), como se hace en el caso del análisis probabilístico y la simulación³.

Más allá de estas críticas, deben considerarse los siguientes argumentos (a favor del método):

- Es el análisis más factible cuando se carece de información histórica sobre el comportamiento de las variables riesgosas. Esa información es necesaria para determinar las funciones de distribución de probabilidad de dichas variables, y es uno de los datos de entrada necesarios para hacer análisis probabilístico o simulación, sin ellos la aplicación de ese tipo de métodos es menos rigurosa.
- Es un buen paso, previo a otros más sofisticados como el análisis probabilístico o la simulación, ya que ayuda a detectar las variables críticas desde el punto de vista del riesgo, siendo esas las que posteriormente debiesen tener prioridad en el proceso de modelamiento, de esa forma se hace más eficiente el análisis probabilístico o la simulación, al permitir la focalización en las variables más importantes.

Cabe señalar que en lugar del cálculo de la elasticidad presentado, se han propuesto otras métricas como el por ejemplo el *differential importance measure* (DIM). (Borgonovo y Peccati, 2005).

2.1.4 Aplicación al aeropuerto Cerro Moreno de Antofagasta

El 14 de septiembre de 2000 se entregó la concesión del aeropuerto por 10 años, a la filial de CINTRA, Aeropuerto Cerro Moreno Sociedad Concesionaria S.A. El 14 de septiembre de 2001:

² Cabe señalar, que por falta de datos, no se pudo sensibilizar con respecto a los rendimientos de los terrenos (los que a su vez dependen del clima).

³ Que se presenta más adelante en este documento.

Inauguró la primera parte de la remodelación. La inauguración definitiva ocurrió el 1 de mayo de 2002, siendo ampliadas las instalaciones a 7000 mts².

La concesión del aeropuerto está fijada hasta el 13 de septiembre de 2010. Este proyecto fue evaluado por los inversionistas interesados durante el año 1999. La inversión realizada se recupera fundamentalmente por el cobro de derechos de embarque a los pasajeros que circulen por el aeropuerto. A continuación se presentan los resultados⁴ de una de las evaluaciones realizadas en aquellos años:

TABLA 6
RESULTADOS EVALUACIÓN AEROPUERTO CERRO MORENO

Concepto	Resultado
Tasa de descuento	11,3%
Tasa libre de riesgo	6,5%
Tramo de licitación	La oferta se sitúa en el tercer tramo, plazo y tarifa fijos. Plazo: 120 meses Tarifa: \$2 500 Pago: 6,54 UF
VAN	6 954 [UF]
TIR	11,9%

Fuente: Perramont. 1999.

Al modelo se le aplicaron variaciones en el monto de la inversión y en el nivel de ingresos de la concesión. De esta forma se obtuvo:

TABLA 7
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD AEROPUERTO CERRO MORENO

	Variación (%)	VAN	TIR (%)
Inversión	+5	(4 447)	10,9
	-5	18 234	13,0
Ingresos	+2	14 558	23,6
	-2	(741)	11,2

Fuente: Perramont. 1999.

Como se puede observar, el proyecto es muy sensible a los montos de inversión y a los ingresos. Estos ingresos como ya se dijo dependen de los derechos de embarque recuadados, y estos a su vez son función del número de pasajeros. Esta última variable está correlacionada con el crecimiento del PIB, por ende, se obtienen distintas proyecciones dependiendo de las expectativas de crecimiento del producto. Al obtener el VAN con supuestos de crecimiento del PIB menos optimistas, el resultado es negativo o muy cercano a cero:

⁴ "Evaluación de la concesión del terminal de pasajeros del aeropuerto cerro moreno de la ciudad de Antofagasta". Fernando Perramont. Memoria de Título de Ingeniero Civil de la Universidad de Chile. 1999.

TABLA 8
AEROPUERTO CERRO MORENO; VAN EN FUNCIÓN DE CRECIMIENTO DEL PIB

Supuestos crecimiento PIB (%)		VAN
1999	2	6,954
2000	6	
2000-2012	7	
1999	2	-35,454
2000-2010	5	
1999	2	-11,969
2000-2010	6	
1999	2	0,316

Fuente: Elaboración propia a partir de Perramont, 1999.

La fila destacada corresponde a los supuestos de la evaluación original. Los crecimientos reales del PIB a la fecha distan de esos supuestos y guardan mayor relación con las tasas de la segunda fila.

2.1.5 Análisis de escenarios

Este método permite resolver el problema de la unidimensionalidad del análisis de sensibilidad. Esto se logra a través de definir escenarios para las distintas variables riesgosas que afectan la inversión.

Cada escenario está determinado por los valores que supuestamente tomarían las variables riesgosas en estos. Habitualmente se definen 3 escenarios: optimista, medio (también llamado escenario base o neutro) y pesimista.

Ejemplo de un escenario optimista:

- Precio del producto es un 20% superior al estimado en la situación base,
- precio de los insumos se mantienen,
- el volumen de producción y venta es un 10% superior al de la situación base.

Es decir, un escenario es un cambio coherente en las variables riesgosas, ya que no todas las combinaciones de variables aleatorias son igualmente probables. La definición de los escenarios posibles debe ser realizada por la propia organización que está evaluando el proyecto o por expertos de ese sector industrial.

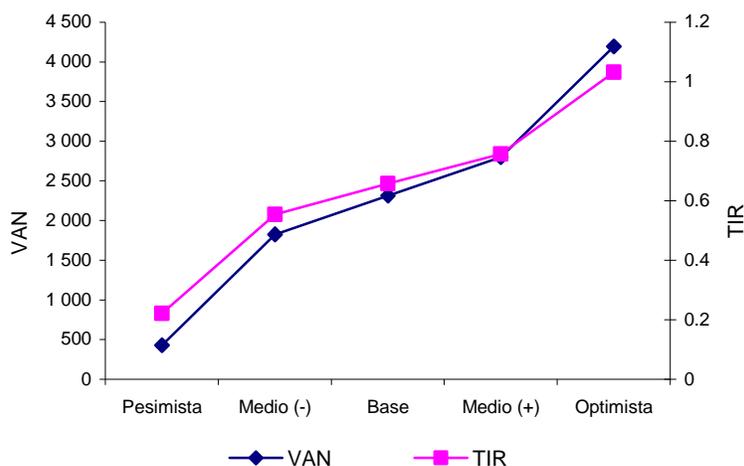
Este método es levemente mejor que el de sensibilidad ya que considera que hay varias variables que pueden variar en forma conjunta (no necesariamente una a la vez), pero mantiene las desventajas y sesgos del análisis anterior.

2.1.6 Aplicación de análisis de escenario a un proyecto de tecnologías de información en un Banco

Este proyecto consistía en desarrollar una nueva tecnología que permita entregar a los clientes de la Banca Empresa la posibilidad de acceder en forma remota (Canal WEB) a un crédito automático, con características particulares de tasas de interés y montos máximos autorizados para el cliente⁵. Se configuraron escenarios a partir de variaciones porcentuales (respecto a la evaluación base) de los ingresos operacionales, costos operacionales y costos fijos, obteniéndose los siguientes resultados:

⁵ Los resultados están tomados de un proyecto formulado por alumnos del Diploma de Gestión de Operaciones de Servicios Financieros, que imparte el Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile en conjunto con el Instituto de Estudios Bancarios Guillermo Subercaseaux

GRÁFICO 1
ANÁLISIS DE ESCENARIOS PROYECTO WEB EN UN BANCO



Fuente: Trabajo de curso de Diplomado en Gestión de Operaciones de Servicios Financieros (DII- IEB)

TABLA 9
ANÁLISIS DE ESCENARIO PROYECTO WEB BANCA
(En porcentajes)

Variable	Pesimista	Medio (-)	Base	Medio (+)	Optimista
Ingreso operacional	-40	-10	0	10	40
Costo operacional	30	10	0	-10	-30
Costos fijos	20	5	0	-5	-20

Fuente: Trabajo de curso de Diplomado en Gestión de Operaciones de Servicios Financieros (DII- IEB).

2.2 Análisis probabilístico

Consiste en calcular estimadores de tendencia central y de dispersión del VPN (variable aleatoria) de un proyecto de inversión a través de su función de distribución de probabilidades.

Este método se incluye dentro de este capítulo de marco teórico por dos razones importantes: es posible aplicarlo directamente el cálculo de los estimadores (de tendencia central y de dispersión del VAN), pero además, la base teórica de los modelamientos es común con la de los métodos más recientes (en particular el VeR).

2.2.1 Breve repaso de probabilidades

Si se tiene una variable aleatoria (v.a.) continua llamada X, con función densidad f(X), entonces su valor esperado o esperanza es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X f(X) dX \tag{1}$$

Con X variando en todo su espacio muestral. Si X es discreta entonces:

$$E(X) = \sum_{i=1}^m X_i P(X_i) \quad (2)$$

Es importante recordar que el valor esperado es un operador lineal, es decir:

$$E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y) \quad (3)$$

Por otro lado, la varianza de X es:

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E[X^2 - 2 * X * E(X) + E^2(X)] \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned} \quad (4)$$

La varianza no es un operador lineal, en efecto:

$$V(aX \pm bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) \pm 2 a b COV(X, Y) \quad (5)$$

Donde:

$$COV(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad (6)$$

La covarianza será no nula entre las variables aleatorias cuando ellas tienen algún grado de correlación entre ellas. Se define el coeficiente de correlación entre X e Y como ρ_{xy} :

$$\rho_{x,y} = \frac{COV(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}, \text{ con } \sigma_x = \sqrt{V(X)} \text{ y } \sigma_y = \sqrt{V(Y)} \quad (7)$$

¿Cuál es el criterio de decisión para este enfoque? Determinar si es conveniente o no hacer un proyecto riesgoso requiere de elementos algo más complejos que la evaluación de proyectos determinística. Como primer paso debemos conocer los conceptos de valor esperado y desviación estándar del VPN.

2.2.2 VPN esperado

Se parte del supuesto de que se tiene una variable aleatoria X que está presente en todos los flujos, luego tienen un flujo de caja aleatorio con un horizonte de n períodos $F_0(X)$, $F_1(X)$, $F_2(X)$, ..., $F_n(X)$. A partir de ellos pueden obtener un VPN aleatorio $VPN(X)$. Luego el VPN esperado será la esperanza de ese VPN aleatorio:

$$VPN(X) = F_0(X) + \sum_{t=1}^n \frac{F_t(X)}{(1+r)^t} \quad (8)$$

$$E(VPN(X)) = E(F_0(X)) + \sum_{t=1}^n \frac{E(F_t(X))}{(1+r)^t} \quad (9)$$

Un error que frecuentemente sucede es que se confunde el valor esperado de una función que depende de una v.a. (como por ejemplo el VPN) con la función evaluada en el valor esperado de la v.a., valores que en general serán distintos, es decir:

$$E(VPN(X)) \neq VPN(E(X)) \quad (10)$$

Serán iguales sólo en el caso particular en que la función VPN es lineal en la v.a. Siempre se debe recordar que lo relevante es $E(VPN(X))$ y no $VPN(E(X))$. Ya que este último puede llevar a decisiones equivocadas.

2.2.3 Desviación estándar del VPN

Existen tres casos posibles: En primer lugar, podría ocurrir que los flujos de caja de cualquier periodo sean estadísticamente independientes de los flujos de los periodos restantes. En segundo lugar, podría ocurrir que los flujos de cualquiera de los periodos tuviesen correlación perfecta con los flujos de los periodos restantes, es decir, que la variabilidad de cualquiera de ellos se explica totalmente por la variabilidad de los flujos restantes. Los dos casos anteriores son los menos probables, lo que probablemente se encuentre en la realidad de un proyecto, son flujos que no son independientes y tampoco tienen correlación perfecta, es decir, el caso intermedio de flujos con correlación imperfecta. A continuación se presentan las ecuaciones para calcular la desviación estándar del VPN en cada uno de los tres casos.

i) Flujos de caja independientes:

$$COV(F_i, F_j) = \rho(F_i, F_j) = 0, \quad \forall i \neq j \quad (11)$$

Luego:

$$\sigma(VPN) = \sqrt{\sigma^2 \left(F_0 + \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} \right)} = \sqrt{\sum_{t=0}^n \frac{\sigma^2(F_t)}{(1+r)^{2t}}} \quad (12)$$

ii) Flujos de caja perfectamente correlacionados:

$$\rho(F_i, F_j) = \frac{COV(F_i, F_j)}{\sigma(F_i)\sigma(F_j)} = 1, \quad \forall i, j \quad (13)$$

Luego:

$$\sigma(VPN) = \sqrt{\sigma^2 \left(\sum_{t=0}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} \right)} = \sqrt{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{\sigma(F_i)\sigma(F_j)}{(1+r)^{i+j}}} = \sqrt{\left(\sum_{t=0}^n \frac{\sigma(F_t)}{(1+r)^t} \right)^2} = \sum_{t=0}^n \frac{\sigma(F_t)}{(1+r)^t} \quad (14)$$

iii) Flujos de caja imperfectamente correlacionados:

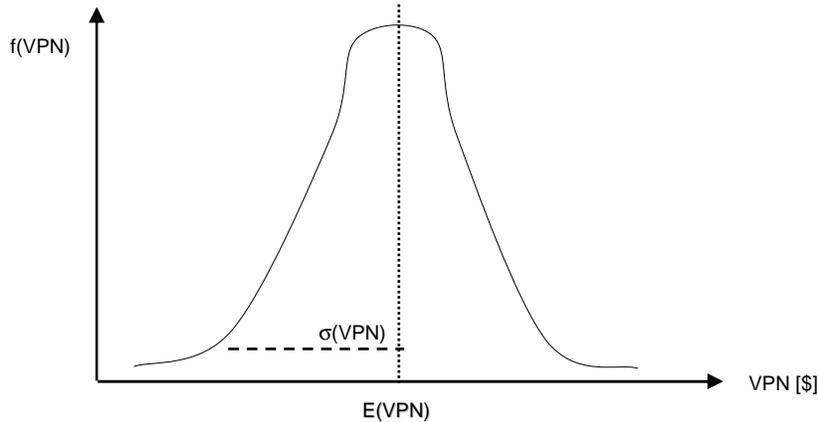
$$\sigma(VPN) = \sqrt{\sigma^2 \left(\sum_{t=0}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} \right)} = \sqrt{\sum_{t=0}^n \frac{\sigma^2(F_t)}{(1+r)^{2t}} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\rho(F_i, F_j)\sigma(F_i)\sigma(F_j)}{(1+r)^{i+j}}} \quad (15)$$

2.2.4 Función de distribución de probabilidad del VPN

En el análisis de la distribución del VPN de un proyecto, es fundamental Teorema del Límite Central, el que plantea:

“Si una variable aleatoria X puede ser expresada como la suma de n variables aleatorias independientes, entonces para un “n grande” la variable aleatoria X sigue aproximadamente una distribución normal”. (Joiron, 2004)

FIGURA 1
DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES DEL VPN

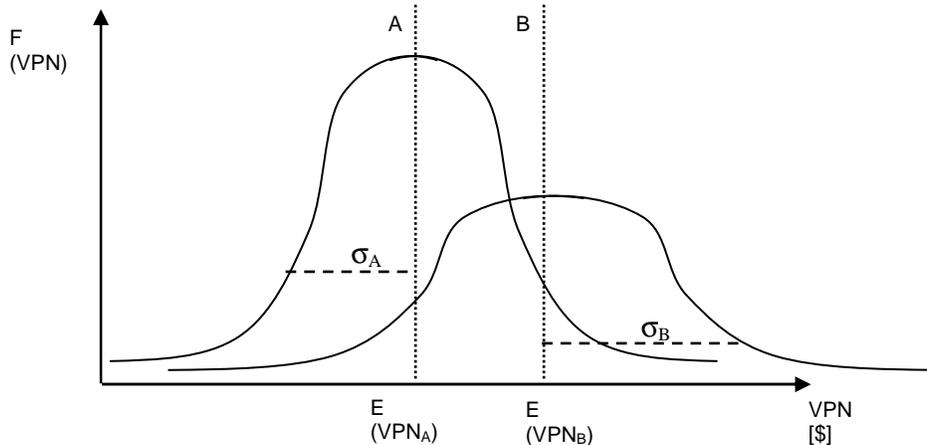


Fuente: Elaboración propia.

El VPN es en efecto una variable aleatoria que es igual a la suma (ponderada) de (n+1) variables aleatorias: los flujos de caja. Por lo que con las funciones de distribución de los flujos de caja se puede obtener el comportamiento probabilístico del VPN. La forma funcional de la distribución de probabilidad del VPN dependerá del número de flujos, de la distribución de cada uno y de la independencia que exista entre ellos.

No obstante, como ya se ha dicho, por el Teorema Central del Límite, se sabe que independientemente de las distribuciones de los flujos de cada período, la distribución del VPN tenderá a ajustarse a una distribución normal, para proyectos con largos horizontes de evaluación (muchas variables aleatorias Ft). A continuación se plantea otro problema: En el siguiente gráfico, ¿Cuál es un mejor proyecto, A ó B?

FIGURA 2
DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES DEL VPN DE DOS INVERSIONES



$\sigma_A < \sigma_B \Rightarrow$ El proyecto B es más riesgoso
 $E(VPN_A) < E(VPN_B) \Rightarrow$ El proyecto B aporta mayor riqueza esperada

Fuente: Elaboración propia.

La respuesta a esta pregunta lleva a los temas de aversión al riesgo, grados de aversión al riesgo y el método de equivalencia a la certidumbre:

2.3 Aversión al riesgo y equivalencia a la certidumbre

2.3.1. Aversión al riesgo⁶

La decisión de que proyecto realizar depende del “comportamiento” del inversionista frente al riesgo. Estos comportamientos pueden ser clasificados en tres categorías:

- Neutro al riesgo
- Amante del riesgo
- Adverso al riesgo

¿Cómo conocer el comportamiento de un inversionista frente al riesgo?

Se puede analizar este tema mediante un ejemplo:

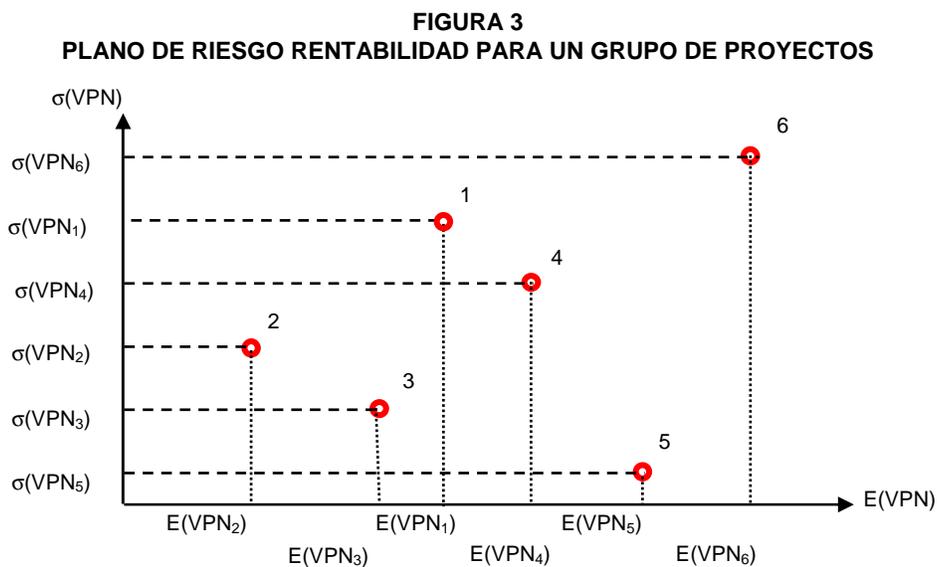
Si se ofrecen dos alternativas:

- Un ingreso I_1 con probabilidad p y un ingreso I_2 con probabilidad $1-p$.
- Un ingreso I_0 con probabilidad 1. Con $I_0 = I_1 p + I_2 (1-p)$.

La elección entre las alternativas determina el comportamiento frente al riesgo:

- El neutro al riesgo está indiferente entre ambas alternativas
- El amante del riesgo prefiere la primera alternativa
- El adverso al riesgo prefiere la segunda alternativa.

Considérese que tenemos más proyectos que sólo A y B, y que para cada uno de ellos se ha calculado individualmente su valor esperado y su desviación estándar.



Fuente: Diez y Avilés (1998).

⁶ Este punto, el anterior, y el siguiente están basados en Diez y Avilés (1998).

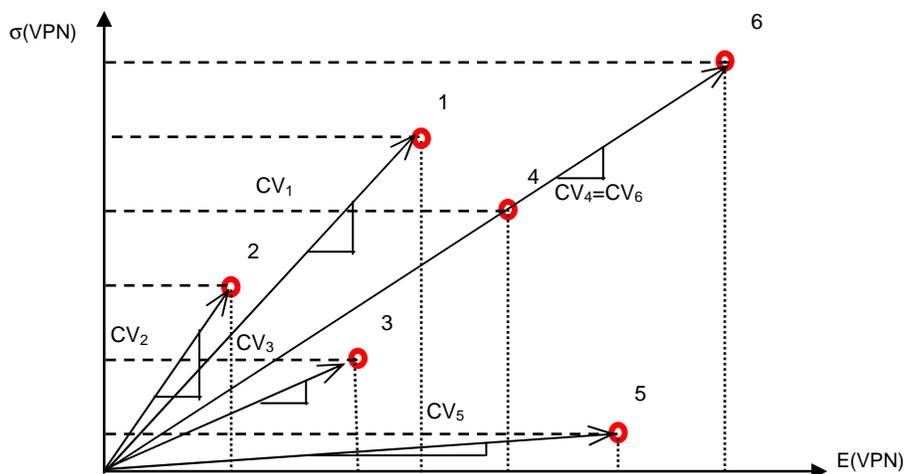
Los proyectos pueden ser representados gráficamente en un plano $E(VPN), \sigma(VPN)$:

Una primera aproximación al problema de qué proyectos elegir es usar como indicador para la decisión al Coeficiente de Variación (CV), el que se define como:

$$CV_i = \frac{\sigma(VPN_i)}{E(VPN_i)} \quad (16)$$

Este coeficiente indica cuantas unidades de riesgo (\$ del VPN) se están tomando por cada unidad obtenida de VPN esperado. Luego, para este indicador, el criterio de decisión bajo este indicador es elegir los proyectos con menor CV . Lo anterior es válido para el comportamiento de un inversionista adverso al riesgo.

FIGURA 4
COEFICIENTES DE VARIABILIDAD



Fuente: Diez y Avilés (1998).

En la figura 4, el CV_i está determinado por la pendiente de la recta que une al proyecto i con el origen:

En el ejemplo, bajo el criterio de minimizar el CV , el orden de conveniencia de los proyectos debería ser: 5, 3, 4 ó 6 (indiferencia), 1 y 2.

Lo que implícitamente se ha hecho, es suponer que los vectores que salen del origen son curvas de iso-utilidad, tal que proyectos sobre la misma curva le son indiferentes al inversionista. En tanto que proyectos en curvas más horizontales, es decir, con menos pendiente, son más convenientes para individuos adversos al riesgo, ya que aportan más rentabilidad con niveles de riesgo menores.

2.3.2 Regla de Utilidad Esperada

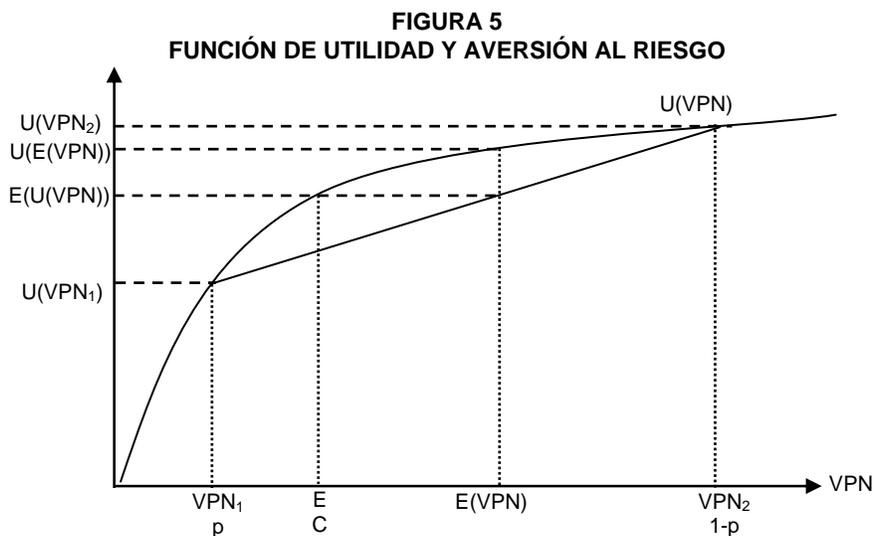
Este enfoque supone que aunque el aumento en el VPN de una persona u organización aumenta siempre su bienestar (suponiendo todo lo demás constante), éste no lo hace linealmente, sino que su aporte marginal es positivo pero decreciente.

Además, con incertidumbre se tiene que maximizar el bienestar (lo relevante) no necesariamente es equivalente a maximizar la riqueza como ocurre en bajo certidumbre.

Esto se muestra con un ejemplo. Supongamos que un proyecto riesgoso tiene dos posibles resultados VPN_1 y VPN_2 , cada uno con una probabilidad de ocurrencia de p y $(1-p)$. Y que la función de utilidad del dueño del proyecto es $U(VPN)$. Con:

$$\frac{\partial U}{\partial VPN} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial VPN^2} < 0 \quad (17)$$

Es decir, $U(VPN)$ es cóncava. Cumpliendo de esa manera con que la utilidad siempre aumenta con la riqueza, pero este aumento es marginalmente decreciente.



Fuente: Elaboración propia.

El proyecto aleatorio entrega un VPN esperado de:

$$E(VPN) = p VPN_1 + (1-p) VPN_2 \quad (18)$$

En tanto que la utilidad esperada es igual a:

$$E(U(VPN)) = pU(VPN_1) + (1-p)U(VPN_2) \quad (19)$$

Se puede ver que debido a que $U(VPN)$ es cóncava ocurre que $E(U(VPN)) < U(E(VPN))$. Es decir la utilidad que otorga recibir $E(VPN)$ con probabilidad 1 es mayor que la utilidad que otorga el proyecto aleatorio. Es decir, el riesgo hace disminuir la utilidad, aunque el valor esperado sea el mismo.

Lo anterior lleva al concepto de equivalente cierto (EC). Este valor es tal, que si se obtiene con probabilidad 1 y es evaluado en la función de utilidad entrega el mismo bienestar que el proyecto riesgoso. Aunque con un menor aporte esperado a la riqueza.

Podemos definir el concepto de equivalente cierto o equivalencia a la certidumbre, como la cantidad sin riesgo que a un inversionista le resulta indiferente con respecto a un valor esperado de una variable aleatoria riesgosa. Para un averso al riesgo se cumple que ese equivalente cierto es menor que el valor esperado de la variable riesgosa.

Esta diferencia en la riqueza ($E(VPN)-EC$) es el premio por riesgo exigido por realizar el proyecto. El concepto de equivalente cierto puede ser aplicado también al flujo de caja, de forma que:

$$EC(F_t) = E(F_t) - \text{premio por riesgo} \quad (20)$$

De forma que la función de utilidad cóncava explica el comportamiento adverso al riesgo. Por lo tanto, una función de utilidad lineal representará un comportamiento neutro al riesgo.

Consecuentemente, una función de utilidad convexa representa el comportamiento amante del riesgo, es decir, que en vez de exigir un premio adicional en la riqueza por correr riesgo, se está dispuesto a sacrificar riqueza por él.

En general, el resultado anterior se puede presentar alternativamente como:

$$EC(F_t) = \alpha E(F_t) \text{ con } \alpha < 1 \quad (21)$$

Con α : grado de aversión al riesgo

¿Cómo se determina α ?

Depende de la función de utilidad del inversionista, la cual no es observable, esa es una dificultad de aplicación de este método, ya que el parámetro de aversión al riesgo sólo se revela en la toma de decisiones, esta dificultad es aún mayor cuando el tomador de decisiones es una empresa de la cual no existen antecedentes históricos.

2.4 Ajuste simple en la tasa de descuento

Otra forma de incorporar el riesgo en una inversión individual es considerar que ante dos proyectos de inversión de diferente riesgo, los flujos esperados del proyecto más riesgoso se deben descontar con una mayor tasa, ya que se le “debe” exigir una mayor rentabilidad.

Es decir, se debe exigir un premio por riesgo, el que se refleja en una mayor tasa de descuento:

$$r_{\text{Riesgo}} = r_{\text{Libre de Riesgo}} + \text{premio por riesgo} \quad (22)$$

Problemas del Método:

- El premio por riesgo se fija arbitrariamente. Esta crítica es válida para el método tal y como se ha presentado hasta este punto. Más adelante, cuando se presente el tema de Riesgo y carteras, se verá como el premio por riesgo puede ser calculado con el sustento teórico en el modelo CAPM.
- No se utiliza información valiosa como la distribución de probabilidades de los flujos futuros.
- El riesgo aumenta a medida que pasa el tiempo. Lo que no necesariamente será siempre verdadero.

Alternativamente como ya se vio, se ha propuesto adaptar el concepto de equivalente cierto al flujo de caja. Es decir:

$$EC(F_t) = E(F_t) - \text{premio por riesgo} \quad (23)$$

Luego, el VPN del proyecto con este método se calcula como:

$$VPN = EC(F_0) + \sum_{t=1}^n \frac{EC(F_t)}{(1 + r_{\text{libre de riesgo}})^t} \quad (24)$$

Dado que se encontraran flujos ciertos que son equivalentes a los riesgosos, se deben descontar con el costo de oportunidad del dinero que está libre de riesgo.

Lo anterior permite relacionar el método de los equivalentes ciertos con el ajuste a la tasa de descuento. La demostración de esta relación se presenta a continuación. Cabe señalar que en dicha demostración se utiliza el cálculo del premio al riesgo con el modelo CAPM que se presenta más adelante en el punto 3:

Sean F y EC el flujo incierto y el equivalente cierto respectivamente, y sean r y r_f las tasas con riesgo y sin riesgo (la primera determinada según CAPM). Debe cumplirse que:

$$VA = EC / (1+r_f) = F / (1+r) \quad (25)$$

de donde $F / VA = (1+r)$. Luego,

$$F / VA = 1+r_f + \beta (r_m - r_f) \quad (1) \quad (26)$$

Pero

$$\beta = COV(r, r_m) / VAR(r_m) = COV(F / VA - 1, r_m) / VAR(r_m) \quad (27)$$

dado que VA es el precio actual (valor cierto):

$$\beta = COV(F, r_m) / VA * VAR(r_m) \quad (28)$$

reemplazando en (1)

$$\begin{aligned} \Rightarrow F / VA &= 1+r_f + \beta COV(F, r_m) / VA * VAR(r_m) / (r_m - r_f) \\ \Rightarrow F &= (1+r_f) * VA + \beta COV(F, r_m) / VAR(r_m) * (r_m - r_f) \\ \Rightarrow VA &= \beta F - COV(F, r_m) * (r_m - r_f) / VAR(r_m) / (1+r_f) \end{aligned} \quad (29)$$

De donde se concluye que el flujo equivalente cierto es:

$$EC = F - COV(F, r_m) * (r_m - r_f) / VAR(r_m) \quad (30)$$

La expresión anterior permite encontrar el flujo equivalente cierto sin necesidad de conocer los datos del modelo CAPM. Sin embargo, si ya se ha calculado la tasa de descuento con CAPM, se puede determinar EC de una forma alternativa (más simple), ya que si

$$\begin{aligned} VA &= EC / (1+r_f) = F / (1+r) \\ \Rightarrow EC &= (1+r_f) F / (1+r) \end{aligned} \quad (31)$$

Entonces en general, para un período t cualquiera se tiene que:

$$EC = \alpha_t F \quad (32)$$

donde $\alpha_t = \left\{ (1+r_f) / (1+r) \right\}^t < 1$

Nótese que en todos los casos, llegar a obtener el parámetro de equivalencia a la certidumbre, implica que se debió desarrollar previamente el método de ajuste a la tasa de descuento, lo que plantea el cuestionamiento de la utilidad del método de equivalencia a la certidumbre, dado que si ya se calculó la tasa de descuento ajustada por riesgo, deja de ser necesario incluir el riesgo en los flujos vía equivalencia a la certidumbre. Adicionalmente, se debe tener en cuenta que no hay disponibilidad de información necesaria para aplicar el método de ajuste a la tasa de descuento en el caso de proyectos públicos (no existe la información histórica de rentabilidades de mercado de los proyectos que se requiere para el modelo CAPM), por lo tanto tampoco pueden por esa vía aplicar el método de equivalencia a la certidumbre.

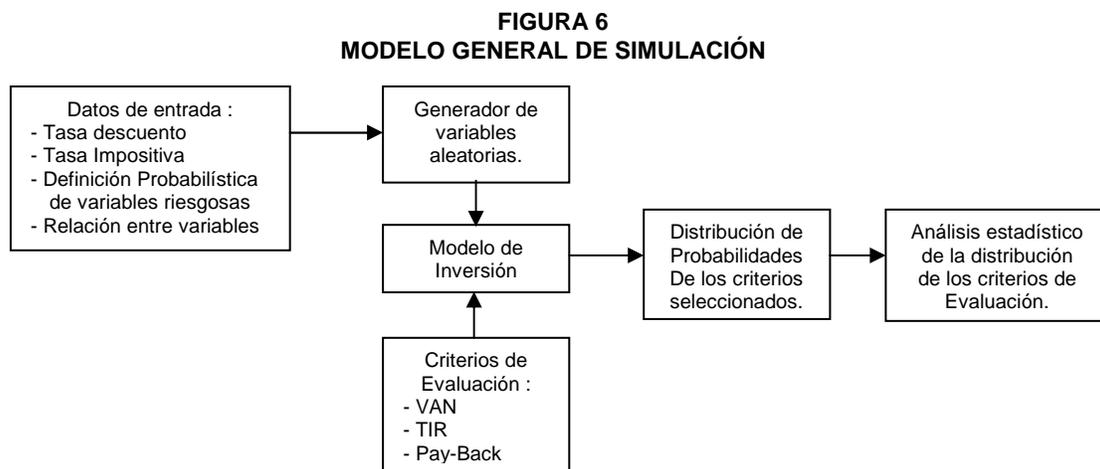
2.5 Simulación

Surge como respuesta a las limitaciones del modelo probabilístico (Savvides, 1994), este último:

- Requiere conocimientos y manejo acabado de conceptos de probabilidades
- Es de difícil formulación matemática debido a la necesidad de:
 - Modelación de las relaciones entre flujos
 - Modelación de la relaciones entre variables

Por lo tanto en algunos casos se llega a la imposibilidad de llegar a una solución analítica. La solución práctica ha sido la Simulación Computacional (Sapag y Sapag, 1995, Blank y Tarquin, 1998). Esta técnica surgió a partir del desarrollo de la computación e informática que les permite hacer una gran cantidad de cálculos en poco tiempo. La idea tras la simulación es "recrear" numérica y reiteradamente la experiencia aleatoria que interesa analizar, por medio de un modelo que describa el comportamiento del sistema (no es optimizante) y mida las variables de desempeño del sistema bajo distintos parámetros dados.

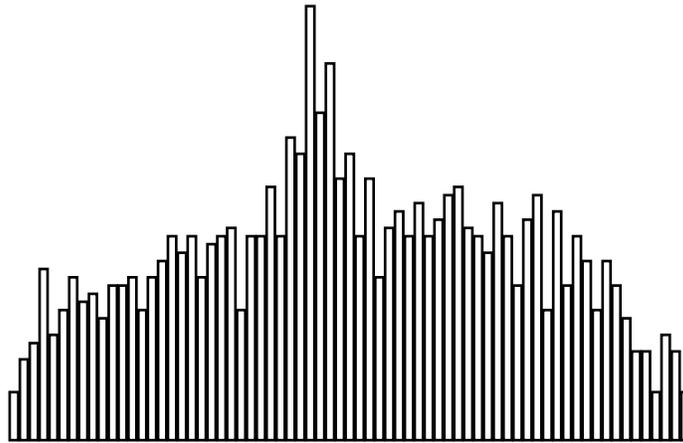
La simulación permite la evaluación de un gran número de escenarios generados aleatoriamente, de acuerdo a las distribuciones de probabilidades de las variables riesgosas y de las relaciones de interdependencia entre ellas. El procedimiento se puede representar en el siguiente esquema:



Fuente: Elaboración propia.

Como resultado de la simulación se obtiene un Histograma, que representa en forma aproximada la Distribución de Probabilidades del VAN (suponiendo que ese es el criterio de evaluación seleccionado):

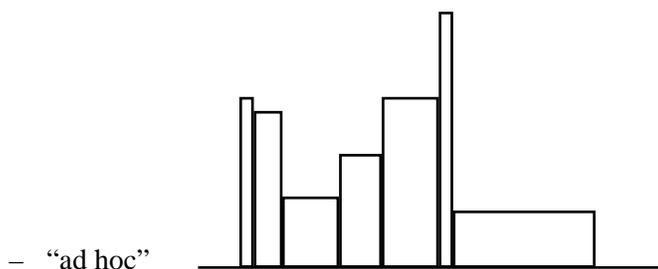
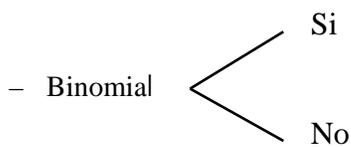
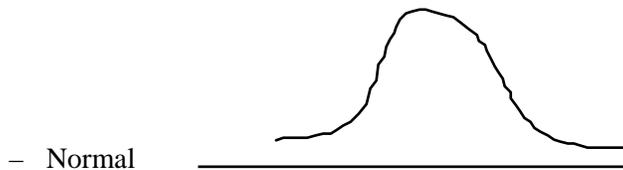
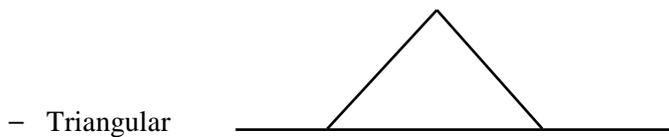
**FIGURA 7
HISTOGRAMA**



Fuente: Elaboración propia.

Nótese de la figura 2, que uno de los datos de entrada necesarios es la definición de las distribuciones probabilísticas de las variables riesgosas. En la propuesta metodológica, éstas deben de ser previamente identificadas mediante análisis de sensibilidad.

Las Distribuciones de Probabilidad más usadas :

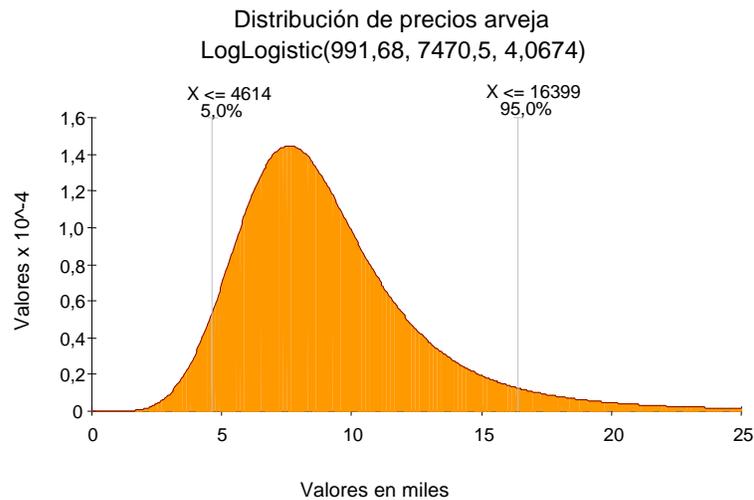


¿Cómo trabajar en un proyecto? Con modelación mediante el uso de algún software de apoyo (por ejemplo @Risk o Crystallball), que permiten ajustes de curvas a datos históricos, seleccionando las distribuciones que mejor se ajustan con test estadísticos que miden bondad de ajuste (como el Chi cuadrado, el de Kolmogorov – Smirnov y otros).

Para tener una idea de la gama de modelos de simulación disponibles en el mercado, se recomienda el trabajo de Bernal (2004).

Ejemplo: En la evaluación de un proyecto de riego, se requiere simular el precio de la arveja, a partir de datos históricos de precios, se obtiene la distribución de la Figura 4.

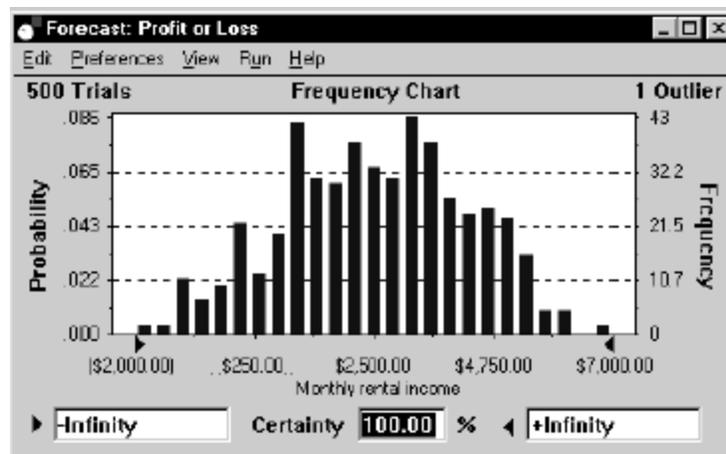
GRÁFICO 2
OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN PARA UN PRODUCTO AGRÍCOLA



Fuente: Elaboración Propia utilizando software @Risk.

A continuación se muestra el resultado de una simulación realizada con Crystallball:

GRÁFICO 3
RESULTADO DE UNA SIMULACIÓN CON CRYSTALLBALL



Fuente: Getting started with Crystall Ball (tutorial).

A modo de ejemplo dentro del sector de riego, se muestra a continuación una salida de una simulación de un proyecto⁷, realizada con el software @Risk:

TABLA 10
ESTADÍSTICAS DE LA SIMULACIÓN DE UN PROYECTO DE RIEGO

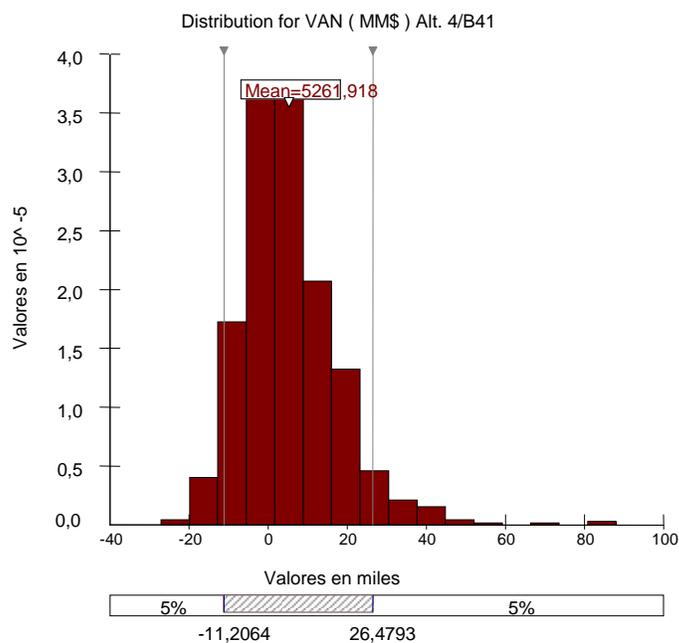
	Resultados
Estadísticas generales	
Iteraciones	1 000
Media	5 262
Mínimo	-27 064
Máximo	88 004
Std Dev	12 105
Variance	146 537 800
Probab. VAN < 0	35,79%

Fuente: Elaboración propia.

Según estos resultados, el valor medio del VAN es de \$5.262 millones y la probabilidad de que el proyecto sea no rentable es de un 35,79%. El VeR de este proyecto, sería de $5.262 - (-11.206) = 12.468$ millones de \$. El segundo término en el cálculo anterior, corresponde a la máxima pérdida que podría dejar el proyecto considerando

El histograma que representa gráficamente los resultados anteriores se presenta a continuación:

GRÁFICO 4
HISTOGRAMA DE LA SIMULACIÓN CON @RISK DE UN PROYECTO DE RIEGO



Fuente: Elaboración propia.

⁷ Corresponde a un resultado parcial, que se presenta en este punto sólo a modo de referencia, ya que en la simulación se modelaron solamente algunas de las variables de riesgo, y sin considerar las correlaciones entre ellas.

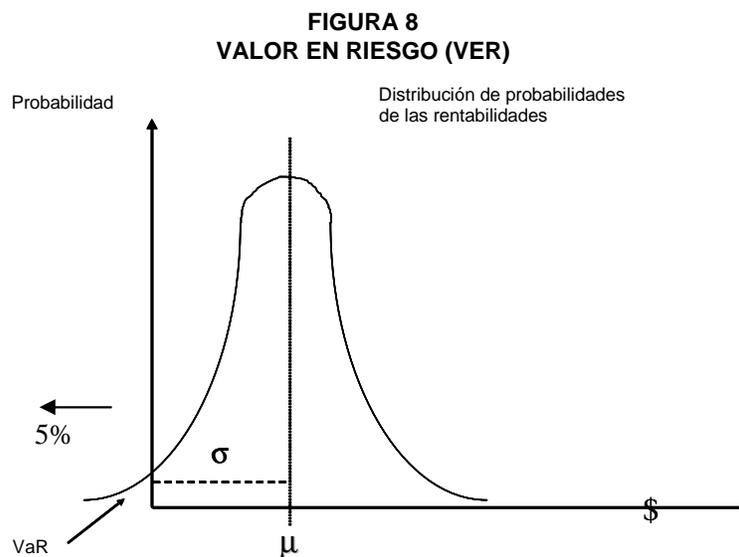
2.6 Nuevos desarrollos: el Valor en Riesgo (VeR)⁸

Los pasos detallados de la metodología VeR (Longerstaey J. & Zangar P, 1995), han sido ampliamente difundidos (ya se cuenta con más de 10 años de difusión y marketing de la herramienta) y ha sido aplicada en muchos países a distintos tipos de activos, fundamentalmente financieros. Los aspectos teóricos se tratan en más detalle en 2.6.2 y siguientes, en 2.6.1 sólo se presenta la metodología de forma general y se ilustran los resultados que permite alcanzar mediante ejemplos.

2.6.1 Introducción al VeR

El hecho de que el método sea estándar, permite comparar los resultados. Lo anterior permite que quienes trabajen con la herramienta, ya puedan conocer sus limitantes y su aplicabilidad, es decir, ya debieran poder saber bajo qué condiciones la herramienta es aplicable y bajo cuáles se deben hacer ajustes y contrastar con otros métodos.

Lo que el VeR mide es la exposición al riesgo para un cierto nivel de confianza, es decir, el monto máximo que se podría perder para ese nivel de confianza, en cierto intervalo de tiempo. Ese monto máximo tiene asociado una probabilidad de perder:



Fuente: Elaboración propia.

Modelo Paramétrico

Este punto se basa en una aplicación realizada para la minería en Chile. (Cruz, 2004).

Se parte del supuesto de que el riesgo del proyecto depende sólo del riesgo asociado a los precios del producto o servicio de dicho proyecto.

En este ejemplo, el interés radica en estimar la pérdida máxima (al 95%) que pudiera sufrir el proyecto respecto a su VPN esperado. La pregunta es cuál es el riesgo asociado a esta inversión.

⁸ Todo este punto debe mucho a las conversaciones, y trabajos conjuntos realizados con el profesor José Miguel Cruz, y a toda la experiencia que él ha desarrollado y transmitido sobre el tema en el DII (más allá de las citas de sus trabajos que se recogen en la bibliografía).

La manera de responder esta pregunta, se basa en proyectar un escenario de precios futuros que se mueva por debajo del precio esperado, y que separe los posibles escenarios de precios entre los que ocurren con probabilidad del 95%, y los que ocurren con probabilidad del 5%.

El riesgo de esta inversión se puede medir en cuánto se podría desviar el precio de su trayectoria media estimada. Entonces se puede evaluar el valor de la inversión a través de una trayectoria crítica del precio, y que corresponde a aquel precio tal que precios menores que este sólo ocurren con una probabilidad baja (5%). ¿Cómo se calcula este precio límite? La clave consiste en encontrar alguna variable a la cual se le puede conocer o proyectar de manera razonable su función de distribución de probabilidad, y resolver la ecuación

$$\Gamma_p(P_{VAR}) = 5\% \quad (33)$$

Donde Γ representa la función de densidad de probabilidad acumulada.

Supóngase inicialmente que el cambio porcentual del precio se distribuye en forma normal, con valor esperado igual a Re y con varianza igual a $t \times \sigma^2$ donde σ^2 representa la varianza de 1 día del precio. Esta volatilidad diaria (definida como la desviación estándar de los cambios porcentuales diarios) se puede suponer por ejemplo, que se mantendrá en los próximos periodos.

La ventaja de suponer normalidad es que el percentil al 5% es conocido y puede calcularse en función de tomar el valor medio y restarle un determinado número de desviaciones estándares (1,64 desviaciones para un 5%, 2,33 para un 1%)

De esta manera el cambio porcentual que separa la distribución entre los menores (los que más hacen caer el precio) que ocurren con un 5% de probabilidad y los mayores que ocurren con un 95% de probabilidad es VeR , y se calcula (para el caso de la distribución normal) como:

$$VeR = Re - k * \sigma \quad (34)$$

Cuando existe más de una variable que explica el riesgo de una inversión determinada, es necesario calcular los riesgos en forma individual primero, y luego considerar las interacciones de estas variables incorporando sus correlaciones.

Por ejemplo, si una inversión tiene 2 factores de riesgos (factor 1 y factor 2), se podría mediante la técnica antes descrita calcular los VeR individuales, $VeR1$ y $VeR2$. El valor en riesgo total, que incorpora ambos factores en forma simultánea se denomina VeR covariado, o VeR total y se calcula como sigue:

$$VeR_{Total}^2 = VeR1^2 + VeR2^2 + 2\rho VeR1VeR2 \quad (35)$$

Donde ρ es el coeficiente de correlación entre el factor 1 y el factor 2. Para el caso de más de dos variables, el análisis es similar sólo que es necesario compactar la notación que se vuelve engorrosa, por lo que se utiliza notación matricial.

Modelos no paramétricos

Dentro de estos modelos está la simulación, que es lo que se propone en este trabajo (Best, 1999), con este tipo de alternativas se obtienen modelos más específicos que valoran mejor para casos específicos, pero no para la generalidad. Se puede así levantar el supuesto de normalidad de los precios (implícito en los modelos paramétricos).

Para valoración de activos reales, en particular en proyectos, cuando no se dispone de precios que dependen sólo de las fuerzas del mercado (ejemplo en proyectos de inversión), en estos casos sí hay volatilidades intrínsecas a modelar en forma específica, además en estos casos no existe la necesidad de estandarizar. Por tanto en esos casos se desarrolla un modelo para ese conjunto de activos, el que le interesa a la empresa, incluyendo las volatilidades intrínsecas del proyecto. Esto se traduce por ejemplo, en los métodos de valoración de opciones reales o de VeR por medio de simulación. Se suele modelar la evolución de precios mediante procesos estocásticos. Para un análisis general sobre procesos se recomienda analizar el texto de Coleman (1976)

Ventajas del VeR (respecto a métodos anteriores de análisis de riesgo en carteras):

Permite medir y comparar riesgos teniendo en cuenta la cartera completa, y considerando no sólo las rentabilidades y riesgos individuales sino las correlaciones entre los mismos. Permite comparar la eficiencia de los gestores de carteras comparando no sólo las rentabilidades que estos obtienen, sino además la relación rentabilidad – riesgo que han diseñado.

Se ha establecido en el mercado como una medida clave del riesgo de mercado, desde que el Comité de Basilea estableció que los bancos deberían ser capaces de cubrir pérdidas en sus portafolios sobre un horizonte de 10 días un 99% del tiempo.

Críticas al VeR paramétrico

La metodología del VeR ha tenido detractores, críticas más generales que las que se presentan en este punto se pueden ver en Szego (2004). Se han propuesto alternativas como la de usar simulación ex post, valorizando la cartera actual con los datos históricos de precios y tasas, eligiendo los niveles de pérdidas que con alta confiabilidad (más que el 95%) podrían ocurrir para la actual cartera según los datos históricos (Lawrence y Robinson, 1995).

El modelo asume que la distribución conjunta es normal⁹. Se han propuesto alternativas que reflejen mejor la distribución de probabilidades de los precios de las acciones.

Se le critica que la volatilidad futura sea estimada con medias móviles que pesan más los periodos más recientes que los distantes. Se critica además que se proponga un parámetro único para ponderar las volatilidades históricas de todos los activos en lugar de estimar parámetros para cada activo.

La mayor parte de estas críticas han sido respondidas por JP Morgan (Longerstaey J. & Zangar P, 1995).

Comentarios a las críticas contra el uso del VeR paramétrico:

En relación al alcance y aplicabilidad, se indica que el no considerar los valores extremos no es un problema de la metodología ya que nada fuerza a usar un intervalo del 95% de confianza, este puede ser modificado y se modifican entonces los parámetros de las ecuaciones. En general, si α es el nivel de confianza seleccionado, el VeR pasa a ser una función de α .

Se señala además que los gestores de riesgo no están interesados sólo en los casos extremos, y que por lo tanto la elección de la metodología a aplicar dependerá también de las exigencias de los reguladores. Se plantea que los métodos de simulación ex post propuestos como alternativa pueden ser muy costosos por la gran cantidad de información histórica que requerirían.

Respecto a la normalidad o no normalidad de los precios de las acciones, se señala que más importante que esa discusión, es analizar si los modelos no normales son mejores para predecir el futuro que los modelos normales.

⁹ Ya que para los precios de acciones se propone un modelo browniano geométrico con un proceso de Weiner.

Respecto al método exponencial propuesto para explicar la dinámica de la volatilidad, se defiende el uso un parámetro único para ponderar las volatilidades históricas de todos los activos en lugar de estimar parámetros para cada activo, argumentando la mayor simplicidad (debido a la gran cantidad de parámetros a estimar en el modelo alternativo)

En nuestra opinión, muchas de estas disquisiciones iniciales del modelo, han sido superadas en la práctica en la medida de que se han ido integrando mejoras a la versiones originales de Risk Metrics: ajustes al intervalo de confianza, e incluso aplicaciones integradas de VeR con modelos de procesos *Jump Poisson*, o el uso de EVT (Extreme Value Theory) como alternativa al VeR, si bien hasta donde se conoce no hechas por JP Morgan sino por otras empresas y por académicos (Fernández, 2003). Se puede decir que quienes se han apropiado del modelo originalmente propuesto por Risk Metrics, están introduciendo mejoras que permiten superar varios de los puntos de discusión iniciales en torno al tema.

Finalmente, respecto a la aplicabilidad de la herramienta, debe tenerse en cuenta que las estandarizaciones propuestas por JP Morgan suponen que los activos cuya volatilidad se modela tengan precios de mercados que oscilan por motivos de oferta y demanda. En sectores regulados no se cumple la condición anterior, esto dificulta la aplicación a sectores como agua potable, energía y telefonía fija, en cambio no hay dificultades para su aplicación (con los supuestos iniciales de Risk Metrics) en la minería del cobre, en índices de precios (como el IPSA), en el tipo de cambio (desde que este se dejó flotar producto de la eliminación de las bandas de precios del Banco Central) y en la agricultura (en particular en un proyecto de riego). Si se deseara ajustar el modelo del VeR a sectores donde no se dan las condiciones anteriores (las intervenciones regulatorias serían una posible causa), se puede hacer más sofisticada la estimación de volatilidades usando (por ejemplo) un modelo *Jump Poisson*. En cualquier caso, el nivel de sofisticación para estimar la volatilidad, depende del uso que se le quiera dar al VeR.

2.6.2 Origen del VeR

El VeR y sus metodologías de cálculo asociadas, se originan en el entorno de la regulación de la volatilidad de los mercados financieros. En razón de ese origen, a continuación se describe dicho entorno, para luego presentar los aspectos teóricos de este método de medición de riesgos.

Cabe señalar que el origen del VeR con objetivos de medición de riesgos de activos financieros, no invalida su aplicación a la medición de riesgos de los activos reales de un proyecto, así como el cálculo del valor de las opciones financieras permitió dar paso al cálculo de opciones reales en proyectos.

En los últimos 30 años, el mercado financiero internacional ha experimentado transformaciones de índole económica y financiera, como la eliminación de los sistemas de tipo de cambio fijo hacia tipos de cambio flexibles, debido al aumento de la interdependencia financiera entre los países desarrollados y subdesarrollados por efecto de la liberación financiera y eliminación de las restricciones a las tasas de interés. Además simultáneamente se han producido avances en el campo tecnológico y de análisis cuantitativos, conllevando a desarrollar nuevos instrumentos financieros tales como los productos derivados, con la particularidad de una mayor volatilidad del precio de los activos financieros expuestos a riesgos de tasa de enteros, tasas de cambio y caídas de los mercados bursátiles, originando inestabilidad en los mercados financieros, basta con observar en los años 80 y 90, la inestabilidad y crisis financieras de países como Japón, Rusia, Brasil, países asiáticos, el efecto de la devaluación de las monedas de la mayoría de los países latinoamericanos y la pérdida de confianza de los mercado bursátiles de Estados Unidos (Simons, 2000).

Con base en los hechos descritos anteriormente los sistemas de medición de riesgo han experimentado un crecimiento y es cuando por parte del sector privado el Banco J.P. Morgan desarrolla un sistema llamado Risk Metrics (Linsmeier and Pearson. 1996), realizando mediciones de riesgo de instrumentos financieros, conllevando a que la mayoría de instituciones financieras puedan cuantificar los riesgos de mercado, colateralmente las autoridades reguladoras internacionales buscan unificar criterios de supervisión en cuanto a requerimientos de capital de garantía de los bancos internacionales, para 1988 se firma un acuerdo financiero denominado el acuerdo de Basilea (Suiza), con una finalidad que es proporcional a los bancos comerciales un campo de acción equitativo, por medio del establecimiento de un estándar mínimo de requerimientos de capital, donde se exponen los principales modelos de Riesgos Financieros (González. A.M.2004). En junio de 1999, el comité de Basilea busca cubrir las necesidades del nuevo entorno financiero haciendo énfasis en la calificación y supervisión interna, la utilización de evaluaciones externas del crédito, técnicas de cobertura de riesgo, titularizaciones de activos, el tratamiento de los riesgos operativos y disciplina del mercado de las instituciones financieras a nivel Internacional. Todos estos elementos anteriores marcan la importación de la administración de los riesgos del mercado en las instituciones financieras.

2.6.3 Riesgos Financieros y Valor en Riesgo

Los riesgos Financieros se clasifican en riesgo de mercado, riesgo de crédito, riesgo de liquidez, riesgo operacional y riesgo legal.

Los riesgos de mercado se pueden generar por los siguientes aspectos:

- Tasa de interés
- Tipos de cambio
- Inflación
- UVR en moneda legal
- Tasa de interés en moneda extranjera
- Tasa de interés pactada a la UVR
- Valor de la UVR
- Precio de las acciones

El VeR o Valor en Riesgo, es una de las herramientas mas utilizadas por los gerentes de Riesgo en la medición de riesgo de mercado y se define (como ya se presentó en el capítulo 3) como la cantidad máxima probable que se puede perder en una cartera de trading como consecuencia de movimientos adversos de los precios de mercado con una probabilidad dada y sobre un horizonte temporal determinado. En términos formales el VER se define como la máxima pérdida que una institución financiera podría observar por una determinada posición o cartera de inversión, en el caso de presentarse un cambio en los factores de riesgo, durante un horizonte de inversión definido y con un nivel de confianza establecido. Su medición tiene fundamentos estadísticos y el estándar de la industria es calcular el VeR con un nivel de significancia de 5%. Esto significa que solamente el 5% de las veces, o 1 de 20 veces, es decir una vez al mes con datos diarios, el retorno del portafolio caerá más de lo que señala el VER, en relación del retorno esperado. Existen otras medidas de riesgo relacionadas con VeR, como el CVeR (Larsen, Mausser and Uryasev, 2000), (Engle and Manganeli. 1999) (Lamothe y Carrillo, 2001).

Si consideramos una serie de rendimientos históricos de un portafolio de inversión que posee un número n de activos y se observa su respectivo histograma presentara su función de densidad

con fluctuaciones de rendimientos en torno a un valor medio levemente diferente de 0¹⁰ y cuya distribución se aproxima a una normal. Una vez generada la distribución se debe de calcular aquel punto del dominio de la función de densidad que deja el 5% del área en su rango inferior (α). La distancia de este punto en el dominio de la distribución en relación al valor esperado de la distribución se denomina Valor en Riesgo. (Figura 4).

Analíticamente el VeR (Joiron, 2004), se define por el límite superior de la Integral de la función de los rendimientos esperados $r(s)$.

$$E[r] - VaR = \int_{-\infty}^{VaR} r(s) ds = \alpha \quad (36)$$

Usualmente se asume que el valor esperado de los rendimientos es cero, $E[r] = 0$, con lo cual la solución a la expresión anterior se transforma en:

$$- VaR = \int_{-\infty}^{-VaR} r(s) ds = \alpha$$

Una representación alternativa consiste es:

$$VaR = \alpha \cdot \sqrt{\sigma^2 \Delta t} \quad (37)$$

donde α es el factor que define el área de pérdida de los rendimientos, σ^2 la varianza de los rendimientos, y Δt el horizonte de tiempo para el cual se calculara el factor de riesgo VeR. Si el valor medio es distinto de cero, el VeR se puede medir de forma relativa al valor medio (Dowd, 1999).

La ecuación (37) representa el VeR de un activo cuyo valor esperado tiene media cero, si la media fuese Re y el lapso de tiempo relevante fuese de un periodo, la ecuación (38) se transforma en la ecuación (34) del punto anterior.

La ecuación (37) representa el VeR del retorno de un activo. Si se busca el VeR del valor, en lugar del retorno, debe tenerse en cuenta que el valor V es igual al número de unidades de activo N multiplicado por el precio del mismo ($V=N*P$).

Se puede verificar entonces que el cambio de valor $(V_1 - V_0) / V_0 = \alpha \sqrt{\sigma^2 t}$, de donde se desprende que la ecuación (37) de los retornos, para el caso del VeR del valor de un activo, se transforma en:

$$VeR = V_0 \alpha \sqrt{\sigma^2 t} \quad (38)$$

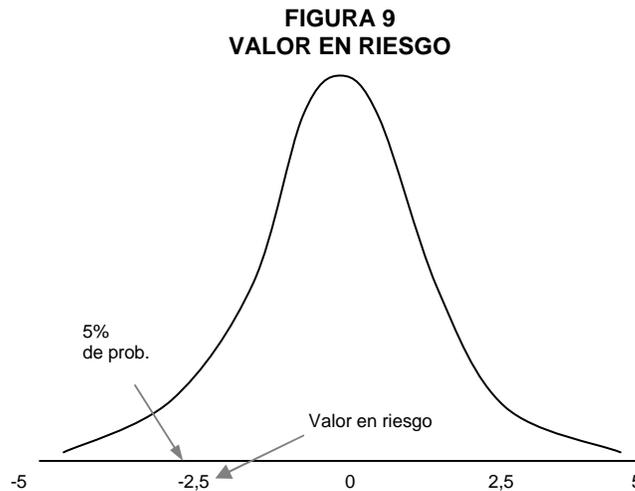
El riesgo total medido como VeR, corresponde entonces a la pérdida potencial máxima que puede ocurrir a causa de un evento riesgoso, con un determinado intervalo de confianza, y en un determinado horizonte de tiempo.

¹⁰ En estadística se denomina proceso con reversión a la media.

Analíticamente, lo que se quiere es encontrar un VeR tal que:

$$P = \text{Pr ob}\{\Delta V \leq VaR\} \quad (39)$$

Donde V representa una función de valor tal como el valor presente de un activo.



Fuente: Contreras y Cruz.2006.

2.6.4 Cálculo del VeR paramétrico de una cartera

El resultado anterior es de máxima importancia para proyectos, ya que el conjunto de variables riesgosas de un proyecto puede ser visto como el conjunto de activos de un portafolio, donde cada activo es un factor de riesgos que contribuye al VeR total.

En mayor detalle, un portafolio (o un proyecto), está compuesto entonces por posiciones activas y pasivas que son afectadas por factores de riesgo. Estas posiciones tienen un valor en riesgo que depende de la volatilidad de los factores de riesgo que las afectan.

En teoría, los portafolios están contruidos de tal manera, que la relación entre los instrumentos que lo componen hacen que el riesgo agregado del portafolio sea menor que la suma de los riesgos individuales. Esto se conoce como diversificación del portafolio. Por lo anterior, la contribución de cada posición al riesgo del portafolio depende de la relación entre los diferentes factores de riesgo que lo componen. Esta relación entre factores de riesgo puede ser medida a través del coeficiente de correlación (ρ). Las correlaciones ayudan a diversificar el riesgo de un portafolio. Por esto se da el nombre de Valor en Riesgo “diversificado” a aquel que se calcula utilizando las correlaciones entre los factores de riesgo (Ruiz, 2005).

La correlación entre dos factores de riesgo k y l se calcula como:

$$\rho_{kl} = \frac{\sigma_{kl}}{\sigma_k \sigma_l} \quad (40)$$

Donde:

ρ_{kl} : Coeficiente de correlación entre los factores de riesgo k y l.

σ_{kl} : Covarianza entre el factor de riesgo k y el factor de riesgo l.

σ_k : Desviación estándar del factor de riesgo k.

σ_l : Desviación estándar del factor de riesgo l.

La covarianza puede estimarse a partir de las muestras de los factores de riesgo k y l como:

$$\hat{\sigma}_{kl} = \frac{1}{(T)} \sum (x_{t,k} - \hat{\mu}_k)(x_{t,l} - \hat{\mu}_l) \quad (41)$$

Donde:

$\hat{\sigma}_{kl}$: Covarianza entre el factor de riesgo k y el factor de riesgo l.

$x_{t,k}$: Ocurrencia del factor de riesgo k.

$x_{t,l}$: Ocurrencia del factor de riesgo l.

$\hat{\mu}_k$: Media muestral del factor de riesgo k.

$\hat{\mu}_l$: Media muestral del factor de riesgo l.

La desviación de un factor se puede estimar a partir de la muestra del factor así:

$$\hat{\sigma}_k = \sqrt{\frac{1}{(T)} \sum (x_{t,k} - \hat{\mu}_k)^2} \quad (42)$$

Donde:

$\hat{\sigma}_k$: Desviación del factor de riesgo k

T: Tamaño de la muestra.

$x_{t,k}$: Ocurrencia del factor de riesgo k.

$\hat{\mu}_k$: Media muestral del factor de riesgo k.

Una vez determinada la correlación entre los diferentes factores de riesgo que componen el portafolio, se puede proceder a calcular el VER diversificado.

El valor en riesgo de un portafolio puede estimarse como:

$$\left(VaR_{portafolio} \right)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(VaR_i \right)^2 \rho_i^2}_A + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n VaR_i VaR_j \rho_{ij}}_B \quad (43)$$

Donde:

n: número de factores de riesgo.

VaR_i : Valor en Riesgo del factor de riesgo i.

ρ_{ij} : Correlación entre el factor de riesgo i y el factor de riesgo j.

$VaR_{portafolio}$: Valor en Riesgo del portafolio que equivale a $\sqrt{(VaR_{portafolio})^2}$

Como se puede apreciar, la ecuación (43) es la generalización de la ecuación (35) presentada en el punto anterior para el caso de dos factores de riesgo.

Esta suma no sólo contiene los Valores en Riesgo individuales, los cuales están representados en el primer sumando denotado con A, sino también todos los distintos productos cruzados representados por el segundo término B. Este cálculo puede representarse de manera mas abreviada usando notación vectorial. Para esto asumimos que los Valores en Riesgo de cada factor están organizados de la siguiente manera:

$$(VaR_{portafolio})^2 = [V \quad a \quad R]^t \cdot \begin{bmatrix} MC \\ a \\ R \end{bmatrix} \quad (44)$$

Donde:

$[VaR]^t$: Vector de Valores en Riesgo Transpuesto.

MC: Matriz de Correlaciones

$VaR_{portafolio}$: Valor en Riesgo del portafolio que equivale a $\sqrt{(VaR_{portafolio})^2}$.

Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$VaR_{portafolio} = \sqrt{[VaR_1 \quad VaR_2 \quad \dots \quad VaR_n] \cdot \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \dots & \rho_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \dots & \rho_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} VaR_1 \\ VaR_2 \\ \vdots \\ VaR_n \end{bmatrix}} \quad (45)$$

Donde:

n: número de factores de riesgo.

VaR_f : Valor en Riesgo correspondiente al factor f.

$\rho_{i,j}$: Correlaciones entre los factores de riesgo i y j.

$VaR_{portafolio}$: Valor en Riesgo del portafolio.

Así por ejemplo, si se tiene un portafolio cuyo valor sólo depende de 3 factores de riesgo k, l y m, el valor en riesgo del portafolio se obtiene de la siguiente manera:

$$VaR_{portafolio} = \sqrt{[VaR_k \quad VaR_l \quad VaR_m] \cdot \begin{bmatrix} \rho_{k,k} & \rho_{k,l} & \rho_{k,m} \\ \rho_{l,k} & \rho_{l,l} & \rho_{l,m} \\ \rho_{m,k} & \rho_{m,l} & \rho_{m,m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} VaR_k \\ VaR_l \\ VaR_m \end{bmatrix}} \quad (46)$$

Un tratamiento más detallado de las correlaciones se puede obtener mediante Copulas, un método en el que las relaciones de dependencia entre variables se extraen de las funciones de distribución conjuntas (Embrechts, McNeil & Straumann. 1999), (Embrechts, H'oring y Juri.2002).

Para efectos de la aplicación a un proyecto, para llegar a aplicar la ecuación (46) primero se han de calcular los VeR individuales de los factores de riesgo aplicado la ecuación (38). En el caso particular de los precios de los productos agrícolas, el valor en riesgo se determinará a partir de la desviación estándar de los precios de los productos, el valor asociado a las ventas de dicho productos (equivalente al peso de un activo dentro de una cartera), y considerando un valor α de la distribución normal correspondiente a un 95% de confianza (1,6).

2.6.5 Otras metodologías de cálculo de VeR: Simulación de Monte Carlo

Hay tres metodologías de cálculo de VeR que han adquirido mayor difusión:

La Simulación Histórica: Esta es una simulación simple, que requiere relativamente pocos supuestos respecto a las distribuciones estadísticas de los factores de riesgo. Para el caso de un activo consiste en ordenar los valores históricos de una variable (por ejemplo el retorno de una acción) y ordenarlos de menor a mayor para construir un histograma. Dicho histograma permite encontrar el valor que deja a la izquierda un 5% de los casos (o un 1% según el nivel de confianza que se desee para el VeR). Este método resulta difícil de aplicar al VAN de un proyecto, ya que se requerirían series históricas de VAN (que no existen) o calcular VAN para cada set de valores de las variables riesgosas (precios de los productos agrícolas), pero asumiendo que cada set de valores de las variables se mantiene constante en el horizonte de evaluación. Este último método se aplicará al proyecto Ligua Petorca, como contraste del método de paramétrico y el de simulación de Monte Carlo.

El Método Paramétrico de varianzas / covarianzas presentado en el punto anterior está basado en el supuesto de que los factores de riesgo subyacentes en el mercado siguen una distribución normal mutivariada.

El método de Simulación de Monte Carlo: tiene un número de similitudes con la simulación histórica. En la simulación de Monte Carlo los datos son obtenidos simulando con métodos estadísticos, mediante la generación aleatoria de valores de las variables riesgosas, de acuerdo a alguna función de distribución. En el caso de varios factores de riesgos, este método se basa en el supuesto de que tenemos información suficiente sobre la distribución conjunta de estas variables. Entonces generando valores de acuerdo a esta distribución conjunta podemos generar un gran número de escenarios, y para cada uno de ellos calcular un VAN, de forma que un número elevado de escenarios nos permite obtener una buena aproximación a la distribución del VAN. El menor quintil (1%, 5% o lo que se desee según el nivel de confianza) de esa distribución será la aproximación al VeR (Glasserman, P., Heidelberger P. and Shahabuddin.P. 2000).

Comparación entre las tres metodologías

Los métodos difieren en su potencial para capturar riesgos de opciones, o de activos semejantes a opciones (como las opciones reales). Difieren también en su facilidad de implementación, su facilidad para presentar y explicar resultados, la flexibilidad para analizar efectos de cambios de supuestos y por último en la confiabilidad de los resultados. El mejor método podrá ser seleccionado entonces dependiendo de cuál de los aspectos anteriores importa más (Hao, C., Yan, G., Jun, H. and Komlan, K. 2005).

Potencial para capturar riesgos de opciones.

Los métodos de simulación trabajan bien independientemente de la presencia de opciones en los portafolios, porque en estos métodos se recalculan los valores de mercado para cada “jugada” de los factores básicos de mercado, incluyendo los valores implícitos de las opciones.

En contraste, el método de varianzas-covarianzas (método paramétrico), funciona bien para instrumentos y portfolios con limitados contenidos de opciones, son menos capaces de capturar los riesgos de este tipo que los métodos de simulación. (Hao, C., Yan, G., Jun, H. and Komlan, K. 2005)

Tomando en cuenta que los proyectos de embalses tienen implícitas opciones (de cambio de cultivos por ejemplo), se espera que resulta más apropiado el método de simulación de Monte Carlo.

Facilidad de implementación

La simulación histórica y el método paramétrico de varianzas – covarianzas son más fáciles de implementar que la simulación de Monte Carlo. Los dos primeros requieren solo de datos históricos de las variables riesgosas. Ambos se pueden desarrollar sin mayor dificultad en un software utilitario básico como Excel.

La simulación de Monte Carlo requiere, además de los datos históricos, de un modelamiento computacional, de preferencia con algún software ad hoc para simulación o una programación para esos efectos (Matlab, Visual Basic, Macros sobre Excel, @Risk, u otro).

Adicionalmente la simulación de Monte Carlo requiere similar la distribución conjunta de las variables riesgosas, para lo cual se requiere hacer descomposición de Cholesky (se explica más adelante) lo cual nuevamente requiere softwares ad hoc o programación.

Facilidad para presentar y explicar resultados:

La simplicidad conceptual de la simulación histórica, la hace muy fácil de explicar a los ejecutivos o clientes. El Método de varianzas-covarianzas es difícil de explicar a cualquier audiencia que carezca de las capacidades técnicas necesarias. Sólo considerando lo que respecta a las características de la distribución normal, el no manejo de la teoría de probabilidades puede convertir este método en una caja negra.

La simulación de Monte Carlo es aún más difícil de explicar, ya que es un método – no trivial – de cálculo de una aproximación a una distribución.

Confiabilidad de los resultados:

Todos los métodos se basan en datos históricos. La simulación histórica sin embargo, descansa directa y exclusivamente en dichos datos. Un peligro entonces de este método, es que los precios o valores del periodo considerado, puedan no ser los típicos, o estar muy alejados de los valores típicos. Por ejemplo, si por casualidad los últimos 100 días fueron un periodo de baja volatilidad en los precios de mercado, el VeR calculado mediante simulación histórica podría subestimar el riesgo del portfollio.

Los métodos de varianzas-covarianzas y la simulación de Monte Carlo comparten otro tipo de problema: los supuestos acerca de la distribución podrían no estar describiendo bien la distribución de los factores de mercado. Típicamente las distribuciones de cambios en los precios de mercado tienen “fat tails” en relación a la distribución Normal. Esto es, tienen más ocurrencias lejos de la media que lo que predice la distribución Normal (Fernández, 2003). Sin embargo, la distribución Normal parece ser una Buena aproximación (Longerstaey J. & Zangar P, 1995).

Un problema único de la simulación de Monte Carlo, es el hecho de que el modelador del sistema puede elegir la distribución de probabilidad de los factores de mercado, esta flexibilidad le permite hacer una mala elección.

Como síntesis del análisis comparativo anterior; se privilegiará por el mayor potencial de la simulación de Monte Carlo para capturar el valor de las opciones. Por tratarse de una investigación, es menos relevante las desventajas que pueda tener el método en términos de su mayor dificultad de implementación y la mayor dificultad para presentar y explicar los resultados (esta última

característica es más relevante en aplicaciones con fines profesionales, no así en una investigación con fines académicos).

En la literatura revisada, Brooks y Persans (2002) señalan que Jackson (1998) probó varios modelos y obtuvo que modelos no paramétricos basados en técnicas de simulación logran mejores resultados para el VeR que modelos paramétricos.

Tratamiento de las correlaciones entre activos.

Como se ha señalado, en los casos en que los activos tienen cierta correlación, los valores aleatorios generados en la simulación, deben tener implícita esta correlación, esto se logra de la siguiente manera.

Siendo R la matriz de correlación de precios para $j = 1, 2, \dots, N$ activos. Con la descomposición de Cholesky (Lamothe y Pérez Somalo, 2004), (Feria, 2005)

$R = T^T T$ Obteniendo los elementos de la matriz T:

$$\begin{aligned}
 t_{ii} &= +\sqrt{r_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \\
 t_{ij} &= \frac{r_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}}, \text{ para } i < j \\
 t_{ij} &= 0, \text{ para } i > j
 \end{aligned} \tag{47}$$

La formulación exige que estos elementos se calculen por filas, de izquierda a derecha y de arriba abajo.

Una vez obtenida la matriz T, se obtiene la T transpuesta. Esto permite finalmente, generar un conjunto de valores aleatorios independientes η que al ser multiplicados por la matriz T transpuesta generan un conjunto de valores aleatorios correlacionados ε .

Conjunto de valores aleatorios independientes η , generar valores aleatorios correlacionados ε :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} = T^T * [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_N]$$

Y entonces, se pueden modelar así las series de precios de activos (en este caso los precios de los productos agrícolas), pero ahora correlacionados. Se verifica que valores aleatorios correlacionados deben seguir también una $N(0,1)$.

2.6.6 VeR en la evaluación de proyectos

La incorporación del VeR en la evaluación de proyectos ha comenzado a realizarse por los diferentes expertos de la industria, reconociendo implícitamente que el riesgo total importa.

Diferentes trabajos han sugerido metodologías para la incorporación del riesgo total en la evaluación de proyectos¹¹, e incluso han desarrollado modelos más elaborados de evaluación como

¹¹ Ver por ejemplo "A Comparable Approach to Measuring CashFlow-At-Risk for Non-Financial Firms" August 2000, J. Stein, S. Usher, D. LaGattuta, J. Youngen, National Economic Research Associates, Working Paper #39.

resultados de trabajos aplicados entre empresas privadas y universidades de primer nivel en Estados Unidos¹².

En conclusión, no existe un tratamiento integral del tema del riesgo, y en términos aplicados, los profesionales se encuentran en un proceso de adaptación de metodologías tipo VeR al mismo tiempo que se reconoce la incorporación de riesgos y flexibilidades en proyectos vía opciones reales.

Es en esta integración metodológica y adaptación de técnicas de medición de riesgos totales donde se puede realizar una importante contribución a la evaluación de proyectos.

¹² Es el caso de la Universidad de Harvard, quien ha auspiciado el trabajo desarrollado por RCM, Risk Capital Management Partners, que publicaron recientemente "NPV No More: RPV for Risk-Based Valuation" February 2001 por David Shimko.

3. Riesgo en carteras de inversiones: el Capital Assets Pricing Model (CAPM)

Como se ha visto, entre otras métricas el riesgo del proyecto es usualmente medido por la desviación *standard* de su distribución de probabilidades. En los textos más difundidos de finanzas corporativas (por ejemplo en Brealey & Myers, 1993), se da por establecido que cuando hay posibilidades de diversificación, el riesgo que cuenta es sólo aquel que no se puede diversificar, y debe ser medido en relación al aporte que el proyecto realiza el riesgo de la cartera del inversionista, y como se muestra en este punto, este riesgo quedaría totalmente incluido en la tasa de descuento. En esta descripción asumiremos esa premisa, aún cuando hay planteamientos alternativos¹³.

Riesgo Diversificable y Riesgo No Diversificable

Al inversionista, le importa tanto el valor esperado del fruto de sus inversiones como el riesgo de las mismas, es decir, el valor del portafolio de inversiones que mantiene. Salvo que una nueva inversión esté perfectamente correlacionada con su portafolio (caso en que esta comprando más de lo mismo), la contribución de la nueva inversión al riesgo del portafolio, es menor que la varianza de la nueva inversión. Por esto al valorar sin considerar los efectos de diversificación se estará subvaluando la inversión.

¹³ Por ejemplo la metodología de valoración por opciones reales y el Valor en Riesgo (VaR).

La implicación es que al valorar una empresa, debe considerarse el efecto de la misma sobre el retorno esperado y el riesgo del portafolio diversificado de un inversionista. Se necesita entonces más información: es necesario estimar las correlaciones (o las covarianzas) entre la rentabilidad de la empresa y los otros activos del portafolio.

La “gracia” de la diversificación es que mientras el retorno esperado del portafolio es igual a la suma ponderada de los retornos esperados de sus componentes, la variabilidad del portafolio es menor a la suma ponderada de las variabilidades de sus activos componentes, en la medida que los activos no estén perfectamente correlacionados. Esta reducción de riesgo es llamada efecto diversificación (ver por ejemplo, Statman, 1987). Es una representación cuantitativa de la regla de “no poner todos los huevos en una misma canasta”.

Cuando un inversionista ha invertido en todas las posibles alternativas disponibles en una economía, queda aún una componente de riesgo no diversificable remanente (también denominado riesgo país).

El precio del riesgo queda determinado por la tolerancia o aversión al riesgo de cada inversionista. Cuando existe un mercado de capitales eficiente, el precio del riesgo válido para todos los inversionistas, aunque tengan distinto grado de aversión al riesgo, queda determinado por el mercado. Corresponde al exceso de retorno que recibe el portafolio de riquezas de la economía en relación con retorno del activo libre de riesgo.

3.1 El Modelo CAPM: marco teórico

Uno de los modelos más difundidos para incorporar el riesgo en la tasa de descuento, ha sido el modelo de valoración de activos de capital, más conocido como CAPM (*capital asset pricing model*), el que se deriva del modelo de portafolio de Markowitz (ver Sharpe, 1964). Este considera que las rentabilidades futuras de las distintas alternativas de inversión son variables aleatorias.

La teoría del portafolio considera como pilar básico los beneficios de la diversificación. En este sentido Markowitz se preocupa del grado de covarianza entre las rentabilidades de los activos componentes de un portafolio. La idea central es combinar en un portafolio, activos que no estén perfectamente correlacionados, con el propósito de disminuir el riesgo sin sacrificar rentabilidad.

Sean

$E(r_i)$: valor esperado de la rentabilidad del activo i

σ_i^2 : varianza de la rentabilidad de i

ρ_{ij} : coeficiente de correlación entre los retornos de los activos i y j

E_p : valor esperado de la rentabilidad del portafolio

σ_p^2 : varianza de la rentabilidad del portafolio

X_i : proporción de la riqueza invertida en el activo i

n : numero total de alternativas de inversión

El modelo de Markowitz (Markowitz, 1952) plantea la minimización del riesgo del portafolio (medido por medio de la varianza del mismo) sujeto a un nivel mínimo de rentabilidad esperada por el inversionista. Alternativamente, se puede plantear el problema dual de maximización de la rentabilidad esperada sujeto a un nivel máximo de riesgo del portafolio. En el óptimo las soluciones de ambos problemas coinciden. El modelo de optimización en el primer caso es:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sigma_p^2 \\
 & \text{sujeto a} \\
 & E_p \geq E_0 \\
 & \sum X_i = 1 \\
 & X_i \geq 0
 \end{aligned} \tag{49}$$

E_0 es el nivel mínimo de rentabilidad exigida. Los X_i son la variable del problema y están expresados como proporción (porcentaje) respecto a la riqueza total del inversionista, por lo tanto la suma de dichas proporciones debe ser igual al 100% de la riqueza, esto se traduce en la segunda restricción. Por último, la tercera restricción indica que las soluciones no deben ser necesariamente mayores que cero, en caso de que un X_i resulte positivo en el óptimo, significa que el inversionista deberá invertir en ese activo una proporción X_i , en el caso de que resulta negativo deberá endeudarse en ese activo (por ejemplo vendiendo bonos).

Por definición se tiene además que

$$r_p = \sum X_i * r_i \tag{50}$$

es decir, la rentabilidad del portfolio es igual al promedio de las rentabilidades de cada inversión ponderadas por la proporción de la riqueza invertida en cada una.

Por propiedad de la esperanza matemática:

$$E_p = E(r_p) = \sum X_i * E(r_i) \tag{51}$$

Mientras que la varianza

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2 &= V(r_p) \\
 \Rightarrow \sigma_p^2 &= \sum X_i^2 * \sigma_i^2 + \sum \sum X_i * X_j \text{Cov}(X_i, X_j)
 \end{aligned} \tag{52}$$

La solución del problema se puede ilustrar intuitivamente de forma gráfica. Considerando que

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \rho_{ij} * \sigma_i * \sigma_j \tag{53}$$

Se tiene que en el caso de dos alternativas de inversión el problema se reduce a:

$$\text{Min } \sigma_p = X_1^2 * \sigma_1^2 + X_2^2 * \sigma_2^2 + 2\rho_{12} X_1 X_2 \sigma_1 \sigma_2$$

Sujeto a

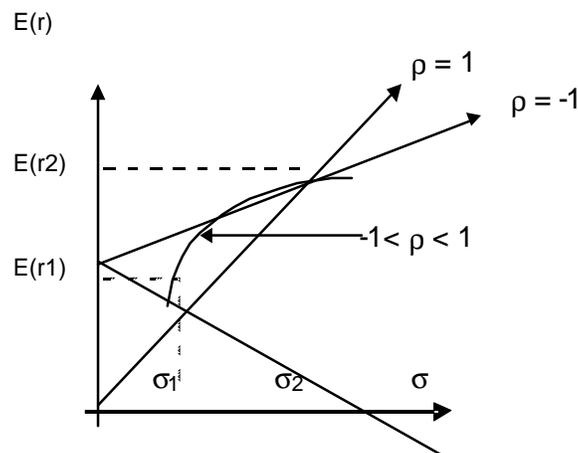
$$\begin{aligned}
 E_p &= X_1 E(r_1) + X_2 E(r_2) \geq E_0 \\
 X_1 + X_2 &= 1
 \end{aligned} \tag{54}$$

De las dos restricciones se puede despejar X_1 y X_2 en función de E_p , $E(r_1)$ y $E(r_2)$, reemplazando en σ_p^2 obtenemos

$$E_p = E(r_p) = f(\sigma_p) \Leftrightarrow \sigma_p = f(E_p) \quad (55)$$

La rentabilidad esperada es función del riesgo o viceversa, más aún, en el caso en que el coeficiente de correlación es igual a más o menos uno, la varianza del portafolio (desviación estándar al cuadrado) es igual a un binomio cuadrado perfecto, por lo que en esos casos extremos de correlación perfecta positiva o negativa la función implícita "f" es una función lineal con modulo (es decir simétrica). Si graficamos estos comportamientos extremos en los ejes rentabilidad esperada vs. riesgo obtenemos lo siguiente:

FIGURA 10
COMBINACIONES RENTABILIDAD VERSUS RIESGO



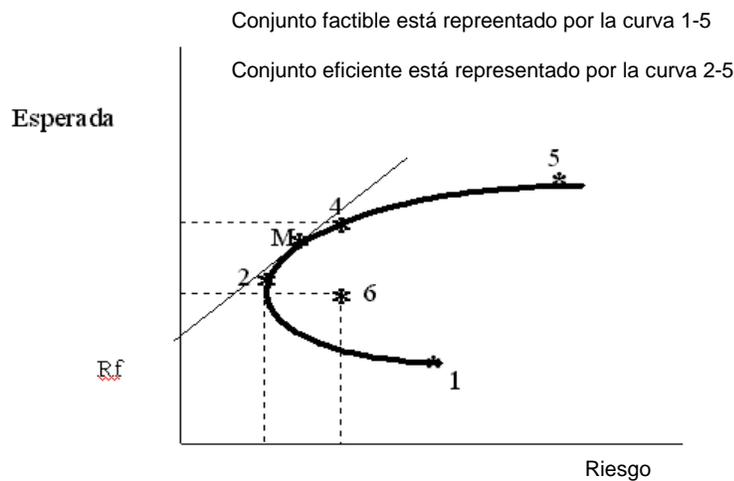
Fuente: Elaboración propia.

Se demuestra que en el caso más general en que $-1 < \rho < 1$ se obtienen curvas intermedias entre las rectas de los valores extremos que representan el riesgo en función de la rentabilidad o viceversa. Se llama a estas curvas frontera de carteras eficientes.

En esta deducción hemos considerado solamente inversiones riesgosas. Si agregamos ahora la posibilidad de invertir en un activo de cero riesgo (por ende situado sobre el eje de la rentabilidad esperada) con rentabilidad R_f , tenemos que el inversionista podrá combinar la inversión en activos riesgosos con el de cero riesgo. Cualquier combinación de un punto de la frontera de carteras eficientes con el activo de cero riesgo será una combinación lineal.

La combinación óptima será aquella en la que la recta de la combinación de activos riesgosos con el de cero riesgo sea tangente a la frontera de carteras eficientes.

Si imponemos que la pendiente de la recta sea igual a la derivada de la curva en el punto M de tangencia tenemos:



$$(E(Rm) - Rf) / \sigma_m = \partial E(r_p) / \partial \sigma_p \tag{56}$$

donde el par $(E(Rm), \sigma_m)$ representa la rentabilidad esperada y el riesgo de la combinación de activos riesgosos. Usamos la letra “m” para denominarle cartera de mercado y levantamos el supuesto de que solamente esté compuesto por dos activos.

Para el cálculo de $\partial E(r_p) / \partial \sigma_p$ se expresa $E(r_p)$ como

$$E(r_p) = a \cdot E(ri) + (1-a) \cdot E(rm) \tag{57}$$

donde $E(ri)$ es la rentabilidad esperada de la inversión en un activo i cualquiera, es decir, la rentabilidad de la cartera de se expresa como la combinación de un activo i cualquiera y el resto de los inversiones.

Análogamente

$$\sigma_p = \sqrt{a^2 \sigma_i^2 + (1-a)^2 \sigma_m^2 + 2a(1-a)Cov(i,m)} \tag{58}$$

Se calcula

$$\partial E(r_p) / \partial \sigma_p = \partial E(r_p) / \partial a \cdot \partial a / \partial \sigma_p = \partial E(r_p) / \partial a \cdot (1 / \partial \sigma_p / \partial a)$$

Luego en la condición de óptimo anteriormente planteada se llega a:

$$(E(rm) - Rf) / \sigma_m = \partial E(r_p) / \partial \sigma = (E(ri) - E(rm)) \cdot \sigma_m / (Cov(i,m) - \sigma_m^2) \tag{59}$$

Reordenando términos se obtiene el modelo de valoración de activos de capital:

$$E(ri) = Rf + Cov(i,m) / \sigma_m^2 \cdot (E(rm) + Rf) \tag{60}$$

donde:

$E(R_i)$: retorno esperado sobre el activo riesgoso i ;

R_f : tasa libre de riesgo;

β_i : coeficiente de riesgo sistemático del activo i ; y

$E(R_m)$: retorno esperado sobre el portafolio de mercado m .

El coeficiente de riesgo sistemático o factor beta se define por:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)} \quad (61)$$

Siendo:

$Cov(R_i, R_m)$: Covarianza entre el activo riesgoso i y el portafolio de mercado m ; y

$Var(R_m)$: Varianza del portafolio de mercado m .

Siguiendo el modelo CAPM, el retorno esperado de un activo riesgoso puede expresarse como la suma del retorno de un activo libre de riesgo y del premio por asumir ese riesgo. El precio es entonces, el producto del factor beta por el precio del riesgo descrito arriba.

El valor de beta puede ser positivo o negativo, dependiendo de cómo covaríen el activo riesgoso y el portafolio de mercado. Usualmente es mayor que cero, y se sitúa en el entorno de la unidad. El beta asociado al portafolio de mercado es igual a uno. Si el beta del activo i es mayor que uno, entonces se dice que el activo es más volátil que el mercado.

El coeficiente de riesgo sistemático representa el riesgo no diversificable, es decir, el riesgo de la economía como un todo. El riesgo total se puede definir como:

$$Riesgo\ Total = Riesgo\ sistemático + Riesgo\ no\ sistemático$$

El riesgo no sistemático se puede eliminar mediante la diversificación de las inversiones de los individuos, por lo tanto el único riesgo relevante y no diversificable es el sistemático.

El riesgo no sistemático se puede eliminar mediante la diversificación de las inversiones de los individuos, por lo tanto el único riesgo relevante y no diversificable es el sistemático¹⁻² se descarta pues al mismo riesgo se puede obtener mejor rentabilidad

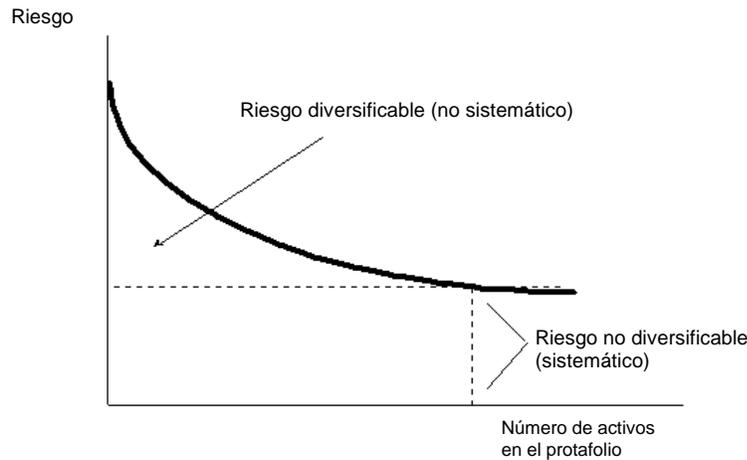
En efecto, la varianza del portafolio (riesgo total) es:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} X_i X_j Cov_{ij} \quad (62)$$

$$Cov_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Siendo X la fracción de riqueza invertida en cada activo riesgoso.

**FIGURA 11
DIVERSIFICACIÓN DE RIESGO**



Fuente: Elaboración propia.

Vemos como los beneficios de la diversificación del riesgo, disminuyen al aumentar el número de activos. Sabemos entonces que la relación entre riesgo y rentabilidad (de acuerdo a este modelo) es lineal, lo que significa que la rentabilidad de un activo se “explica” en función de la cantidad de riesgo que tiene.

$$E(R_i) = R_f + [E(R_M) - R_f] \cdot \frac{Cov(R_i, R_M)}{Var(R_M)} \tag{63}$$

rentabilidad esperada tasa libre de riesgo premio por riesgo riesgo sistemático

- $Cov(R_i, R_M) / Var(R_M) = \beta_i$ representa la cantidad de riesgo y se denomina riesgo sistemático.
- Por definición sabemos que $\beta_M = 1 = Cov(R_M, R_M) / Var(R_M) = Var(R_M) / Var(R_M) = 1$. De esta manera podemos decir que:
 - $\beta > 1 \Rightarrow$ Activo **más** volátil o sensible que el "mercado"
 - $\beta < 1 \Rightarrow$ Activo **menos** volátil o sensible que el "mercado"

¿Para que sirve el modelo en términos de evaluación de proyectos? Fundamentalmente para ajustar por riesgo la tasa de descuento con la que se calculará el VPN:

$$VPN = \sum_{t=0}^N \frac{FC_t}{(1+r)^t}$$

Calculado de acuerdo a CAPM Numerador refleja riesgo no sistemático Denominador refleja riesgo sistemático

Aplicación del modelo para el cálculo de tasas de descuento ajustadas por riesgo

Veamos como se determinan ciertos parámetros necesarios para aplicar el modelo:

- Determinación de la tasa libre de riesgo (R_f) a partir de las Tasas Internas de Retorno de los pagarés PRC del Banco Central y de la serie posterior (a partir de 2002) los BCU. Se debe testear la hipótesis de que estas tasas efectivamente están libres de riesgo, para ello se deben correlacionar las TIR de los PRC del Banco Central (o las tasas de algún otro instrumento financiero de alguna institución estatal) con las rentabilidades de mercado para comprobar que tienen un coeficiente de riesgo sistemático beta cercano a cero¹⁴.
- Determinación de la tasa de retorno de mercado (R_m) y del premio al riesgo ($R_m - R_f$): La Rentabilidad esperada de mercado es en realidad el punto más débil de la aplicación del CAPM, el problema es determinar ¿Cuál es el portafolio de mercado?. Teóricamente representa el valor de mercado de todos los activos de la economía (debidamente ponderados).
- En la práctica esta tasa se puede estimar con al menos tres métodos, a partir de información macroeconómica de Cuentas Nacionales, a partir de información de las Fichas Estadísticas Codificadas Uniformes (fichas FECU) de la Superintendencia de Valores y Seguros), y a partir del Índice General de Precios de Acciones IGPA o el IPSA utilizando como fuente de información la Bolsa de Santiago. Este último método es más aceptado por estar basado en valores de mercado.

Determinación de los coeficientes beta para las empresas que transan en Bolsa

- Es posible obtener los valores de sus coeficientes de riesgo sistemático (β) para aplicar la ecuación (1). Esos coeficientes β se pueden obtener desde sitios de información financiera como *yahoo* ó *económica*.

Para las empresas que no transan en Bolsa se buscan firmas similares que sí transan en Bolsa, y se deben realizar las siguientes actividades:

- Identificación de una empresa similar (proxy) en cuanto a productos/servicios y ubicación.
- Determinación de los retornos accionarios de la empresa proxy a partir de información del Bolsa en forma mensual, trimestral y anual.
- Cálculo del beta en base a regresiones entre los retornos de la empresa proxy y el mercado.
- Los dos pasos anteriores se pueden omitir si se cuenta con los betas ya calculados en alguno de los sitios de información financiera ya mencionados.
- Transformación del beta de la empresa proxy en un beta para la empresa objetivo, ajustando por diferencias entre las estructuras de financiamiento de cada una. Para ello se debe:

"Desapalancar" el beta de la empresa proxy

Para determinar el beta de la empresa objetivo se requiere ajustar el de la empresa proxy por la estructura de endeudamiento, mediante la siguiente fórmula:

$$\beta_L = [1 + (1 - t_c) D/P] * \beta_U \quad (64)$$

¹⁴ Diversas valorizaciones realizadas a la fecha comprueban que esta hipótesis es válida.

donde;

β_L = riesgo de la empresa proxy con deuda (leveraged)

β_U = riesgo de la empresa proxy sin deuda (unleveraged)

D/P = razón deuda / capital de la empresa proxy

t_c = tasa de impuesto

Se despeja

$$\beta_U = \frac{\beta_L}{[1 + (1 - t_c) D/P]} \quad (65)$$

Corresponde al beta "desapalancado" de la empresa proxy.

"Apalancar" el beta anterior con la estructura deuda / capital de la empresa objetivo

$$\beta_{oL} = [1 + (1 - t_c) D/P_o] * \beta_U \quad (66)$$

Donde;

β_{oL} = riesgo de la empresa objetivo con deuda (leveraged)

β_U = riesgo de la empresa proxy sin deuda (unleveraged)

D_o/P_o = razón deuda / capital de la empresa objetivo

t_c = tasa de impuesto

- Cálculo del costo de capital (K_p) de la empresa objetivo, a partir del beta anterior usando la ecuación (1) del CAPM.
- Cálculo del costo promedio ponderado del capital para la empresa objetivo según ecuación (2), tomando promedio del costo patrimonial anterior con el costo de la deuda, usando como ponderadores el porcentaje de financiamiento con deuda y con capital propio de la empresa objetivo.
- Si los flujos de caja a descontar son los del inversionista, basta con trabajar con el costo K_p , si se trabaja con el flujo de caja de los activos este se debe descontar con el costo promedio ponderado del capital.
- El beta de una compañía es típicamente estimado a través de una regresión con datos históricos, por lo cual es importantísimo la calidad de la información.

A modo de ejemplo: Merrill Lynch estimó el beta para Hewlett Packard a partir de 60 observaciones de retornos de su acción y S&P 500 y obtuvo los parámetros de la siguiente ecuación:

$$\tilde{r}_{it} = 0.81 + 1.81\tilde{r}_{mt} + \tilde{e}_t \quad (67)$$

$\beta=1.81$ significa alto riesgo. Claramente mayor que la volatilidad del portafolio de mercado.

El costo promedio ponderado del capital

El costo de capital promedio ponderado (WACC por su sigla en inglés) asume que la estructura de capital es replicable y nos permite descontar los flujos generados por el proyecto puro, es decir el valor económico del activo o de una empresa.

El valor $E(R_i)$ obtenido de acuerdo al modelo CAPM (redefinido como Re^{15} en la ecuación siguiente), cuando se considera como rentabilidad de mercado a la rentabilidad accionaria de la Bolsa, es la rentabilidad mínima exigida por los accionistas a la empresa, es decir, el costo del patrimonio K_p , dado que tienen inversiones en otra serie de empresas (cartera diversificada). Ahora bien, el costo de capital de la empresa será un promedio ponderado de dicho costo del patrimonio con el costo de la deuda (interés promedio del pasivo), donde los ponderadores dependerán de las proporciones Deuda/Capital, es decir, del nivel de endeudamiento de la empresa.

$$WACC = \frac{Re \cdot C}{D + C} + i \cdot \frac{D}{D + C} \quad (68)$$

Tanto el CAPM como el WACC “aproximan” el costo de capital para efectos de valoración. Una aproximación más exacta consiste en valorar cada componente del flujo de caja de acuerdo a su propio costo de capital. Esto se conoce como valoración por componentes o valor presente neto ajustado:

$$VPN_{Aj} = VPN_{Caso_Base} + VPN_{Efectos_de_Financiamiento} \quad (69)$$

Si se usa el WACC, se deben descontar los flujos de la inversión “pura” (sin deuda). Se obtiene un Valor Presente de los activos. Si se desea estimar el Valor Presente del Patrimonio, al valor anterior se le resta el Valor Presente de la deuda. Es equivalente a descontar los flujos con deuda (“inversión financiada”), con la tasa de costo del patrimonio Re (ó cost of equity ó rentabilidad patrimonial ó rentabilidad sobre el capital).

De esta manera, la tasa de descuento relevante para descontar los flujos de caja del inversionista, es directamente la obtenida del modelo CAPM, mientras que la tasa relevante para descontar los flujos de caja de los activos (para el cálculo del valor de la empresa), será la tasa de costo promedio ponderado del capital (el WACC), que promedia la tasa del inversionista con la tasa de interés de las deudas de la empresa.

Validez del Modelo CAPM

La evidencia empírica es mixta. Por una parte se ha determinado que los retornos promedios de largo plazo están significativamente relacionados con el beta, sin embargo el CAPM no “parece”

¹⁵ Por Return on Equity.

funcionar en los pasados 30 años. Fama y French (1996) sugieren que el CAPM está muerto porque desde los 60s se ha observado entre otras cosas lo siguiente:

- Acciones de empresas pequeñas han tenido un retorno significativamente mejor que lo que predice CAPM.
- Acciones con bajas razones precio a valor libro han tenido una rentabilidad significativamente mejor que lo que predice CAPM
- Después de ajustar por los dos factores anteriores, el coeficiente beta tiene poco poder de explicación de los retornos de una acción.

El análisis anterior conduce al llamado “modelo de tres factores” de Fama y French (1996).

Además, nadie sabe con certeza como definir y medir el portafolio de mercado. Si usamos el índice de mercado equivocado puede llevar a respuestas erróneas. En estricto rigor, la cartera de mercado debería incluir todas las inversiones riesgosas, no sólo acciones sino también bienes raíces, inversión en capital humano y otras. Esta deficiencia práctica fue enfatizada por Roll (1977). Esta crítica pretende ser superada por algunos modelos alternativos que se reseñan más adelante.

Asimismo, desde el punto de vista econométrico, y considerando que en muchos casos se debe trabajar con series cortas de datos, el CAPM es difícil de probar y también de rechazar.

No obstante las críticas mencionadas, en términos prácticos el modelo CAPM sigue siendo una herramienta muy atractiva para valorar activos riesgosos. Su fortaleza proviene principalmente de la relativa facilidad de su aplicación:

- Es muy simple y entrega respuestas muy razonables.
- Distingue claramente entre riesgo diversificable y no-diversificable. Ciertamente el modelo CAPM no entrega todas las explicaciones a la forma en como empíricamente se determina el retorno de los activos. Los modelos más utilizados son aquellos que surgen como extensiones naturales a este modelo. Algunos de ellos¹⁶ son:

Modelos alternativos al CAPM

Sólo a modo de referencia, se reseñan algunos de los “competidores” del CAPM, muchos de los cuales son variantes y perfeccionamientos del mismo modelo:

- **Consumption CAPM:** Evita el problema de especificar y medir el “verdadero” portafolio de mercado, al usar como principal variable explicativa la tasa de crecimiento del consumo (Breedon, 1979), pero no ha funcionado bien con datos de la economía de EEUU. Probablemente uno de sus principales problemas es que el consumo es difícil de medir y no se ajusta inmediatamente a cambios en la riqueza.
- **CAPM de Múltiples Factores:** Se incluyen factores adicionales a la rentabilidad de mercado. En general son difíciles de especificar y medir. En términos empíricos es parecido al APT. Destacan en particular los modelos de Fama y French, principalmente el modelo de tres factores (1992).
- **CAPM Internacional:** Una manera de evitar el problema de trabajar con un portafolio no observable (la rentabilidad de mercado) es usar un portafolio “mundial”. Un proxy típicamente usado para estos efectos es un índice proveniente de los países que permiten

¹⁶ Otro trabajo complementario se desarrolla en Bogue y Roll (1974).

un libre flujo de capitales (OECD). Bajo este esquema, estaríamos interpretando a la OECD como un solo gran país (Campbell, 1993).

Modelo APT, Arbitrage Pricing Theory

Considerando su difusión como modelo alternativo al CAPM, presentamos a continuación una breve síntesis de la APT (ver Ross, 1976). Este modelo supone que los retornos dependen de una serie de factores:

$$\text{Retorno} = a + b_1(\text{rfactor1}) + b_2(\text{rfactor2}) + \dots \quad (70)$$

Asimismo, un portafolio que no está expuesto a ninguno de estos factores debe ofrecer la tasa libre de riesgo: $r = a = r_f$, lo cual es correcto cuando todos los b 's son igual a cero. Pero en general los retornos esperados dependen de la exposición a los factores; así:

$$\text{Retorno} = r_f + b_1(\text{rfactor1} - r_f) + b_2(\text{rfactor2} - r_f) + \dots \quad (71)$$

Donde:

rfactor_i = retorno esperado de un portafolio expuesto sólo al factor i .

Los factores pueden ser interpretados como:

Cambios inesperados en variables macroeconómicas

Betas con respecto a portafolios específicos de instrumentos.

En este caso, cada portafolio debería ser independiente de otros factores o portafolios y altamente correlacionado con factores macroeconómicos de interés para los inversionistas.

No obstante las aparentes bondades del modelo APT, y ésta es su gran crítica (teórica), no existe ninguna teoría que nos diga cuales son los factores correctos: el trabajo con APT es netamente empírico y caso a caso. La praxis muestra, sin embargo que en algunos de esos casos los modelos tipo APT entregan mejores resultados (ex post) que el modelo CAPM tradicional.

3.2 Una aplicación de CAPM a la evaluación de un proyecto de BancoEstado

Para aplicar la metodología CAPM descrita anteriormente, se requieren los betas de empresas "proxys". Para ello se realizó una búsqueda de información sobre betas en el sitio financiero "economática". Dado que sólo se cuenta con información para empresas que transan en bolsa, se obtuvieron datos de bancos.

Los datos de betas de empresas "Proxy" se obtuvieron de economática (fuente: www.economática.com) Con los datos anteriores, se aplicaron las ecuaciones 5 y 6 de la metodología (para apalancar y desapalancar betas), y se obtienen así los siguientes betas desapalancados¹⁷:

¹⁷ Puede ser discutible considerar el Scotiabank (Sud ameris - A), debido a la baja liquidez de sus acciones, se puede observar que el precio casi no ha variado en los últimos años, de ahí el beta cercano a cero.

TABLA 11
BETAS DE BANCOS "PROXY"

	Beta promedio	Deuda/patrimonio	Beta desapalancado
BSANTANDER	0,41	11 110	0,040112314
CHILE	0,47	12 795	0,040448026
BBVACL	0,46	13 659	0,037286303
SUD AMER-A	-0,04	10 101	-0,004262652
BCI	0,52	14 560	0,039740768

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Economática.

Con estos datos se tiene un beta promedio (desapalancado) para el sector de 0.031. Falta entonces calcular R_f y $E(R_m)$ para poder aplicar la ecuación (66)

$$E(R_i) = R_f + \beta_i \cdot [E(R_m) - R_f]$$

En artículo publicado el 21 de octubre del año 2003 en el Diario Financiero, el Profesor Salvador Zurita establece que la tasa libre de riesgo para valorar emprendimientos de largo plazo asciende a 4,48% dato que se obtiene de observar los BCU a 10 años. En el documento "La Tasa Social de Descuento en Chile", Contreras, Cartes y Cruz en el año 2005, (Serie Gestión N° 77 del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile) determinan una tasa libre de riesgo de 4,2%, pero considerando datos más recientes se opta por trabajar con la tasa de 4,5%.

Por otra parte Salvador Zurita, en su paper presentado al IV Encuentro Internacional de Finanzas (Viña del Mar el 9 de enero de 2004), en coautoría con Rodrigo Fuentes (Banco Central) se determina un premio al riesgo de largo plazo para Chile en un rango (aproximado) entre 9% y 12%, se trabajará con 10%.

En síntesis, de acuerdo a las fuentes citadas, y en base a fuentes secundarias internacionales aceptadas en el mercado financiero local y extranjero (bloomberg, economática y otras), los factores para aplicar la ecuación serían:

Rentabilidad del Mercado	: 14,5%
Tasa libre de riesgo	: 4,5%
Premio por riesgo	: 10,00%

De forma que la tasa de descuento privada considerando que la institución no tiene deuda sería de 4,8 % según el siguiente detalle:

TABLA 12
TASA DE DESCUENTO SIN APALANCAMIENTO

Beta	0,031
$E(R_m)$	14,5%
R_f	4,5%
Premio por riesgo	10,0%
Tasa de descuento	4,8%

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo al balance a septiembre de 2006 el total de pasivos más patrimonio de Banco Estado es de 10.797.990 millones de pesos, siendo el patrimonio neto de 493.092 millones de pesos, de donde se deduce que el ratio deuda / patrimonio es de $10.304.898 / 493.092 = 20.1$. De forma que la tasa de descuento de BancoEstado resulta ser:

TABLA 13
TASA DE DESCUENTO CON APALANCAMIENTO

Deuda/patrimonio	Beta apalancado	Tasa privada
20,10	0,542248346	9,9%

Fuente: Elaboración propia.

Luego nuestra recomendación es trabajar con una tasa de descuento de 10%.

4. Incertidumbre en decisiones secuenciales: opciones reales y árboles de decisión¹⁸

4.1 Introducción a opciones reales

Si bien la teoría de las opciones reales cuenta ya con unos 25 años de edad (véase, por ejemplo, Trigeorgis, 1996, para un resumen del estado del arte), sólo a partir de mediados de la década de 1980 la investigación empírica en esta área ha tenido un mayor desarrollo. Véase, por ejemplo, Brennan y. Schwartz (1985); McDonald y Siegel (1986); Paddock, Siegel y Smith (1988); Quigg (1993) y Tufano (1998).

En un estudio reciente, Moel y Tufano (2000) examinaron las decisiones de apertura y cierre de minas de oro. Su base de datos consideró a 285 minas de ese metal explotadas en Norteamérica en el período 1988-1997. Entre sus hallazgos, se encuentra que la probabilidad de apertura de una mina está relacionada a factores de mercado (nivel y volatilidad del precio de mercado del oro y nivel de las tasas de interés) y específicos de la mina (costos fijos y variables y nivel de reservas).

Asimismo, los autores descubrieron que la decisión de cierre de una mina se relaciona directamente con la gestión de la empresa que la explota. En particular, la rentabilidad de otras minas explotadas por la empresa y de otros negocios ligados a ésta será gravitante en la decisión de cierre.

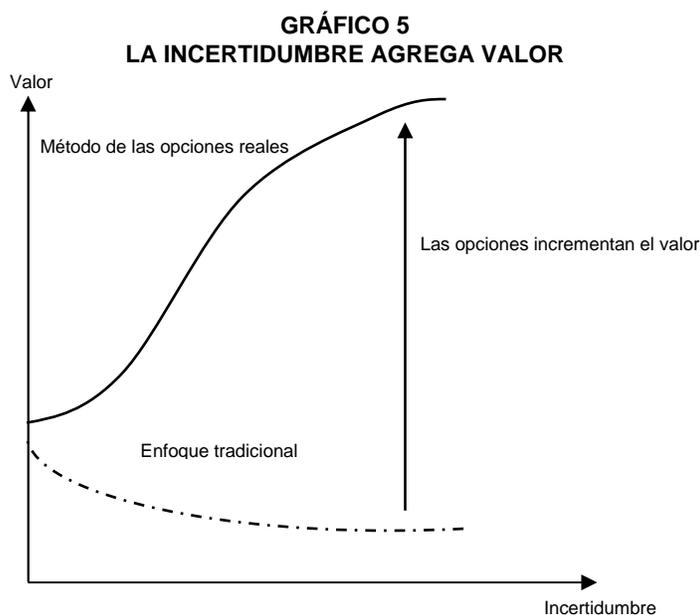
¹⁸ Este punto se ha tomado casi íntegramente de Contreras E, y Fernández V. (2003).

En el área de la tecnología, Schwartz y Moon (2001) utilizaron las técnicas de las opciones reales para valorizar la empresa “eBay”. En particular, desarrollaron un modelo que incorpora la incertidumbre en los costos y los efectos tributarios de la depreciación. Asimismo, utilizaron la volatilidad del precio de la acción y su beta para inferir un parámetro razonable para la tasa de crecimiento de las ganancias. Los autores señalan que esta clase de modelo se puede aplicar a cualquier empresa de alto crecimiento.

Como se aprecia, la metodología de las opciones reales proporciona un marco analítico para evaluar correctamente los proyectos de inversión que involucran algún grado de flexibilidad en su fecha de iniciación, proceso productivo y eventual cierre. Esta ha cobrado particular popularidad en el área de los recursos naturales. En los últimos años, sin embargo, las opciones reales también han sido utilizadas para analizar el desarrollo de patentes de invención, la decisión de transar acciones en la bolsa y la determinación de introducir nuevos productos o procesos productivos, entre otras muchas aplicaciones.

El valor de la flexibilidad y las opciones reales: conceptos preliminares

En el marco de la teoría de opciones, el valor de la flexibilidad futura es mayor en entornos más inciertos. Por ejemplo, una tasa de interés alta y una fecha de puesta en marcha lejana en el tiempo (cuando es posible aplazar la inversión) no reducen necesariamente el valor de un proyecto de inversión. Incrementos en estas variables reducen el valor presente neto estático de un proyecto, pero pueden aumentar el valor de la opción del proyecto (valor de la flexibilidad). Ello se ilustra en el Gráfico 5:



Fuente: Amram y Kulatilaka (1999).

Las opciones reales se pueden dividir en seis tipos generales: (1) opciones de crecimiento; (2) opción de expandir la escala; (3) opción de esperar; (4) opción de cambiar los insumos, productos o procesos productivos; (5) la opción de contraer la escala; (6) opción de abandono.

Las opciones de abandono son importantes en empresas intensivas en capital, en las cuales es deseable contar con la flexibilidad suficiente para capturar algún valor de reventa de los activos, en caso de que éstos se vuelvan menos valiosos para la empresa. Asimismo, la opción de cierre es altamente valiosa para las empresas con altos costos variables. La opción de contraer o expandir, en

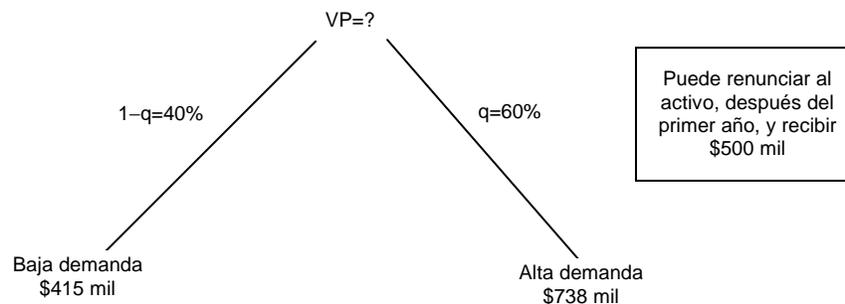
tanto, es una forma flexible de tratar con una demanda cambiante. Ejemplos son la habilidad de reducir la tasa a la cual es extraído un mineral y la facilidad para agregar temporalmente turnos extras en una empresa.

La opción de cambio involucra la habilidad para alterar la mezcla de productos, la flexibilidad en el uso de la tierra (por ejemplo, cambiar cultivos agrícolas), la habilidad para cambiar insumos en respuesta a cambios en precios, entre otros. A su vez, la opción de esperar (adelantar o retrasar) es valiosa en todas aquellas actividades en que la inversión necesaria para comenzar a operar es irreversible. Por último, las opciones de crecimiento involucran la expansión de un negocio para desarrollar productos derivados. Por ejemplo, una empresa que fabrica esquís puede desear expandir su negocio a la producción de botas de esquiar.

Un par de ejemplos ilustrativos

Veamos un par de ejemplos esquemáticos sobre las opciones de abandono y de espera.

a) Opción de abandono:



El valor esperado del flujo de caja en $t=1$ viene dado por:

$$E(FC) = \text{Pr}(\text{alta demanda}) * \$738 + \text{Pr}(\text{baja demanda}) * \$415 = \$609 \text{ mil.}$$

Si la tasa de descuento es 10%, entonces $VP = \$609 / 1.1 = \553 mil. Pero, si el proyecto no es exitoso el primer año, es mejor abandonar y recibir \$500 mil. ¿Cuál es el valor de la opción? Nos encontramos frente a una put (opción de venta) con vencimiento en 1 año, con un precio de ejercicio de \$500 mil y donde el valor presente del activo subyacente es \$553 mil. Suponemos que la tasa libre de riesgo es 5% por período.

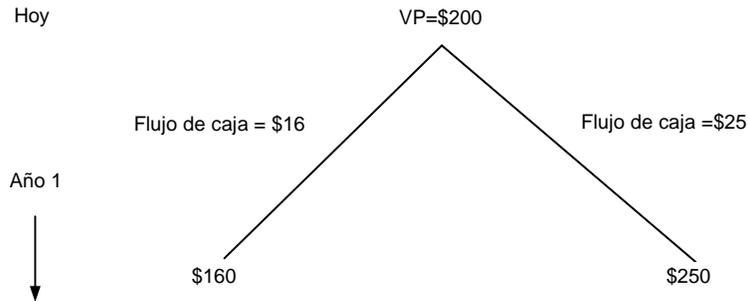
Además, de lo anterior, sabemos que el valor del activo puede aumentar en 33% ($=738/553-1$) o caer en 25% ($=415/553-1$). Por otra parte, en un mundo neutral al riesgo los inversionistas exigen como retorno la tasa libre de riesgo. Por tanto, si p representa la probabilidad de alta demanda en un mundo neutral al riesgo, se tiene que: $p*0.33+(1-p)*(-0.25)=0.05 \Rightarrow p=0.52$

Si enfrentamos el evento de alta demanda, la opción de abandono vale cero. En tanto, si el proyecto es un fracaso, podemos venderlo y ahorrar \$85 mil $=(\$500 \text{ mil} - \$415 \text{ mil})$. De ello, $E(\text{opción}) = p*0 + (1-p)*85 = 0.52*0 + 0.48*85 = \41 mil y el valor presente de la opción de abandono $= \$41 / 1.05 = \39 mil.

Por lo tanto, el proyecto vale $= \$553 \text{ mil} + \$39 \text{ mil} = \$592 \text{ mil}$.

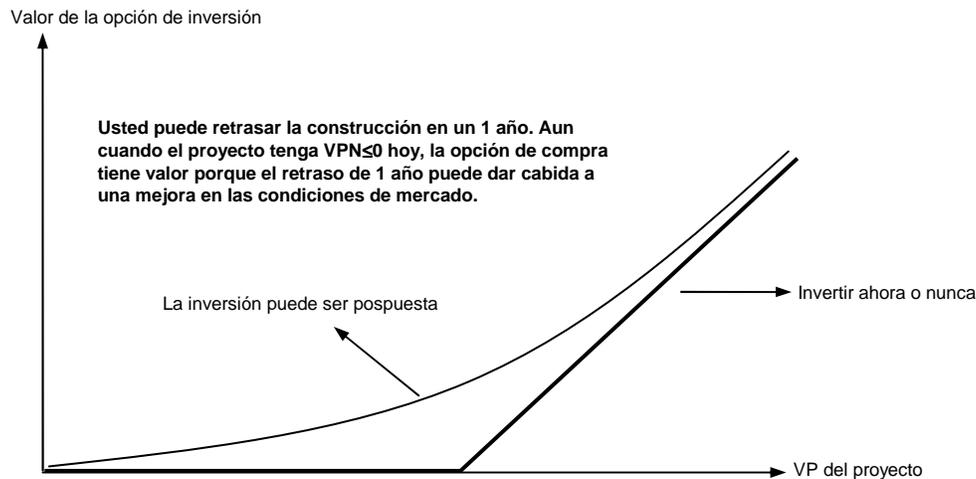
b) Opción de esperar

La oportunidad de invertir en un proyecto con $VPN > 0$ equivale a una opción de compra en el dinero (“in-the-money”). El momento óptimo para invertir es aquel en que ejercemos la opción en el momento apropiado. Si el proyecto es bueno, esperar para invertir puede implicar una pérdida de flujos de caja altos y próximos en el tiempo. Si el proyecto es malo, esperar puede ahorrarnos una mala decisión. Ello se ilustra en el Gráfico 2. Supongamos los siguientes flujos de caja:



Esto es, el valor presente del proyecto es \$200. Si la demanda cae el año 1, el flujo de caja es \$16 y el valor del proyecto cae a \$160. Si la demanda es alta en un año más, el flujo de caja es \$25 y el valor del proyecto aumenta a \$250. Aunque el proyecto dura indefinidamente, supongamos que podemos retrasar la decisión de invertir en 1 año. Al invertir este año, podemos ganar \$16 o \$25 en flujos de caja. Al posponer la inversión, sacrificamos dichos flujos de caja, pero ganamos en información.

**GRÁFICO 6
VALOR DE ESPERAR**



Fuente: Amram y Kulatilaka, 1999

Aplicando una lógica similar a la del caso anterior, obtenemos que la probabilidad libre de riesgo puede obtenerse de la ecuación $E(r) = p \cdot 0.375 + (1-p) \cdot (-0.12) = 0.05$, lo cual implica que $p = 0.343$.

Supongamos que la inversión inicial es \$180. Por lo tanto, tenemos una opción de compra con un precio de ejercicio de \$180. Si la demanda cae, el precio de la opción es 0. Si la demanda aumenta, el valor de la opción es $= \$250 - \$180 = \$70$. En consecuencia, el valor corriente de la

opción (abierta) es $= (0.343*70 + 0.657*0)/1.05 = \22.9 millones. Vale sólo \$20 millones si la ejercemos hoy ($=\$200-\180). Por lo tanto, aun cuando el proyecto tenga $VPN > 0$, no deberíamos invertir ahora. Una estrategia superior es esperar.

Aplicación a proyectos

Como ya se ha señalado, el método del VPN, ya sea determinístico o con consideraciones de riesgo (simulación estática, simulación dinámica, análisis de sensibilidad, análisis de escenarios, ajuste a la tasa de descuento) no conduce a decisiones erróneas cuando un proyecto es muy bueno o muy malo. Sin embargo, en casos en que la rentabilidad del proyecto es cercana al límite exigido, será necesario precisar la estimación, aplicando métodos más avanzados, tales como la valoración por opciones reales.

El VPN no relaciona el nivel de riesgo con las posibilidades de respuesta operacional del proyecto. Tampoco considera la capacidad de reacción que tiene el administrador de un proyecto para responder ante contingencias (variación de los parámetros que aportan incertidumbre al proyecto), siendo éste sólo un ejecutor de la planificación inicial.

Estas respuestas operacionales ante contingencias son las que se conocen como flexibilidades. Las flexibilidades implican no linealidades, es decir, que el valor esperado de los flujos de caja de cada período no puede ser estimado directamente a partir de los valores esperados de las variables inciertas que determinan dicho flujo de caja¹⁹. Otro supuesto de la práctica habitual del VPN, es que el nivel de riesgo es constante a lo largo del horizonte de evaluación (supuesto implícito al descontar con una tasa constante calculada según CAPM).

Considerando que existen estos vacíos, y que éstos pueden impactar fuertemente en la realización de los proyectos, algunas tesis desarrolladas en los programas de Magíster del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile, se han abocado a la aplicación de las opciones reales a proyectos.

La ecuación de Black-Scholes y el método de opciones reales

Comencemos analizando las posibilidades de aplicar la ecuación de Black y Scholes (1973) de valoración de opciones. Como es sabido, el aporte de estos investigadores fue el encontrar una solución analítica para el precio una opción europea, usando un modelo de equilibrio general y el argumento de arbitraje. La contribución de los autores radica en replicar el valor de una opción mediante una estrategia de inversión dinámica en un activo libre de riesgo (bono) y el activo subyacente, una acción, en este caso.

La derivación de la fórmula asume que el activo subyacente no paga dividendos y que las opciones son europeas. Las fórmulas de una opción de compra (call), c , y de una opción de venta (put), p , vienen dados por:

$$c = S N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2) \quad (72)$$

$$p = K e^{-rt} N(-d_2) - S N(-d_1) \quad (73)$$

donde:

$N(\cdot)$ = distribución acumulada de una normal estándar

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

S: precio spot de una acción

¹⁹ En general, la no linealidad se puede resumir en que el valor esperado $E(\cdot)$ de un flujo de caja $FC = ax + by$, será distinto a $aE(x) + bE(y)$.

K: precio de ejercicio de la opción

σ : desviación estándar de la rentabilidad asociada a la acción

r: tasa de interés libre de riesgo

T: período de maduración de la opción, expresado en años

En algunos casos particulares de opciones reales, esta ecuación puede ser utilizada para valorar activos reales. Un ejemplo de opción real puede ser la de ampliar la planta del proyecto que hoy vale S (su valor presente neto) al cabo de un período T, lo cual implica un valor adicional K. En este caso se puede valorar la opción (de ampliar) directamente a partir de la ecuación, de forma que el valor del proyecto resulta ser igual a S + c.

Desafortunadamente, la complejidad de las opciones asociadas a las flexibilidades de los proyectos reales impide una aplicación directa de la ecuación de Black y Scholes, recurriéndose en la mayor parte de los casos a métodos de simulación.

Evaluación mediante probabilidades ajustadas por riesgo en una simulación de precios

Cox y Ross (1976) propusieron un procedimiento alternativo basado en los resultados obtenidos por Black y Scholes y una técnica de reducción a un mundo de neutralidad frente al riesgo. Dos activos que son sustitutos perfectos deben obtener la misma tasa de retorno en equilibrio. Este es el caso de una opción que puede ser replicada (reproducida) mediante un portafolio dinámico con posiciones en el activo subyacente y endeudamiento (bono).

Si la solución para el valor de la opción es la misma para cualquier estructura de preferencias, entonces es posible suponer neutralidad frente al riesgo. Suponiendo que todos los inversionistas son neutrales al riesgo, el activo subyacente y la opción deben rendir la tasa libre de riesgo. El precio de la opción debe ser igual al precio terminal esperado de la opción, descontado a la tasa libre de riesgo.

Para opciones complejas (sin solución analítica), Boyle (1977) propuso la aplicación de simulación de Montecarlo. Este se basa en el enfoque de Cox y Ross que requiere que se pueda formar un portafolio que replique exactamente los retornos de una opción, usando una combinación de endeudamiento libre de riesgo y de posiciones en el activo subyacente.

Según el método de Boyle/Cox-Ross, la simulación sobre el precio se puede modelar mediante la construcción de la variable aleatoria:

$$X_{t+1} = X_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z} \quad (74)$$

Donde:

X_t : Precio de la opción sobre el activo S, en el período t.

r : Tasa libre de riesgo.

σ : Desviación estándar de los retornos

z : Variable aleatoria normal estándar.

Es decir, la tendencia del proceso estocástico es $r - \sigma^2/2$.

Brennan y Schwartz (1985) proponen un modelo similar, pero considerando que la tendencia del proceso estocástico es $r - d$, donde d es el dividendo marginal o rendimiento de conveniencia (convenience yield). Este ajuste es necesario para la valoración de activos que generan ganancias (de la misma forma en que se ajusta la ecuación de Black y Scholes por este concepto).

Constantinides (1978) derivó un método de evaluación generalizado mediante reducción a un mundo sin riesgo, similar al procedimiento propuesto por Cox y Ross (1976), pero basado en los supuestos del CAPM y que no requiere suponer la existencia de un portafolio réplica. Entonces, para los propósitos de evaluar un activo derivado, se puede suponer que todos los inversionistas son neutrales al riesgo y, como en un mundo neutral al riesgo, utilizar una tasa libre de riesgo para el retorno de cualquier activo.

Se modela un proceso de Wiener para el precio:

$$dx = \mu dt + \sigma dW \quad (75)$$

donde μ y σ son la tendencia y la desviación estándar instantáneas del precio x , y dW es el incremento de un proceso de Wiener.

Para ajustar a un mundo sin riesgo, se usa como tendencia

$$\mu^* = \mu - \lambda \rho \sigma \quad (76)$$

El término $\lambda \rho \sigma$ se deriva de imponer que el retorno del proyecto satisface el CAPM, donde $\lambda = (R_m - r) / \sigma_M$ (valor esperado de la prima por riesgo del mercado dividida por la desviación típica del mercado) y ρ es el coeficiente de correlación instantáneo entre dW y el retorno de mercado. De esta forma se tiene que μ^* es una tendencia ajustada por riesgo.

Finalmente, los flujos de caja esperados para cualquier derivado de este mundo ficticio son descontados con la tasa libre de riesgo, obteniendo su valor presente.

Es importante enfatizar que la suposición de neutralidad al riesgo no implica que el derivado esté siendo avaluado sólo en un mundo neutral al riesgo. En verdad, su valor será el mismo en el mundo real, en el cual los inversores tienen distintos perfiles de riesgo.

Jacoby y Laughton (1987) propusieron un método de valoración de activos derivados que combina el enfoque de Boyle, Cox y Ross con la evaluación por componentes²⁰ y con los supuestos del modelo de valoración de activos de capital (CAPM), al igual que Constantinides. En vez de estimar un rendimiento por conveniencia como un dividendo proporcional, como en la metodología de Brennan y Schwartz, ellos utilizan el concepto de un bono-materia prima, que involucra un sólo pago, el precio que la materia prima tenga en su fecha de maduración.

Por otro lado, el concepto de la evaluación por componentes permite que cada elemento del flujo de caja se descuenta por su riesgo sistemático, y no mediante una tasa artificial que considere todos los riesgos presentes en el proyecto, como lo hace el VPN.

El bono materia prima que utiliza Jacoby y Laughton no entrega un rendimiento por conveniencia, y su precio en la fecha de maduración es igual al precio de la materia prima en la fecha de maduración. En consecuencia, se podría usar los procesos de los precios de mercado de los bonos en lugar de los procesos de precios de la materia prima (esto si se transan en el mercado los bonos-materia prima). Sin embargo, no se transan muchos bonos-materia prima en el mercado por lo que, para calcular su valor, se recurre al CAPM.

En este método, se genera una serie determinística de precios, la que se reduce a un mundo sin riesgo mediante el cálculo de equivalentes ciertos (con el cocientes de tasas de descuento libre de riesgo y con riesgo según CAPM). Esta serie ajustada de la tendencia del precio es afectada por un factor aleatorio, es decir, a esta serie se le puede aplicar la técnica de simulación de Boyle/Cox-Ross.

²⁰ Se descuenta cada ítem de flujo de caja con distintas tasas según su nivel de riesgo. Este enfoque fue propuesto por Brealey y Myers (1993). En el caso que nos ocupa, la evaluación por componentes ahorra tiempo de simulación ya que las componentes lineales del flujo se descuentan sin simular y se usa la simulación sólo para las componentes no lineales.

En síntesis:

- Se identifican las fuentes básicas de incertidumbre del proyecto, los que deben ser precios de activos transados en el mercado; se estima la varianza del proceso de cada activo subyacente.
- Se especifican las fórmulas de “flujos de caja” que relacionan los flujos de caja con los precios de los activos subyacentes.
- Se reemplaza la tendencia en los procesos del precio del activo por la tasa libre de riesgo, como en un mundo neutral frente al riesgo²¹.
- Se implementa la simulación para obtener la distribución terminal de los precios de los activos (terminal se refiere al periodo en el cual los flujos de caja tienen lugar)
- Se obtiene la distribución terminal de cada flujo de caja.
- A partir de cada distribución terminal se obtiene la media o valor de cada flujo de caja.
- Se descuenta el flujo de caja por la tasa libre de riesgo para obtener su valor presente y luego se suman los valores presentes para obtener el valor del proyecto.
- La estructura implícita de tasas de descuento (por riesgo y tiempo) que hubiese entregado el mismo valor del proyecto se puede lograr usando el enfoque VPN, resumido en los siguientes pasos:
 - Se realiza una simulación tipo VPN, en la cual las tendencias en los precios de los activos no son reemplazadas por la tasa libre de riesgo.
 - Se estima la distribución terminal de los activos y de los flujos de caja, y se calculan las medias de los flujos de caja.

Se calcula las razones entre los flujos de caja obtenidos por simulación y los flujos de caja por la simulación “Boyle / Cox – Ross”. Estas razones son medidas del riesgo. En realidad corresponden a medidas de riesgos promedio en el tiempo, pero a partir de estos promedios resulta simple obtener tasas de premio por riesgo periodo a periodo.

4.2 Aplicación de opciones reales a proyectos mineros mediante simulación

En este punto, se muestra el uso de opciones como un apoyo a la toma de decisiones en proyectos mineros reales, basándonos en los trabajos de Zenteno (1998), Kettlun (1999) y Espinoza (2002). Todos ellos consideran la flexibilidad relativa al uso de reservas marginales (cambiando la Ley de corte) durante algún periodo de explotación de la mina, cambiando el enfoque de evaluar el proyecto como si dichas reservas marginales (de más baja Ley) se explotaran al final de la vida útil.

Cabe señalar, que la anterior es sólo una de las flexibilidades propias de proyectos mineros²². Esta consiste en adelantar la explotación de las reservas marginales mientras el precio del cobre se mantenga bajo un límite, a partir del cual se hace más rentable procesar el mineral marginal previamente acopiado (extraído en conjunto con el mineral de Leyes superiores), con costos de operación menores, dado que a este tipo de mineral sólo le resta el procesamiento. La decisión de ejercer esta opción toma en cuenta el costo de oportunidad de no explotar el mineral de mayor Ley, el que se hace menor cuando los precios son más bajos. Los casos que se presentan a continuación, consideran también la opción de paralizar temporalmente, para niveles de precios en los que ni siquiera resulta conveniente procesar el mineral marginal.

²¹ Directamente, según el método de Constantinides, o ajustando por un factor de equivalencia a la certidumbre según el método de Jacoby y Laughton.

²² Otras son las de aumentar el nivel productivo, cambiar tecnologías o abandonar antes del horizonte planificado.

Para el cálculo del VPN-OP se requiere conocer: el plan de producción anual del proyecto, con su correspondiente estructura de costos (fijos y variables) para el caso de mineral base y marginal. Además, se requiere la tendencia central del precio del cobre para toda la vida del proyecto y parámetros económicos como las tasas de descuento, libre de riesgo y de mercado para la evaluación; el nivel de riesgo del precio del cobre respecto al mercado, la volatilidad anual del precio del cobre y el número de iteraciones para la aplicación.

Caso 1: Tratamiento de minerales de baja ley²³

En este caso, para llegar al valor de la flexibilidad (y por extensión de la opción incluida en ella), se optó por utilizar el método de Jacoby y Laughton (1987): un modelo de simulación de precio del cobre basado en un proceso de difusión de tipo browniano geométrico en torno a los valores esperados del precio previamente ajustados por riesgo.

De los resultados obtenidos en el proceso de simulación condicional, sobre la base del caso más probable de las simulaciones, se diseñó un plan minero base y una estructura de costos afín a la aplicación computacional diseñada por Zenteno (1998), obteniendo luego, valores para el VPN tradicional y el VPN-OP (con opciones reales).

El Plan de producción del proyecto fue extractado de los resultados de simulación condicional. Se consideró un nivel de certeza de 90% del recurso, con un nivel de precios de cobre de 92 centavos de dólar por libra y 22 dólares por tonelada de ácido, con una proyección de 14,7 años de operación.

El precio del cobre es la principal fuente de incertidumbre, con bruscas y continuas fluctuaciones que se aprecian en la serie histórica de precios (Gráfico 7).

GRÁFICO 7
SERIE HISTÓRICA PRECIOS DEL COBRE (U\$/LB)



Fuente: Elaboración propia a partir de datos del Banco Central

Del análisis de los estadígrafos básicos y de la función distribución de esta serie, se concluyó que el modelo lognormal²⁴ era un supuesto razonable.

²³ Espinoza (2002).

²⁴ Es lo que se hace en este trabajo de Espinoza y también en los de Kettlun y Zenteno.

TABLA 14
ESTADÍSTICAS BÁSICAS SERIE HISTÓRICA PRECIOS DE COBRE

Media	41,8
Mediana	29,1
Moda	11,2
Máximo	133,2
Mínimo	5,7
Varianza	1164,53
Desv. estándar	34,13

Fuente: Espinoza, 2002.

Para las proyecciones se considera un valor inicial de 0,98 (US\$/lb)²⁵ con una tendencia anual del 2,5% creciente y una volatilidad anual del 20%.

De la información presentada en la sensibilidad del modelo, se obtuvo los siguientes valores para los costos fijos y variables del proyecto:

- Costo fijo del plan base: 11,13 (centavos de dólar/libra Cu.)
- Costo variable del plan base: 28,21 (centavos de dólar/libra Cu)
- Costo variable stock mineral marginal: 18,5 (centavos de dólar/libra Cu)

Los parámetros económicos relevantes en este proceso son:

- Tasa de descuento: incluye el riesgo sistemático. Se consideró una tasa de 9%
- Tasa libre de riesgo: se utilizó una tasa igual a 6%
- Riesgo precio del cobre: se considera un factor $\beta = 0,5$
- Retorno del mercado: se usó un valor igual a 10%

Cabe notar que de acuerdo a los tres últimos datos, la tasa de descuento según CAPM debiera ser 8%. El punto porcentual adicional se puede interpretar como un premio al riesgo adicional por iliquidez (dado que la empresa no transa en Bolsa).

Nivel de Inversión

De acuerdo a los antecedentes sobre el proyecto y a las estimaciones realizadas sobre el recurso mineral, se considera un nivel de inversión de 220,2 millones de dólares. Los resultados obtenidos se resumen a continuación:

TABLA 15
RESULTADOS

VPN	276 323 300	(US\$)
VPN OP	282 909 100	(US\$)
Valor flexibilidades	6 585 760	(US\$)
Producción base	40 000	ton
Producción alternativa	14 000	ton
% reservas económicas utilizadas		96
% reservas marginales utilizadas		4

Fuente: Espinoza, 2002.

²⁵ Posteriormente se sensibiliza para precios menores.

El precio del cobre es el factor de mayor impacto en el proyecto. Por dicha razón, se consideró un análisis para cuatro niveles del precio inicial y a partir de ello, una difusión de precios en los años siguientes. Los casos estudiados son los siguientes:

TABLA 16
CASOS DE ESTUDIO DE SENSIBILIDAD DEL PRECIO DEL COBRE

Caso	Precio cobre (US\$)
1	0,70
2	0,90
3	1,00
4	1,20

Fuente: Espinoza, 2002.

Obteniéndose:

TABLA 17
RESULTADOS SENSIBILIDAD PRECIO DEL COBRE
(US\$)

Caso	VPN	VPN OP	Valor flexibilidad
1	100 333 900	112 431 600	12 097 700
2	221 339 500	229 342 000	8 002 500
3	276 323 300	282 909 100	6 585 800
4	402 542 000	406 916 200	4 374 200

Fuente: Espinoza, 2002.

Los resultados confirman la fuerte dependencia del proyecto al nivel de precios del cobre en la evaluación final del depósito mineral. Se confirma también el resultado teórico esperado de que mientras mayor sea el precio esperado del activo subyacente, menor será el precio de la opción (el valor de la flexibilidad).

Finalmente se presenta un análisis de sensibilidad respecto a la volatilidad del precio. Las sensibilidades realizadas fueron las siguientes.

TABLA 18
CASOS DE ESTUDIO SENSIBILIDAD
VOLATILIDAD EN EL PRECIO DEL COBRE

Caso	Volatilidad
1	1
2	10
3	20
4	30

Fuente: Espinoza, 2002.

A priori, resulta esperable obtener una tendencia creciente en el valor de la flexibilidad, conforme sube la volatilidad en el precio. Los resultados obtenidos (que confirman la hipótesis) son los siguientes:

TABLA 19
RESULTADOS SENSIBILIDAD VOLATILIDAD EN EL PRECIO DEL COBRE
 (US\$)

Caso	VPN	VPN OP	Valor flexibilidad
1	283 581 000	283 739 300	158 300
2	281 463 600	282 784 400	1 320 800
3	282 247 400	288 653 800	6 406 400
4	282 387 900	296 802 200	14 414 300

Fuente: Espinoza, 2002.

Caso 2: Determinación del tamaño óptimo de un proyecto minero²⁶

Al igual que en el caso anterior, la flexibilidad operativa que se analiza es el tratamiento de minerales de baja ley por efecto de cambios en el parámetro precio del cobre, así como la posibilidad de suspender temporalmente las operaciones. También en este caso el método utilizado es el de Jacoby y Loughton (1987).

En este trabajo se utiliza la teoría de opciones para analizar el tamaño óptimo para un proyecto de Codelco. Se analizan cinco alternativas de tamaños de producción: 150, 200, 250, 300, y 350 KTCu/año.

El tamaño óptimo se obtiene mediante la evaluación de las cinco alternativas utilizando teoría de opciones (VPN-OP), considerando que el único elemento que incorpora incertidumbre es el precio del cobre.

En este trabajo, además del VPN tradicional y el VPN-OP, se analizan los resultados de una simulación que proyecta precios según un proceso de difusión, pero sin considerar ajustes operacionales ante las variaciones de los precios. Al VPN obtenido de acuerdo a este último procedimiento se le denomina VPN-SF.

El desarrollo del plan minero involucró la definición de un horizonte de 25 años de producción partiendo (como ya se ha dicho) por un tamaño de 150 KTCu/año y llegando a un horizonte de 11 años cuando el tamaño es de 350 KTCu/año. Se definió una secuencia de explotación económicamente conveniente y una estrategia de leyes de corte de alimentación a proceso basadas en el algoritmo de F.K. Lane (1988).

Al igual que en el caso anterior, se adopta un modelo lognormal. Para las proyecciones²⁷ se considera un valor inicial de 1.00 (cu\$/lb) con un tendencia anual del 2,5% creciente y una volatilidad anual del 20%.

La estructura de costos es la siguiente²⁸:

- Costo fijo: 40.807.146 US\$.
- Costo variable: 25.3 (centavos de dólar/libra Cu).
- Costo variable mineral marginal: 19,5 (centavos de dólar/libra Cu).

Los parámetros económicos relevantes en este proceso son:

- Tasa de descuento: incluye el riesgo sistemático o no diversificable de todos los proyectos mineros. Para esta aplicación se considera 10%.
- Tasa libre de riesgo: se utilizó una tasa igual a 6%.

²⁶ Zenteno (1998).

²⁷ Debe considerarse este trabajo se concluyó en el año 1998 y fue iniciado en un período anterior (con niveles de precios del Cu superiores a los actuales).

²⁸ Para la alternativa de tamaño de 150 KTCu/año. Estos costos van disminuyendo para los tamaños mayores.

- Riesgo asociado al precio del cobre: se considera un factor $\beta = 0,4$ (aunque se sensibiliza para betas mayores).
- Retorno del mercado: se usó un valor igual a 10%.
- Nuevamente se tiene que de acuerdo a los tres últimos datos, la tasa de descuento según CAPM debiese ser aproximadamente 8%, los dos puntos adicionales se pueden interpretar como un premio al riesgo adicional por iliquidez (dado que la empresa no transa en Bolsa).
- Nivel de inversión: De acuerdo a los antecedentes sobre el proyecto, se considera un nivel de inversión de 695 millones de dólares para el tamaño de 150 KTCu/año, 917 millones para el tamaño de 200 KTCu/año, 1138 millones para los 250 KTCu/año, 1359 millones para 300 KTCu/año y 1581 millones de US\$ para el tamaño de 350 KTCu/año.

Para las condiciones antes enunciadas, los resultados son los siguientes. Se resaltan en negrillas los resultados de tamaño óptimo en cada una de las evaluaciones:

TABLA 20
RESULTADOS TAMAÑO ÓPTIMO

Tamaño (KTCu/año)	VPN (MUS\$)	VPN-SF (MUS\$)	VPN-OP (MUS\$)
150	1 390	1 965	2 008
200	1 563	2 122	2 160
250	1 635	2 221	2 251
300	1 646	2 187	2 210
350	1 609	2 133	2 155

Fuente: Zenteno, 1998

Se puede apreciar que el tamaño de producción óptimo es de 300 KTCu/año según el enfoque estático del VPN tradicional, sin embargo es de 250 KTCu/año según la simulación sin considerar flexibilidades y según la valoración con opciones reales. El resultado obtenido es consistente en el sentido de que la maximización del VPN se alcanza antes en la valoración con opciones, dado que los valores presentes son mayores debido al valor de las flexibilidades operacionales.

Se comprueba además, que el valor obtenido con opciones reales (VPN-OP), es siempre mayor que el valor de la simulación sin considerar flexibilidades (VPN-SF).

El análisis de sensibilidad respecto al precio, se realiza para los tres cálculos de VPN, para valores iniciales del precio del cobre variando entre 0,6 y 1,2 US\$/lb:

TABLA 21
SENSIBILIDAD A PRECIO INICIAL DEL COBRE. VPN-C
(En MUS\$)

Tamaño KTCu/año	VPN - C	VPN - C	VPN - C	VPN - C
	$P_{Cu} = 0,6$ US\$/lb	$P_{Cu} = 0,8$ US\$/lb	$P_{Cu} = 1,0$ US\$/lb	$P_{Cu} = 1,2$ US\$/lb
150	182	786	1 390	1 994
200	136	850	1 563	2 276
250	47	841	1 635	2 428
300	-63	792	1 646	2 500
350	-196	707	1 609	2 511

Fuente: Zenteno, 1998

TABLA 22
SENSIBILIDAD A PRECIO INICIAL DEL CU. VPN-SF
 (En MUS\$)

Tamaño KTCu/año	VPN – SF	VPN – SF	VPN – SF	VPN – SF
	P _{Cu} = 0,6 US\$/lb	P _{Cu} = 0,8 US\$/lb	P _{Cu} = 1,0 US\$/lb	P _{Cu} = 1,2 US\$/lb
150	335	1 144	1 965	2 733
200	323	1 235	2 122	3 050
250	220	1 195	2 221	3 190
300	108	1 144	2 187	3 220
350	-23	1 092	2 133	3 259

Fuente: Zenteno, 1998

TABLA 23
SENSIBILIDAD A PRECIO INICIAL DEL CU. VPN-OP
 (En MUS\$)

Tamaño KTCu/año	VPN – OP	VPN – OP	VPN – OP	VPN – OP
	P _{Cu} = 0,6 US\$/lb	P _{Cu} = 0,8 US\$/lb	P _{Cu} = 1,0 US\$/lb	P _{Cu} = 1,2 US\$/lb
150	436	1208	2008	2762
200	421	1294	2160	3074
250	315	1249	2251	3209
300	191	1188	2210	3233
350	59	1132	2155	3271

Fuente: Zenteno, 1998

Como era esperable, para los tres enfoques se cumple que cuando el precio aumenta el tamaño óptimo también aumenta. Finalmente, el trabajo de Zenteno presenta un análisis de sensibilidad que muestra como para niveles de volatilidades menores al considerado en la proyección inicial, se obtienen tamaños óptimos mayores en los enfoques estocásticos.

Caso 3: Evaluación por simulación de un proyecto minero privado²⁹

También en este caso la flexibilidad operativa que se analiza es la modificación de las leyes de corte. En este caso el método de simulación utilizado es el de Constantinides (1978). Se utiliza el modelo de planificación de Lane (1988), el cual es un proceso iterativo de optimización intertemporal, que determina la estrategia o secuencia óptima leyes de corte que maximiza el valor del proyecto³⁰.

Se calcula un VPN con simulación y ajustes a un mundo neutral al riesgo pero sin considerar las flexibilidades y un VPN por opciones incluyendo las flexibilidades.

El proyecto se define para un horizonte de 10 años de operación a rajo abierto. Se considera un ritmo de extracción de 1,6 millones de toneladas al año de minerales oxidados, con una ley promedio de 1,5% de cobre

Nuevamente, se adopta un modelo lognormal. Para las proyecciones³¹ se considera un valor inicial de 1.00 (US\$/lb). La tendencia según el modelo de Constantines, queda determinada directamente por la tasa ajustada por riesgo según CAPM. La volatilidad anual se hace variar entre 20% y 30%.

Se consideró la siguiente estructura de costos:

²⁹ Kettlun (1999).

³⁰ Kettlun plantea un problema de consistencia (común a los dos casos ya presentados) entre el algoritmo de Lane y la aplicación de opciones reales. La solución de este problema implica una simplificación que determina planes subóptimos de producción (según el enfoque de opciones), pero que no obstante se ajusta a la toma de decisiones reales de la minería (que no incluye la valoración de las opciones).

³¹ Este trabajo se concluyó en el año 1999 y fue iniciado en un período el que los niveles de precios del cobre eran superiores a los actuales.

- Costo fijo: 2.418.117 US\$/año
- Costo variable: 0,242 US\$/tonelada en la mina, más costos de tratamiento (2,793 US\$/tonelada), refinación (294 US\$/tonelada) y transporte (variable según distancias y años de operación).

Los parámetros económicos relevantes en este proceso son:

- Tasa de descuento: para esta aplicación se considera 8%
- Tasa libre de riesgo: se utilizó una tasa igual a 5%
- Riesgo precio del cobre: se considera un factor $\beta = 0,75$
- Premio por riesgo del mercado: 4%
- Nivel de Inversión: se considera un nivel de inversión de 48 millones de dólares.

Para las condiciones antes enunciadas, los resultados son los siguientes. Se presenta el escenario de precio inicial de 1 US\$/lb (para el cual se diseña la planta) y otro de 0,7 US\$/lb, con volatilidades de 20% y 30%

Se comprueba que el VPN tradicional subestima en todos los casos el valor del proyecto. El sesgo resulta menor cuando el precio inicial está en torno al considerado para el diseño de la planta (1,0US\$/lb) y cuando la volatilidad es baja (20%).

TABLA 24
RESULTADOS OPCIONES

Precio (US\$/lb)	Método de Evaluación	Volatilidad 20%	Volatilidad 30%
0,7	VPN.sin flex.	31 384 092	---
0,7	VPN op. con flex.	33 372 785	---
1,0	VPN sin flex.	117 886 843	120 350 022
1,0	VPN op. con flex.	120 663 750	124 265 375

Fuente: Kettlun (1999).

Conclusiones

La metodología de las opciones reales proporciona un marco analítico para evaluar correctamente los proyectos de inversión que involucran algún grado de flexibilidad en su fecha de iniciación, proceso productivo y eventual cierre. Esta ha cobrado particular popularidad en el área de los recursos naturales. Su aplicación en Chile es aún incipiente, y focalizada en algunos sectores (como el minero). Sin embargo, un uso más extendido permitiría mejorar la toma de decisiones en temas tales como el desarrollo de patentes de invención, la decisión de transar acciones en bolsa, la introducción de nuevos productos o procesos productivos, entre otras muchas aplicaciones.

4.3 Árboles de decisión

Las decisiones más importantes de un proyecto no se toman de una vez en un momento del tiempo. En ocasiones, se toman por etapas, sobre todo cuando el resultado de la decisión es aleatorio, eso ya se analizó con el método de opciones reales. En algunos casos es útil el uso de árboles de decisión para encontrar el conjunto de decisiones óptimas. A continuación se muestra su uso a través de un ejemplo³².

³² Este ejemplo está tomado de Diez y Avilés, 1998.

Ejemplo:

Un proyecto de producción de manzanas requiere una inversión de US\$ 70.000. Su producción la puede exportar a Estados Unidos o vender en el mercado nacional. En el caso de exportación, las manzanas son clasificadas en dos categorías con precios distintos: Standard (380 US\$/Ton.) y Premium (475 US\$/Ton.). En tanto que en el mercado nacional no se distingue entre calidades. Los costos anuales de mantenimiento y cosecha son de 15.000 [US\$/año].

El clima afecta las siguientes variables del proyecto: la producción, el porcentaje de manzanas Premium, el precio nacional, y el valor residual de la inversión. Esta información se resume en la siguiente tabla:

TABLA 25
INFORMACIÓN DE CLIMA

Clima	Producción [Ton.]	% Premium	Precio Nacional [US\$/Ton.]	Valor Residual Inversión [US\$]
Bueno	150	60	400	35 000
Normal	80	30	440	30 000
Malo	30	10	460	25 000

Fuente: Diez y Avilés, 1998.

Además, el clima del año próximo dependerá del estado del tiempo del año Actual, de acuerdo a la siguiente tabla:

TABLA 26
PROBABILIDADES CONDICIONALES DE CLIMA

Clima Año Actual	P[Clima Año Próximo/clima Año Actual]		
	Bueno	Normal	Malo
Bueno	0,45	0,35	0,20
Normal	0,25	0,50	0,25
Malo	0,10	0,40	0,50

Fuente: Diez y Avilés. 1998.

Se sabe que en el año 0 el clima fue normal.

Al comienzo del año 1 y 2 se debe decidir si comprometerá su producción futura de ese año con clientes del mercado nacional o a un "trader" que le exportará la fruta por medio de un contrato, sin saber aún cual será el clima de ese año.

Al comienzo del año 2 tiene la posibilidad de liquidar su inversión antes de cosechar. Si el año 2 el inversionista no liquidó su plantación entonces cosechará ese año y seguirá operando por 3 años más (del año 3 al 5) obteniendo un beneficio neto (ingresos menos costos) igual al promedio de los dos años anteriores independiente de a quién le vende durante esos años

Al final del año 5 el inversionista cosecha y vende su producción para inmediatamente liquidar la plantación, la que se encuentra económicamente depreciada, por lo que obtiene sólo el valor del terreno, el que alcanza a US\$ 5.000.

La tasa de descuento exigida a los flujos de este proyecto riesgoso alcanza a un 15%. Por simplicidad no consideraremos el efecto de los impuestos (IVA e Impuesto de Primera Categoría) y se realizarán todos los cálculos en US\$.

Solución:

- a) Representar el problema mediante un árbol de decisión
- b) Calcular los valores esperados de cada nodo aleatorio desde el futuro hacia el presente.
- c) Determinar la política de decisiones óptimas del inversionista que maximice el valor esperado de su valor presente neto.

Así, la decisión final es en realidad tomada en etapas, donde las decisiones dependen de las anteriores.

La figura en la que está la solución del problema se muestra que las decisiones que maximizan el valor presente del proyecto son:

A comienzos del año 1 (año 0) hay que comprometer la producción en el mercado local

A comienzos del año 2 (año 1) la decisión depende del clima del año 1:

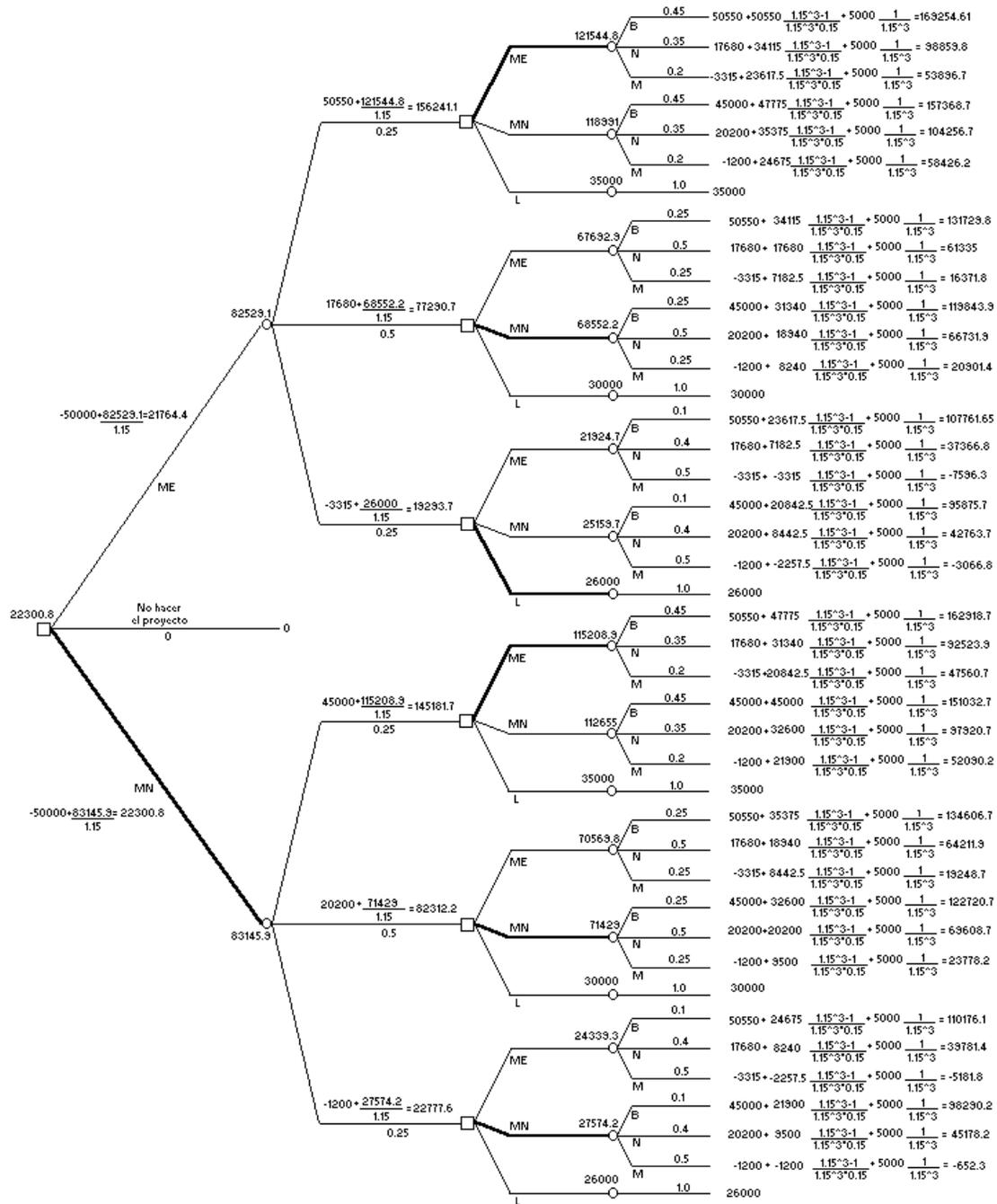
- Si el año 1 el clima fue bueno entonces la producción hay que comprometerla en el mercado de exportación.
- Si el año 1 el clima fue normal entonces la producción hay que comprometerla en el mercado nacional.
- Si el año 1 el clima fue malo entonces la producción hay que comprometerla en el mercado nacional.

De esta forma se alcanza el máximo VPN esperado del proyecto, el que alcanza a 22.300

Sin embargo, no hay que olvidar que no consideramos que las decisiones involucradas tienen distintos niveles de riesgo, ya que sólo usamos como criterio el maximizar el VPN esperado. Para incorporar esto tendríamos que usar otro criterio de decisión de los ya vistos:

- Mínimo coeficiente de variación
- Máxima utilidad esperada
- Corregir la tasa de descuento según CAPM.

FIGURA 12
ARBOL DE DECISION



Fuente: Díez y Avilés. 1998.

5. Relación entre los distintos enfoques de análisis de riesgo

5.1 Relación entre VeR, análisis probabilístico, análisis de sensibilidad y simulación

Una completa revisión de las diversas teorías y métodos que pueden considerarse complementos o sustitutos del VeR, incluiría al menos: análisis probabilístico, análisis de sensibilidad y de escenarios, ajuste simple en la tasa de descuento, equivalencia a la certidumbre, simulación, Capital Assets Pricing Model (CAPM), opciones reales y árboles de decisión.

Análisis probabilístico:

En mayor detalle, el análisis probabilístico tal y como ha sido presentado, es una antigua herramienta de análisis de riesgo de la cual el VeR puede ser considerado un caso particular. En efecto, el VeR es un tipo de análisis probabilístico en el cual en lugar de considerar intervalos de confianza, calcular la probabilidad de perder o determinar una desviación estándar de un proyecto, se focaliza en análisis en una métrica en particular que es la máxima pérdida probable (absoluta o relativa) para un cierto nivel de confianza. Otra particularidad del VeR respecto del análisis probabilístico tradicional, es que el modelamiento de las rentabilidades y riesgos esperados, suele implementarse en la práctica mediante el modelamiento estocástico de los procesos de precios.

En razón de lo anterior, el análisis probabilístico puede tomarse como un marco teórico más amplio dentro del cual está incluido el VeR.

Análisis de sensibilidad y de escenarios:

En el caso del análisis de sensibilidad y de escenarios, este resulta una buena herramienta para identificar las variables riesgosas de un proyecto, frente a las cuales el VAN resulta más sensible. De esa forma este análisis aparece como una forma muy eficiente de iniciar un análisis de cálculo de VeR, ya que permite descartar variables poco relevantes en términos de su aporte al riesgo del proyecto, y permite focalizar el desarrollo de modelos de precios, cantidades, costos, etc., en aquellas variables que afectan en forma importante a la rentabilidad del proyecto. Dicho de otra forma, el análisis de sensibilidad se presenta dentro de la metodología como una etapa inicial de análisis, previa al modelamiento de las variables riesgosas.

Simulación de Monte Carlo:

La simulación de Monte Carlo ya presentada, es una de las herramientas consideradas para el cálculo del VeR no paramétrico. En estricto rigor, la simulación de Monte Carlo no es un enfoque teórico, sino una herramienta práctica que permite aplicar el análisis probabilístico en general, y el VeR en particular.

5.2 Relación entre VeR, ajuste simple a la tasa de descuento, modelo CAPM, equivalencia a la certidumbre, opciones reales y árboles de decisión

Los otros enfoques de análisis de riesgo, no presentados aún en este documento (y que se incluyen en los puntos 3 y 4), son los de análisis de riesgo en carteras (CAPM), la teoría de opciones reales y los árboles de decisión, en este punto sólo se comenta su relación con el VeR

Ajuste a la tasa de descuento y CAPM:

A continuación se explica porqué no se considera el ajuste simple en la tasa de descuento y el modelo CAPM.

Todos los enfoques presentados en el capítulo 3, incluyendo el enfoque del VeR en el que se profundiza en este capítulo 4, tienen algo en común: la variabilidad de las variables, es decir, el riesgo, se incorpora en los flujos de caja del VAN. Una alternativa sería incorporar dicho riesgo en la tasa de descuento con la que se actualizan los flujos del VAN. Si bien en este texto no se trabaja con ese tipo de tratamiento del riesgo, y más bien se propone el VeR que es uno de los enfoques que incorpora el riesgo en los flujos, es pertinente discutir; ¿porqué incorporar el riesgo con VeR y no a través de la tasa de descuento?

Es necesario aclarar que la teoría financiera establece que el riesgo que debe ser incorporado en la tasa de descuento, no es cualquier riesgo: solamente el riesgo sistemático es el que deberá ajustar la tasa libre de riesgo y constituirse en una prima de riesgo relevante (Sharpe, 1964). El riesgo sistemático es aquel que no es posible eliminar mediante la diversificación que se logra al repartir la riqueza en una cartera con las distintas alternativas de inversión (y riesgos) que el mercado ofrece. De acuerdo a la teoría financiera, dicho riesgo sistemático (o no diversificable) incorporado en la tasa de descuento, debería ser el único riesgo relevante.

Esta prima por riesgo en la tasa de descuento, es la que captura la valorización que el mercado realiza al riesgo del proyecto. Por lo tanto, el riesgo puede medirse como la distancia entre el valor presente descontado a una tasa libre de riesgo, y el valor presente usando una tasa de descuento que incluya la prima por riesgo. Es decir el riesgo se puede medir en cuánto menos vale el proyecto por el

hecho que tiene un riesgo sistemático el cual no es posible eliminar mediante diversificación (para el análisis de diversificación, remitirse al trabajo seminal de Markowitz, 1952).

Este argumento que está en la base de la evaluación moderna de proyectos, tiene sin embargo algunas limitaciones. En el caso particular de proyectos públicos (o que tradicionalmente han sido públicos como los de concesiones) no es posible estimar tasas de descuento ajustadas por riesgo ni para instituciones en particular ni para sus proyectos (debido a la falta de información de rentabilidades históricas de sus inversiones)³³. Por la razón anterior se descarta ese método, no obstante existen otras limitaciones generales del método de ajuste a la tasa de descuento, que se describen a continuación.

Primero, obliga que se tenga que estimar las tasas de descuento para cada tipo de proyecto, ya que se demuestra que la prima por riesgo está asociada a cuán correlacionados están los retornos del proyecto con los retornos de una cartera de mercado. La medida de la correlación antes mencionada, queda capturada en el llamado coeficiente beta, el cual se suele estimar mediante regresiones de mínimos cuadrados.

En segundo lugar resulta también válido preguntarse si la tasa de descuento a utilizar el primer año del proyecto debiera ser la misma que se utiliza en períodos posteriores, en la medida que el riesgo también puede ser diferente.

Por motivos de simplicidad, y para mantener criterios y procedimientos homogéneos, es probable que sea conveniente mantener una tasa de descuento única, y realizar un ajuste más cualitativo del riesgo del proyecto. En otras palabras puede resultar muy poco práctico y especialmente discrecional alterar las tasas de descuento para diferentes tipos de proyectos, especialmente si ya muchas veces resulta difícil acordar una tasa de descuento que sea representativa del costo de capital de una empresa.

Sin embargo, el problema más complejo del enfoque de tasa de descuento para medir el riesgo se basa en el supuesto implícito de que sólo debe medirse el riesgo sistemático y no el riesgo total. En otras palabras, si un proyecto de riesgo tuviese un beta de cero respecto de la cartera de mercado, el riesgo que tendría medido como la diferencia entre el valor esperado a tasa libre de riesgo y a la tasa de descuento que incluye la prima por riesgo sería cero, puesto que no tendría prima por riesgo sistemático.

Sin embargo este enfoque de valorizar solamente el riesgo sistemático, se ve en contraposición con lo que ha sido el desarrollo más importante de las últimas décadas, cual es el de los mercados de derivados. Los derivados intentan justamente eliminar o transferir la volatilidad de determinados activos financieros. Se ha argumentado que dicho proceso es de suma cero, y además interfiere con la labor de diversificación que los accionistas realizan al incorporar en sus carteras acciones de empresas que enfrentan riesgos diversos.

Por otro lado, los supuestos teóricos que fundamentan el CAPM se basan en una diversificación muy amplia, la que en la práctica se cuestiona por algunos trabajos académicos, o por un acceso no restringido al mercado de capitales³⁴.

Mucho se ha discutido sobre este tema recientemente en la literatura especializada, y una de las conclusiones a las que se ha llegado es que si el riesgo total tiene un impacto real, entonces importa el riesgo total y no sólo el riesgo sistemático (Shimko, 2001). En otras palabras si una institución realiza proyectos que incrementan la volatilidad de sus flujos de caja, pero que no

³³ Las que generalmente se estiman con el modelo CAPM.

³⁴ Ver por ejemplo la discusión de R. Stulz (1999) "What's wrong with Capital Budgeting", Address delivered at the Eastern Finance Association meeting in Miami Beach, April 1999 upon reception of the 1999 Eastern Finance Association Scholar Award.

incrementa la correlación con los retornos de la cartera de mercado, entonces según la teoría tradicional, no debiera descontarse a una tasa diferente por lo que la medición de riesgo no debiera cambiar, y tampoco la valorización del proyecto. Sin embargo, si el incremento en la volatilidad de los flujos de caja de esta institución, a pesar de ser diversificable, produce un impacto en la percepción de riesgos de analistas, y se determina que esto incrementa el costo de financiamiento de largo plazo, entonces claramente el riesgo total es el que resulta relevante. En este caso la valorización del proyecto debiera considerar el valor presente de los costos asociados a un incremento en la volatilidad total de los flujos de caja.

El hecho de que el riesgo total sea relevante para las empresas y no solamente el riesgo sistemático está también relacionado con las actividades de hedging o cobertura que se observan en la práctica. Si las empresas sólo son valoradas por su riesgo sistemático, entonces no se debiera observar el importante volumen de coberturas de riesgos en mercados de derivados, ya que los accionistas podrían a través de una cartera bien diversificada, eliminar dicho riesgo. Si la empresa (o la administración) tiene ventajas con respecto al inversionista para realizar actividades de cobertura, significa que crea riqueza al realizarlas, y por lo tanto no es solamente el riesgo sistemático el que le preocupa.

Otro aspecto a considerar, es la dificultad del descuento de flujos con tasas estimadas con el modelo CAPM, para diferenciar entre proyectos de acuerdo a los riesgos propios específicos de cada uno de ellos, lo que sí se puede lograr con los modelos basados en procesos estocásticos de las variables relevantes, como se hace en la valoración con opciones reales (ver Samis, Laughton, & Poulin, 2003) o en la medición de riesgos con VeR.

Utilizando esta discusión como marco de referencia, puede resultar novedoso incorporar, como medida de riesgo, una medición de la volatilidad total del proyecto para complementar la medida de VAN calculada con riesgo sistemático únicamente. En otras palabras, si una institución enfrentase dos proyectos con igual o parecido VAN (usando la misma tasa de descuento), entonces sería razonable escoger primero aquel proyecto que presenta una volatilidad menor de los flujos de caja, en la medida que el riesgo total también puede tener costos que reduzcan finalmente el valor del proyecto.

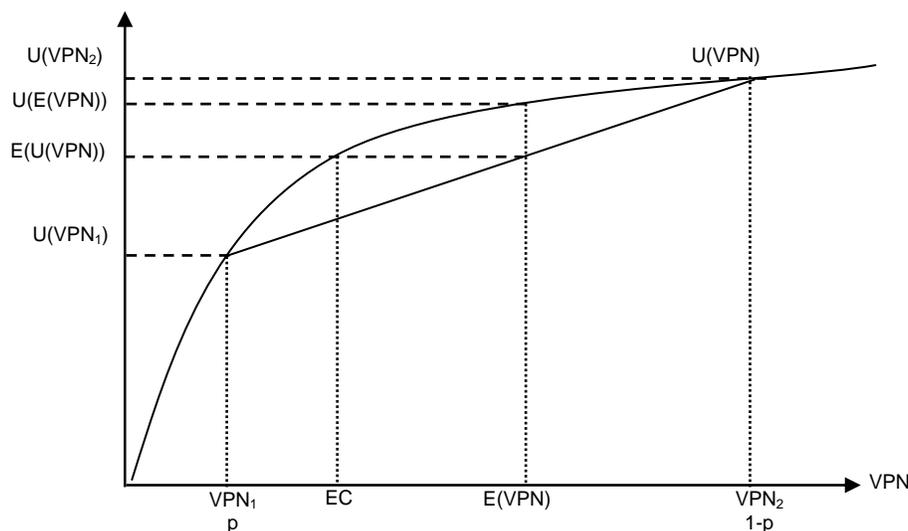
Aversión al riesgo y equivalencia a la certidumbre:

En lo que respecta al método de equivalencia a la certidumbre este consiste en calcular flujos de caja equivalentes ciertos (F_{ec} , sin riesgo) que para el inversionista resultan indiferentes a un valor esperado de flujos de caja ($E(F)$, con riesgo). Se demuestra que para inversionistas adversos al riesgo se cumple que $F_{ec} < E(F)$. Lo anterior equivale a “castigar” el valor esperado del flujo $E(F)$, multiplicándolo por un factor α menor que uno. Como se puede observar, el método de equivalencia a la certidumbre es otro método de incorporación del riesgo en los flujos de caja. Se demuestra también que el factor α depende del grado de aversión al riesgo del inversionista.

Este enfoque no se considera en la metodología por dos razones. En primer lugar, desde el punto de vista práctico, se plantea la dificultad de que el factor α no es directamente observable, el grado de aversión al riesgo del inversionista no es un dato conocido ex ante, es decir, antes de que se tome la decisión de inversión en un proyecto durante la etapa de evaluación del mismo, por el contrario, el inversionista revelará su grado de aversión al riesgo al decidir si invierte o no en un proyecto en el que se le ha medido (por ejemplo con análisis probabilístico) su valor esperado del VAN, y la dispersión de dicho indicador (por ejemplo con desviación estándar, intervalos de confianza o VeR).

En segundo lugar, el método de equivalencia a la certidumbre, es equivalente al de ajuste a la tasa de descuento (ya sea ajuste simple o con CAPM), y por lo tanto las razones presentadas en el punto anterior para proponer el VeR en lugar de los métodos basados en ajustes a la tasa de descuento, son extensibles para justificar el uso del VeR en lugar del uso de equivalencia a la certidumbre.

La relación entre equivalencia a la certidumbre, el ajuste a la tasa de descuento y el VeR, pueden visualizarse en la figura 5 ya presentada anteriormente:



Fuente: Diéz y Avilés.

En este gráfico la función cóncava representa la función de utilidad de un inversionista adverso al riesgo. $E(VPN)$ es el valor esperado del VPN si es que este último pudiese tomar valores entre VPN_1 y VPN_2 . El valor EC es el equivalente cierto, que como se ha señalado, resulta menor que el valor esperado de la variable riesgosa. La diferencia entre EC y $E(VPN)$ depende del grado de aversión al riesgo, que en este gráfico está implícito en la concavidad de la función de utilidad.

Para ubicar el VeR del VPN en este gráfico, se debería conocer el nivel de confianza (por ejemplo de un 95% o un 99%), pero en todo caso a priori, dicho VeR que representará una pérdida respecto al valor esperado $E(VPN)$, no tiene porqué coincidir con EC . Gráficamente podría estar comprendido entre VPN_1 y EC , o incluso a la izquierda de VPN_1 .

Sin embargo el ajuste a la tasa de descuento, si está realizado de forma tal que todo el riesgo relevante quede incluido dentro de la tasa ajustada por riesgo, debiese conducir al cálculo de un VPN igual al equivalente cierto (EC) del gráfico.

Opciones Reales:

Existe una complementariedad teórica y práctica entre el enfoque de opciones reales y el VeR. Desde el punto de vista teórico ambos enfoques consideran que las variables riesgosas evolucionan a futuro según algún proceso estocástico. Más aún, el modelamiento, por ejemplo de los precios, que se realice para calcular el VeR, debe ser el mismo modelamiento que se utilice para calcular el valor de las opciones asociadas a la evolución futura de dichos precios (Alessi, 2005)

Desde el punto de vista práctico tanto en el cálculo del VeR como en el de las opciones reales se puede utilizar un modelo paramétrico, asumiendo normalidad de las variables (lo que conduce al modelo de Black y Sholes en el caso de opciones reales y al modelo RiskMetrics en el caso de VeR), o se pueden estimar las variabilidades de las variables mediante simulación de Monte Carlo, es decir, mediante un modelo no paramétrico (Embrechts. 2003).

Se puede plantear también una analogía entre las críticas que se han hecho al VeR y las críticas a la ecuación de Black y Sholes (B-S) para la valoración de opciones (Black y Sholes,

1973). A esta última se le ha criticado el partir de una distribución lognormal para los precios, así como las hipótesis de volatilidad constante y tasa de interés libre de riesgo también constante. También es posible “sofisticar” el modelo B-S con valores esperados para la tasa libre de riesgo (sub modelos estocásticos de B-S como paso previo para llegar a la ecuación de B-S), o con modelos distintos a la distribución normal para estimar las volatilidades. Sin embargo a la fecha no encontramos un modelo alternativo que se esté utilizando tanto como B-S, lo cual seguramente guarda relación con su relativa simplicidad, estandarización de métodos y por ende fortalezas en cuanto a poder contrastar y comparar resultados. Los modelos alternativos pueden ajustarse mejor por un tiempo: los modelos que incluyen shocks se ajustan mejor cuando ha habido shocks (nuevamente los modelos *Jump Poisson*, por ejemplo).

Tanto para el VeR como para el modelo de B-S, las alternativas son modelos más específicos que valoran mejor para casos específicos, pero no para la generalidad, en el largo plazo han seguido siendo más consistentes los modelos paramétricos. Cabe señalar que todos estos comentarios finales son válidos para mercados accionarios. Pero las críticas al VeR y a B-S sí son válidas para valoración de activos reales, en particular en sociedades anónimas cerradas, cuando no tenemos precios de mercado (ejemplo en proyectos de inversión de este tipo de sociedades), en estos casos sí hay volatilidades intrínsecas a modelar en forma específica, además en estos casos no existe la necesidad de estandarizar. Por tanto en esos casos se desarrolla un modelo para ese conjunto de activos, el que le interesa a la empresa, incluyendo las volatilidades intrínsecas del proyecto. En el caso de opciones, esto se traduce, por ejemplo, en los métodos de valoración de opciones reales por medio de simulación.

En síntesis, hay mucho en común entre los dos enfoques, los que se pueden considerar complementarios, sólo que apuntan a objetivos distintos: en el caso del VeR se busca medir en nivel de riesgo de un activo financiero o un proyecto, mientras que en el caso de las opciones reales se busca medir el valor de las flexibilidades que se generan en razón de la existencia de aquellos niveles de riesgo.

Árboles de decisión:

Como ya se ha visto en el enfoque de opciones reales, las decisiones más importantes de un proyecto no se toman de una vez en un momento del tiempo. En ocasiones, se toman por etapas, sobre todo cuando el resultado de la decisión es aleatorio. En algunos casos es útil el uso de árboles de decisión para encontrar el conjunto de decisiones óptimas.

La relación con los enfoques anteriores está dada por el hecho de que los árboles también pueden ser utilizados para calcular el valor de las opciones de los activos reales o financieros.

6. Aplicación de VeR y opciones reales mediante simulación³⁵ a proyectos de embalses

Habiendo verificado y analizado las diversas metodologías aplicables a proyectos, a continuación se aplica una metodología intergrada a los proyectos de embalse Quino y Traiguén.

Para la simulación se hizo un modelamiento de los precios como procesos, es decir, los precios de cada periodo dependen de los del periodo anterior, y se modelaron las correlaciones entre los precios, lo que a su vez se incorpora a la simulación mediante descomposición de Cholesky.

6.1 Procesos de precios

Para modelar precios de acciones y commodities en los métodos de simulación en general se supone generalmente que los precios siguen un Proceso de Wiener generalizado (Vilariño, 2001) (Joiron, 2004) (Feria, 2005), esto es, que tiene un drift constante μ y una varianza constante σ^2 , en la práctica se supone que el drift y la varianza sean una proporción del precio S , de aquí se puede mostrar entonces el modelo de comportamiento de precios conocido como Movimiento Browniano Geométrico a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

³⁵ Según lo ya presentado en el punto 2, corresponde al método no paramétrico.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu[t, S(t)]dt + \sigma[t, S(t)]dW_t, \quad (77)$$

donde $dS(t)$ representa el cambio en los precios, S , en un intervalo pequeño de tiempo, dt , $dW_t = \xi\sqrt{t}$ (proceso de Gauss- Wiener, con $\xi \sim N(0,1)$), luego la ecuación anterior está normalmente distribuida con media μdt y desviación estándar $\sigma\sqrt{t}$. En otras palabras,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} \longrightarrow \phi(\mu dt, \sigma\sqrt{dt}) \quad (78)$$

Ahora supongamos que el precio S , sigue un proceso de Ito (Villamil, 2006), es decir:

$$dG = \left(\frac{dG}{dS} \mu S + \frac{dG}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 G}{dS^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{dG}{dS} \sigma dW \quad (79)$$

Se deriva el proceso seguido por $\ln(S)$ (el logaritmo natural del precio) utilizando el lema de Ito (Vilariño, 2001). Sea $G = \ln S$, luego

$$\frac{dG}{dS} = \frac{1}{S} \quad \frac{d^2 G}{dS^2} = -\frac{1}{S^2} \quad \frac{dG}{dt} = 0$$

Reemplazando los términos en el proceso seguido por G , se llega a:

$$dG = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW \quad (82)$$

Reemplazando en la última ecuación dG por $d\ln(S)$, se llega a:

$$d\ln(S) = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW \quad (83)$$

Por lo tanto para modelar los precios, se debiera considerar esta distribución, es decir:

$$\ln S_T \sim \phi \left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma\sqrt{T} \right] \quad (84)$$

donde $\phi(m, s)$ denota una distribución normal con media m y desviación estándar σ . Esta expresión se puede discretizar (Lamothe y Pérez Somalo, 2004) como:

$$\ln S_T = \left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma\sqrt{T}\xi \right] \quad (85)$$

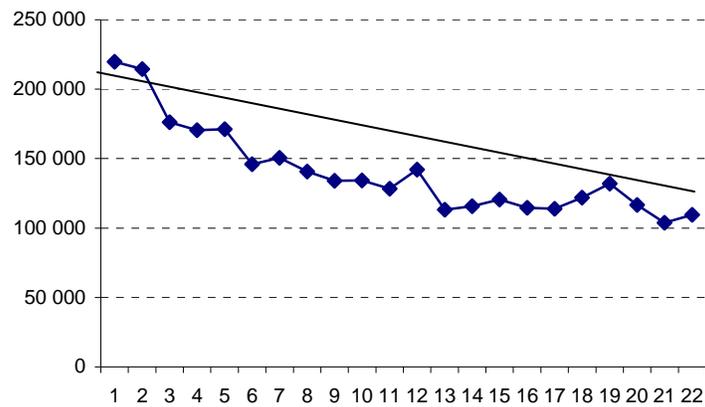
En el caso de la evaluación de un proyecto, el período mínimo de tiempo es un año, por lo tanto cada salto de tiempo es de valor 1, motivo por el cual el término \sqrt{T} se transforma en uno.

En lo que respecta a modelos de volatilidad, en el paper de Brooks y Persans (2002) se indica que Alexander y Leigh (1997) examinaron, modelos GARCH, modelos EWMA y modelos de

promedios de pesos similares (sin darle mayor peso al reciente), encontrando como resultado que éste último resulta superior a los otros dos, este método de promedio simple es el utilizado en este texto.

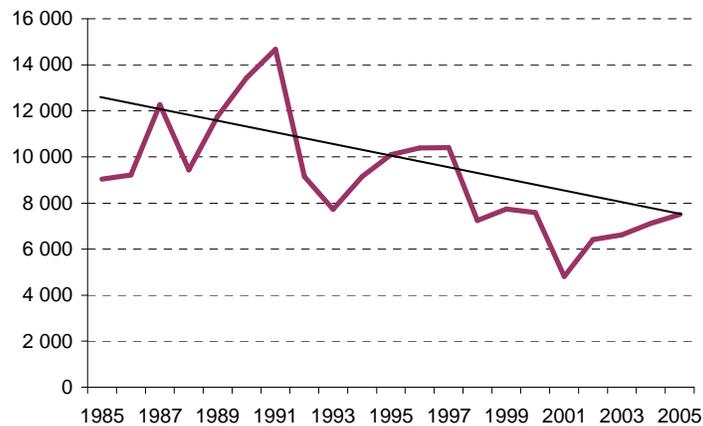
Se elige el modelo de movimiento browniano geométrico, ya que los retornos de los precios históricos mayoritariamente siguen una tendencia. A modo de ejemplo, a continuación se presentan las series de precios por año de algunos de los productos. La existencia de estas tendencias permite descartar modelos sin drift como el de Ornstein y Uhlenbeck (descrito en Ergashev, 2002) de reversión a la media sin tendencia o las series de tiempo de “ruido blanco”.

GRÁFICO 8
SERIE DE PRECIOS DEL TRIGO



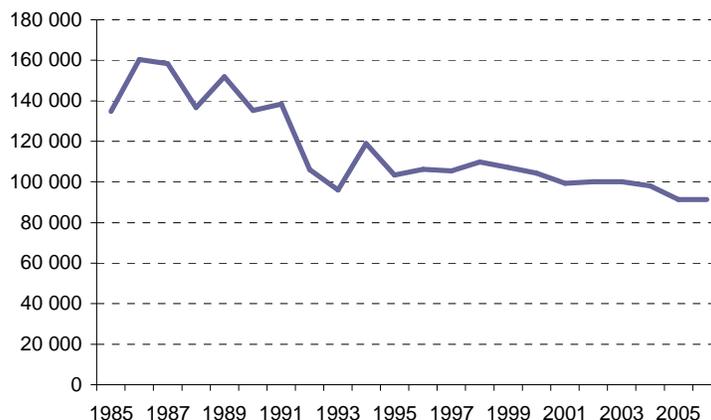
Fuente: Elaboración propia a partir de datos de ODEPA.

GRÁFICO 9
SERIE DE PRECIOS DE LOS POROTOS



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de ODEPA.

GRÁFICO 10
SERIE DE PRECIOS DE LA CEBADA



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de ODEPA.

Existen desde luego modelos alternativos para precios de comodites (una revisión extensa se puede consultar en Engel, 1998). Por ejemplo Engel y Valdés (2002) concluyen que modelos AR (1) simples y de camino aleatorio, son más precisos para el mediano plazo (hasta 5 años, no hacen el análisis para periodos superiores a 5 años) en el caso de precios de commodities, que modelos más complejos (modelos AR(1) con coeficientes estocásticos estimados mediante el filtro de Kalman). Un modelo de movimiento browniano, es un modelo de camino aleatorio continuo en logaritmos (Metcalf y Hasset, 1995), y en ese sentido los resultados de Engel y Valdés sugieren la conveniencia de usar un modelo como el de la ecuación (85). Una alternativa al modelo planteado se puede ver en Lamothe y Otero 2003, en una aplicación de un proceso de Metcalf & Hasset (en lugar del movimiento browniano geométrico) con tendencia y ciclo

Más allá de este análisis teórico, se realizaron los siguientes análisis estadísticos a las series de precios: se construyeron correlogramas (ver Apéndice). Antes de realizar los test de raíz unitaria, es conveniente inspeccionar los correlogramas de las series. Los cuadros del Apéndice presentan algunos ejemplos de las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial. Como se aprecia, en todos los casos presentados, las autocorrelaciones caen muy lentamente en el tiempo. Por otra parte, para varias de las series, el primer coeficiente de autocorrelación parcial es alto (mayor que 0.7), siendo los coeficientes restantes cercanos a cero, ello es indicativo de la potencial presencia de una raíz unitaria, lo que a su vez probaría que los precios siguen un camino aleatorio con drift y que por ende los retornos logarítmicos siguen un proceso browniano geométrico.

El próximo paso consiste en llevar a cabo test de raíces unitarias para cada serie (Fernández, 2007), a fin de verificar las conjeturas anteriores. De acuerdo a tests de Dickey-Fuller aumentados (ADF), en todos los casos presentado (exceptuando la serie de la palta), no rechazamos H_0 (presencia de una raíz unitaria) al 99 por ciento de confianza. Se aplicó el test de Dickey y Fuller aumentado (ADF) mediante el uso de E-views³⁶. Por lo tanto, se puede afirmar que empíricamente no se observa la reversión, aún cuando teóricamente debería estar en el largo plazo. Por simplicidad se trabajará con modelos de procesos brownianos, aún cuando en la práctica las volatilidades (con reversión a la media), debieran ser menores que las estimadas con el modelo seleccionado.

³⁶ En el apéndice se presentan a modo de ejemplo los análisis estadísticos de algunos productos, para el listado completo ver Contreras 2008.

Por último, por tratarse la aplicación de proyectos, con horizontes de evaluación en años (30 años en el caso de proyectos de embalses para riego), se puede tomar como referencia teórica, los modelos de tiempo continuo y las aproximaciones de tiempo discreto de Schwartz y Moon (2001). En este modelo se generan procesos de volatilidad y retornos decrecientes en el tiempo para los ingresos, que no es el tratamiento desarrollado en este trabajo, pero se llega a resultados similares, ya que si bien en (77) se tiene que μ y σ evolucionan en el tiempo (en estricto rigor son μ_t y σ_t), si se consideran coeficientes de reversión a la media para μ_t y σ_t , y siendo estas medias de largo plazo μ y σ , Schwartz y Moon demuestran que en el largo plazo el proceso (77) converge a

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (86)$$

De forma que en las ecuaciones (82), (83), (84) y (85), se debe considerar que μ y σ corresponden al valor medio de convergencia en el largo plazo. Si consideramos en nuestro modelamiento que los valores esperados y volatilidades de largo plazo, se estiman como el promedio a partir de los datos históricos, se tiene que el modelamiento de la ecuación (85) utilizada, es similar al de Schwartz y Moon para el periodo de regimen. El razonamiento para hacer la analogía, proviene de suponer que las tendencias de precios agrícolas y su volatilidad están ya estabilizados.

6.2 Tratamiento de las correlaciones entre activos

Como ya se ha señalado, en los casos en que los activos tienen cierta correlación, los valores aleatorios generados deben tener implícita esta correlación, esto se logra de la mediante la descomposición de Cholesky (Lamothe y Pérez Somalo, 2004), (Feria, 2005).

Se había presentado en el punto 2, que a partir de valores aleatorios independientes, se pueden generar valores aleatorios correlacionados, si previamente se ha calculado una matriz T que a su vez se deriva de la matriz de correlaciones.

Conjunto de valores aleatorios independientes η , generar valores aleatorios correlacionados ε :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} = T^T * [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_N]$$

Y entonces, se pueden modelar así las series de precios de activos (en este caso los precios de los productos agrícolas), pero ahora correlacionados.

Por otra parte se tiene el siguiente Teorema.

Teorema de combinaciones lineales de variables aleatorias independientes

Sean y_1, y_2, \dots, y_n un conjunto de variables aleatorias normalmente distribuidas con medias

$$E(y_i) = \mu_i \quad \text{y varianza} \quad V(y_i) = \sigma_i^2 \quad \text{y} \quad Cov(y_i, y_j) = 0 \quad \text{para} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \text{ Si}$$

$$l = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n \quad (87)$$

en donde a_1, a_2, \dots, a_n son constantes. Entonces, la distribución de muestreo de una combinación lineal de las variables aleatorias normales tiene una función de densidad normal con media y varianza:

$$\mu = E(l) = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \dots + a_n\mu_n \quad (88)$$

$$\sigma_l^2 = V(l) = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2 \quad (89)$$

Para que esto sea válido las Y_i son independientes.

Demostración:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \sum_{i=1}^N \lambda_{i,k} * \eta_i \\ \Rightarrow E(\varepsilon_k) &= \sum_{i=1}^N \lambda_{i,k} * E(\eta_i) = 0 \\ \Rightarrow V(\varepsilon_k) &= V\left(\sum_{i=1}^N \lambda_{i,k} * \eta_i\right) = \sum_{i=1}^N \lambda_{i,k}^2 = 1(*) \end{aligned}$$

6.3 Desarrollo de programa³⁷

Se desarrolló un programa en Visual Basic que a partir de los precios mensuales de M meses y estos de AN años en total, para n variables; obtiene los promedios anuales, luego los retornos anuales, obtiene la media de estos retornos y la desviación estándar. Mediante esta información también genera la matriz de correlaciones. Además genera variables aleatorias que siguen una N(0,1), para proceder con la simulación de promedios (precios) anuales para TI años en el futuro. El vector de N números aleatorios generados para cada año TI y simulación S se multiplica por la triangular inferior que se obtiene a través de la descomposición de Cholesky de la matriz de correlaciones.

Los supuestos estadísticos y matemáticos en los que se basó este programa se detallan en el Anexo 2.

Con este programa se modelarán los precios para los cultivos que inciden en la rentabilidad de este proyecto. Cabe señalar que una alternativa habría sido modelar directamente la variabilidad de los flujos de caja (la idea de Cash Flow at Risk, de Stein, Usher y otros, 2001), pero como a la fecha no existen proyectos concesionados de riego, no se cuenta con la información histórica necesaria para modelar.

6.4 Aplicación a los proyectos Quino y Traiguén

Se comparan los resultados de dos proyectos evaluados³⁸ en 1991 (Figuerola y otros, 1993), usando por un lado simulaciones computacionales y por otro los movimientos efectivos de precios que

³⁷ Basado en la Memoria de Titulación "Análisis de un Proyecto de Riego mediante VaR". 2007. Sebastián Patricio Carmona Caldera. Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile.

³⁸ Se utilizan proyectos antiguos, para poder calibrar el modelo contra el VAN ex post de los proyectos, en un análisis tipo back testing.

tuvieron los cultivos asociados en el período 1991- 2006. En ambas evaluaciones el resultado de las simulaciones fue más preciso (y similar a la evaluación ex post) que la evaluación determinística realizada en 1991. Se trabajó con cifras en millones de pesos de 1991. Los cultivos cuyos precios y márgenes se simularon fueron el trigo, la Avena, Cebada, lenteja, Remolacha, Papa, Poroto, Arveja y Avena- Vicia

Trabajando con precios de 1991, el Valor Actual Neto (determinístico) de Traiguén fue de \$923 millones y el de Quino fue de \$ - 686 millones. (Figueroa y otros, 1993).

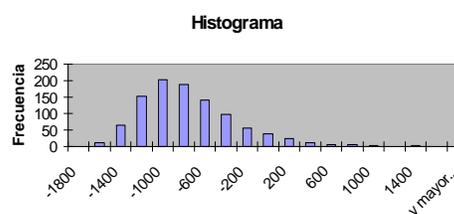
Considerando los cambios de precios **reales** entre los períodos 91-06 (se toma como base 1992 para hacer los resultados comparables con los del modelo determinístico), el VAN ex post de Traiguén fue de \$430 millones y el de Quino fue de \$-1056 millones.

TABLA 27
RESULTADOS SIMULACIÓN DEL VAN PARA QUINO
(Millones de \$)

Media	-860
Desviación estándar	453
Mínimo	-1 779
Máximo	1 275

Fuente: Elaboración propia a partir del modelo.

GRÁFICO 11
HISTOGRAMA PARA QUINO



Fuente: Elaboración propia a partir del modelo.

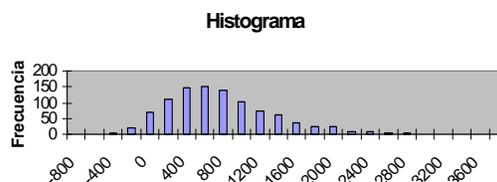
El VaR del embalse Quino es aproximadamente -\$1471.55 millones

TABLA 28
RESULTADOS SIMULACIÓN DEL VAN PARA TRAIQUÉN
(Millones de \$)

Media	692
Desviación estándar	604
Mínimo	-534
Máximo	3 541

Fuente: Elaboración propia a partir del modelo.

GRÁFICO 12
HISTOGRAMA PARA TRAIQUÉN



Fuente: Elaboración propia a partir del modelo.

El VaR del embalse Quino es aproximadamente -123 millones de pesos.

Para los dos proyectos los resultados ex post se encuentran dentro del histograma y la media de estas simulaciones es más similar al valor ex post que el valor determinístico.

TABLA 29
RESUMEN DE RESULTADOS DE LA CALIBRACIÓN
(Miles de \$ ó U\$)

Proyecto	VAN det.	VAN simulado	VAN ex post	VaR simulado
Quino	-\$886 000	-\$860 000	-\$1 056 000	-\$1 471 000
Traiguén	\$923 000	\$692 000	\$430 000	-\$123 000

Fuente: Elaboración propia.

6.5 Una extensión del modelo: Saltos de Poisson para eventos extraordinarios³⁹

6.5.1 La distribución de Poisson⁴⁰

El modelo de Merton (1976) asume como comportamiento del precio del activo el proceso de la ecuación diferencial estocástica (91). Con esta expresión se desea explicar por qué la distribución de los retornos logarítmicos de un activo financiero puede tener “colas pesadas”. Este tipo de distribuciones se presenta debido a que las trayectorias continuas asumidas por el Movimiento Browniano Geométrico pueden ser repentinamente perturbadas por grandes caídas o saltos conocidos en los mercados como “crash”.

$$\frac{dS}{S} = (r - \lambda\gamma)dt + \sigma dW + dP \quad (90)$$

Donde S: precio del activo, r: tasa de interés libre de riesgo, λ : número promedio de saltos por cada T, γ : porcentaje de cambio del activo, σ : volatilidad (desviación estándar del retorno logarítmico del activo), W: proceso de Gauss-Wiener o movimiento browniano, P: proceso de Poisson; W y P son procesos estocásticos independientes.

Las caídas en el mercado son representadas por un proceso de Poisson. Las variables aleatorias que registran el número de ocurrencia de un evento por unidad de tiempo, espacio, volumen o cualquier otro índice suelen asociarse con la distribución de Poisson. Algunas de estas variables, que también suelen llamarse de conteo, son: los accidentes de tránsito fatales por semana en una ciudad, las llegadas de clientes una cola de un Banco, etc. En el caso de Merton (1976) la variable aleatoria es el número de caídas del precio de un activo financiero en el mercado por período de tiempo. La distribución de Poisson tiene la siguiente forma:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} & \text{para } y = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (91)$$

El parámetro λ es no negativo. Si una variable aleatoria Y esta distribución entonces su valor esperado y varianza son iguales a este parámetro. $E[Y] = \text{Var}[Y] = \lambda$. A λ se le conoce como tasa promedio de ocurrencia o tasa de incidencia que hace referencia a la frecuencia con que ocurre un

³⁹ Se agradece al profesor Jorge Otero, de la Universidad Autónoma de Madrid, quien sugirió incorporar este análisis. Se agradece a Sebastián Carmona el desarrollo de la programación en VB.

⁴⁰ Los aspectos teóricos de este punto, han sido tomados de Villamil (2006).

evento. Si λ está expresado como frecuencia o probabilidad, entonces $1/\lambda$ es el intervalo medio entre ocurrencias de eventos.

El supuesto de una tasa constante (o probabilidad constante) no siempre se cumple en el mundo real. Por ejemplo la tasa de llamadas telefónicas de entrada difiere de acuerdo a la hora dentro de un día, pero si nos focalizamos en un intervalo de tiempo durante el cual la tasa es constante, como desde las 2 a las 4 PM en un día laboral, la distribución se puede utilizar como un modelo aproximado para estimar el tiempo hasta la siguiente llamada. Con similares consideraciones se pueden aplicar a los siguientes ejemplos:

- Tiempo hasta que una particular radioactiva decae.
- Tiempo entre accidentes fatales en una calle.
- Tiempo hasta el siguiente no pago (default) en un modelo de riesgo de crédito.

En el caso de proyectos de embalses para riego, se pueden considerar como eventos o caídas no consideradas en el Movimiento Browniano Geométrico, situaciones extremas de eventos climáticos (recordar que los embalses garantizan seguridad en 85 de cada 100 años) como sequías prolongadas que afecten la disponibilidad de agua o inundaciones y rebalses que afecten las cosechas, también se podría tratar de cataclismos que dañen el embalse o las vías de transporte y comercialización de los cultivos. Se puede considerar entonces $\lambda=0,15$

La distribución de Poisson carece de memoria (se habla también de evolución son consecuencias posteriores): el número de llegadas que puede ocurrir después de un instante “t” es independiente del número de llegadas que ocurran antes de “t”. Esto implica que los tiempos entre llegadas consecutivas son variables aleatorias independientes. En el caso de procesos homogéneos de Poisson (cuando λ es una constante), estos tiempos entre llegadas se distribuyen exponencialmente con parámetro λ .

6.5.2 Generación de ocurrencias según una Poisson

Para poder incorporar eventos en una simulación de acuerdo a este modelo, se puede usar un método muy simple basado en transformaciones inversas de una muestra aleatoria (Radev, 2005): Dada una variable aleatoria U , que sigue una distribución uniforme en el intervalo (0,1), la variable:

$$T = F^{-1}(U) \quad (92)$$

Tiene una distribución exponencial donde F^{-1} es una función definida por

$$F^{-1}(p) = \frac{-\ln(1-p)}{\lambda}. \quad (93)$$

Si U es uniforme entre (0,1) también lo es $1-U$. De esta forma se pueden generar eventos exponenciales con la siguiente ecuación:

$$T = \frac{-\ln U}{\lambda}. \quad (94)$$

Otros métodos de generación se discuten en Knuth (1998).

6.5.3 Integración de Movimiento Browniano con procesos de Poisson

Se puede incorporar el proceso de Poisson en un modelo de precio de activos financieros (Petrucci, 2001):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX + (J - 1) S dq \quad (95)$$

Donde:

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt \\ 1 & \text{con probabilidad } \lambda dt \end{cases}$$

Hipótesis :

- No hay correlación entre el movimiento browniano y el proceso de Poisson. Cuando hay un salto ($dq=1$) S toma inmediatamente valor JS
- J = variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $P(J)$, sin correlación con el movimiento browniano y el proceso de Poisson.

El proceso estocástico del logaritmo de S es :

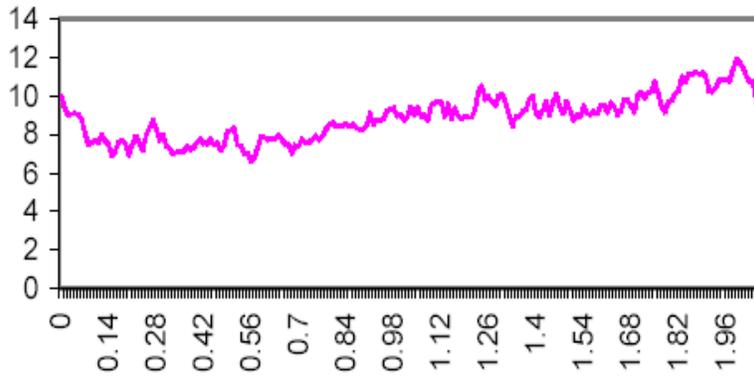
$$d(\log S) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dX + \log(J) dq \quad (96)$$

Esta es una versión “jump-diffusion” de Itô.

En base a este modelamiento, se simularán para los proyectos de embalses, márgenes para los agricultores que evolucionan según trayectorias brownianas para los precios de los productos agrícolas, pero que son afectadas por eventos extremos (climáticos o catástrofes naturales), que reducen a cero los márgenes de algunos productos durante un período. En períodos posteriores los márgenes se recuperan.

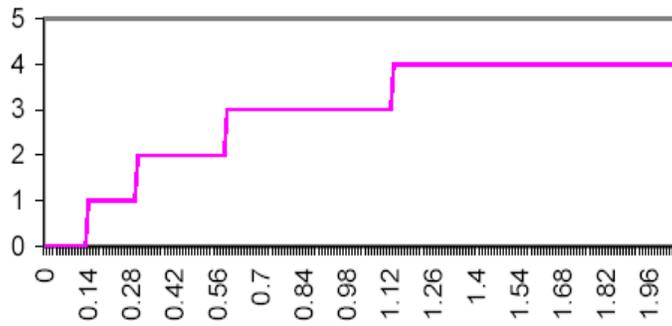
A continuación se grafican los resultados de simulaciones en las que se generan trayectorias de precios según un movimiento browniano geométrico, según una Poisson, y luego una trayectoria integrada de la generación de precios según procesos brownianos y saltos de Poisson. Cabe señalar que en los proyectos de embalses el movimiento browniano se asocia al precio de los productos agrícolas, mientras que las caídas se asociarán a la producción. Además en estos gráficos de ejemplo no se considera una recuperación brusca de los precios luego de la caída, lo que sí se considerará en la producción agrícola en los proyectos de embalses, ya que los periodos en ese caso son años, y entre un año catastrófico y el siguiente cabe esperar una recuperación que ya no es desde cero:

GRÁFICO 13
TRAYECTORIA SIMULADA CON MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO



Fuente: Petrucci, 2001.

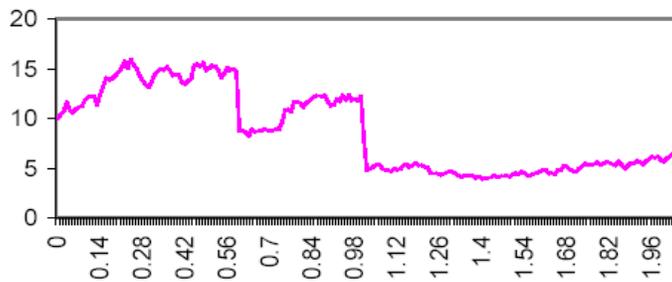
GRÁFICO 14
TRAYECTORIA SIMULADA CON UN PROCESO DE POISSON



Fuente: Petrucci, 2001.

GRÁFICO 15
TRAYECTORIA SIMULADA CON UN PROCESO INTEGRADO BROWNIANO GEOMÉTRICO MÁS SALTOS DE POISSON

$$dS = a*dt + b*dX + (J-1)*S*dq$$



Fuente: Petrucci, 2001.

6.5.4 Aplicación de procesos de Poisson a los proyectos de Quino y Traiguén

Descripción de posibles eventos catastróficos.

Para identificar el tipo de evento externo adverso, hay que considerar que ambos proyectos se ubican en la IX Región del país, una zona austral donde la probabilidad de sequía es casi nula, los desabastecimientos de agua se podrían relacionar más bien con fallas estructurales del sistema de riego que provocarían períodos de escasez relativa de agua.

Lo más frecuente como catástrofe para la agricultura en estas zonas son las heladas. También se podrían generar algunos episodios de inundaciones en casos de lluvias muy por sobre la media de un año normal

Una posible distribución para el 15% de casos extraordinarios ya mencionado⁴¹ podría ser:

TABLA 30
EVENTOS Y PROBABILIDADES EN IX REGIÓN

Evento	Probabilidad (en 100) años
Heladas	0,12
Inundación	0,02
Periodos secos por fallas del sistema	0,01

Fuente: Elaboración propia en base a entrevistas.

Los daños que estos eventos pueden causar a los distintos tipos de productos⁴² de esos valles, se describen a continuación:

Heladas:

No afectan a los cultivos de inviernos ya que estos se elijen justamente por resistir las heladas (en Quino y Traiguén son el trigo, la avena, cebada, triticali, raps, lupino y lenteja): Para estos la cantidad Q con evento es igual a la cantidad Q normal

Afecta a los cultivos de primavera: remolacha, papas, porotos, arvejas y cualquier hortaliza, con una pérdida de entre 100% y 80%. En el caso de frutales la pérdida puede ser de un 50 a 60%.

Lo demás (forrajeros, praderas, etc) no se daña con las heladas, (por lo tanto $Q = Q$ normal).

Inundación:

Cultivos de invierno: Pérdidas bajas debido al tipo de cultivo y a la porosidad del terreno (filtra rápidamente): entre 0% y 20% de pérdidas.

Cultivos de primavera: Pérdidas más altas debido al tipo de cultivo ¿cuánto?, es difícil de predecir. Para efectos de este texto se utilizará un 50%

Lo demás (forrajeros, praderas, etc) no se daña ($Q = Q$ normal)

Sequías o fallas del sistema:

Las sequías se pronostican a tiempo y se cambia la estructura de cultivos. Por lo tanto no hay pérdidas.

⁴¹ Estas probabilidades están basadas en juicios de expertos entrevistados (Ingenieros Agrónomos).

⁴² Estos daños también están basados en entrevistas a expertos.

Las fallas del sistema suelen ser por períodos breves. Por tanto un supuesto razonable es el de $Q = Q$ normal para todos los cultivos.

Resultados de la simulación

Embalse Quino

La simulación⁴³ para este embalse con eventos catastróficos arrojó las siguientes estadísticas:

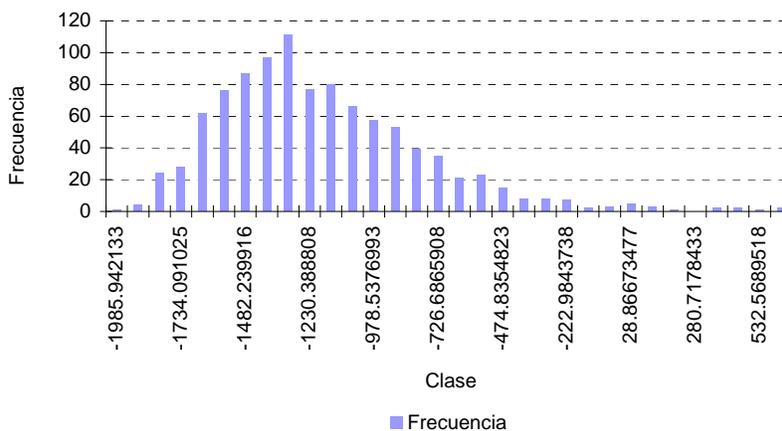
TABLA 31
RESUMEN DE RESULTADOS DEL MODELO EXTENDIDO QUINO
(Millones de \$)

Media	-1 229,76376
Error típico	12,6704238
Mediana	-1 302,63024
Desviación estándar	400,673983
Varianza de la muestra	160 539,64
Curtosis	1,94179795
Coefficiente de asimetría	1,0953984
Rango	2 602,46145
Mínimo	-1 985,94213
Máximo	616,519321

Fuente: Elaboración propia.

El histograma asociado a esta simulación es el siguiente:

GRÁFICO 16
HISTOGRAMA PARA QUINO MODELO EXTENDIDO



Fuente: Elaboración propia.

En relación al modelo no paramétrico sin eventos catastróficos, se pueden contrastar estos resultados con el de dicha simulación que arrojó una media de \$ -860 millones, y con los del modelo determinístico original: de \$ - 686 millones. Como era de esperar, el modelo con saltos de Poisson entrega un resultado menor (-\$1.230 millones) que el de la simulación que sólo consideraba riesgos de precios de mercado de productos.

⁴³ Se realizó con el programa VB desarrollado por Sebastián Carmona.

En la tabla 82 se mostró que el verdadero VAN de Quino (ex post), fue de $-\$1.056.000.000$, es decir, el modelo no paramétrico original entregaba mejores resultados que el modelo determinístico, pero el modelo con saltos de Poisson se aproxima aún más al VAN ex post⁴⁴.

El VeR en este caso extendido resulta ser de $\$ -1.700$ millones, en el modelo no paramétrico original era de $\$ -1.471$ millones. Como es lógico el VeR disminuye. Considerando los mejores resultados (simulación versus ex post) de este modelo extendido, se recomienda usar el resultado de $\$ -1.700$ millones como medida de VeR.

Embalse Traiguén

La simulación para este embalse con eventos catastróficos arrojó las siguientes estadísticas:

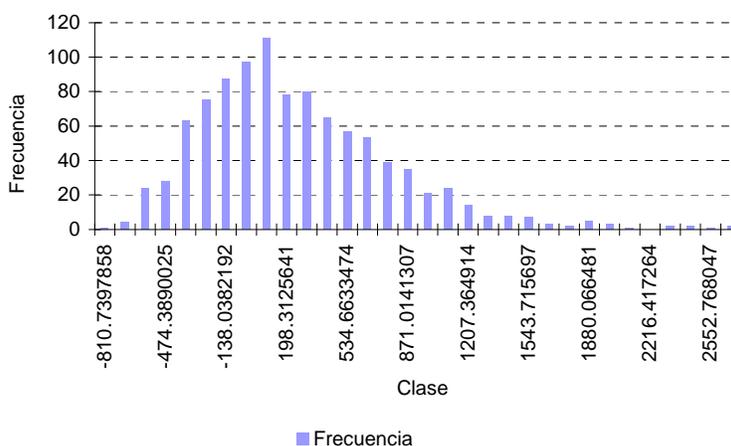
TABLA 32
RESUMEN DE RESULTADOS DEL MODELO EXTENDIDO TRAIGUÉN
(Millones de \$)

Media	198,880529
Error típico	16,9177487
Mediana	101,360938
Desviación estándar	534,986187
Varianza de la muestra	286210,22
Curtosis	1,94201203
Coefficiente de asimetría	1,09546764
Rango	3475,62476
Mínimo	-810,739786
Máximo	2664,88497

Fuente: Elaboración propia.

El histograma asociado a esta simulación es el siguiente:

GRÁFICO 17
HISTOGRAMA PARA TRAIGUÉN MODELO EXTENDIDO



Fuente: Elaboración propia.

⁴⁴ Esta comparación se sólo a modo de referencia, ya que en estricto rigor no se pueden comparar los resultados del modelo extendido con la evaluación ex post, porque esta última no incorporó los eventos climáticos extremos y sus daños en las cosechas.

En relación al modelamiento sin eventos catastrófico, se pueden contrastar estos resultados con el de dicha simulación que arrojó una media de \$ 692 millones, y con los del modelo determinístico original: de \$ 923 millones. Nuevamente el modelo con saltos de Poisson entrega un resultado menor, en este caso de 198 millones, que el de la simulación que sólo consideraba riesgos de precios de mercado de productos.

En la tabla 82 se mostró que el VAN ex post de Traiguén, fue de \$430.000.000, es decir, el modelo no paramétrico original entregaba mejores resultados que el modelo determinístico, pero el modelo con saltos de Poisson se aproxima más al VAN ex post⁴⁵. En este caso las relaciones son:

- Modelo determinístico original / evaluación ex post = 2.14
- Modelo paramétrico original / evaluación ex post = 1.6
- Modelo paramétrico extendido / evaluación ex post = 0.46

El VeR en este caso extendido resulta ser de \$ -474 millones, en el modelo no paramétrico original era de \$-123 millones. Como es lógico, nuevamente el VeR disminuye.

En síntesis, en ambos casos el modelo extendido mejora (al calibrar contra los resultados ex post) en relación a los resultados del modelo original. Claramente el resultado anterior no es generalizable.

⁴⁵ En este caso también aplica el comentario del pie de página anterior, en el sentido de que esta comparación es sólo referencial, porque la evaluación ex post no incluyó los eventos climáticos adversos ocurridos en el período, ni su impacto en las cosechas.

7. Conclusiones

Los objetivos iniciales de este trabajo eran: analizar y aplicar metodologías de medición de rentabilidades y riesgos, que permita realizar comparaciones entre proyectos y difundir la aplicabilidad de estas herramientas.

La concreción de los objetivos anteriores permitió validar la hipótesis: se pueden estimar los riesgos de proyectos mediante distintos modelos. En el caso de los basados en VeR, en particular aquellos no paramétricos, que vía simulación de Monte Carlo permiten incluir además las opciones, mediante análisis de sensibilidad, de escenarios, mediante ajustes a tasas de descuento, etc.

Respecto a la aplicabilidad del análisis de riesgo a proyectos de riego, se demuestra que la metodología propuesta con análisis de sensibilidad, el análisis probabilístico como marco teórico y la simulación como método práctico, es perfectamente aplicable, se comprobó además que parte importante de la información necesaria para la aplicación de la metodología está disponible y es pública (no sólo en ese proyecto sino en todos los utilizados de ejemplo en este texto) y que en consecuencia no hay problemas prácticos para superar el análisis tradicional de evaluación bajo supuestos de certidumbre.

Se puede aseverar que los resultados obtenidos muestran que las herramientas de análisis de riesgo aportan valor a la evaluación de proyectos: se puede llegar a determinar la existencia de probabilidades de VAN negativo distintas de cero, lo cual constituye información valiosa para la toma de decisiones.

Los resultados anteriores, permitirán una mejor priorización de proyectos. En efecto, si se generaliza la estimación de este tipo de métricas, será posible jerarquizar con más criterios: para proyectos de VAN similares, será posible discriminar según probabilidad de perder, VeR, intervalo de confianza, o una combinación de esos criterios. Estos nuevos criterios (actualmente las decisiones se toman basadas sólo en VAN) permitirán mejorar además el proceso de toma de decisiones.

Una línea de investigación nueva, relevante para contrastar resultados, puede ser el de simulación histórica. Sería interesante desarrollar modelos que permitan reconstruir ex post las distribuciones (histogramas) del VAN de proyectos antiguos, utilizando los vectores de precios históricos desde la entrada en operación de los embalses hasta la fecha.

Bibliografía

- Alessi, G. (2005) Value at Risk (VaR) in Real Options analysis. Università degli Studi - L'Aquila. Facoltà di Economia. Dip. di Sistemi ed Istituzioni per l'Economia.
- Amram, M. y N. Kulatilaka, (1999). Opciones Reales: Evaluación de inversiones en un mundo incierto. Harvard Business School Press.
- Bernal (2004) SV: Simulador para la Valuación de títulos de renta fija y sus Opciones. Trabajo presentado en el Encuentro Internacional de Finanzas 2004.
- Best P. (1999). Implementing Value at Risk. John Wiley & Sons Ltd. Reprinted May 1999.
- Black, F. y M. Scholes, (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy* 81(3), 627-654
- Blanch Leland y Tarquin Anthony.(1998) Ingeniería Económica. 3a. edición, McGraw Hill.
- Bogue y Roll en (1974). "Capital Budgeting of Risky Projects with 'Imperfect' Markets for Physical Capital". *Journal of Finance*, May 1974.
- Borgonovo E, y Peccati, L., (2005). The importance of assumptions in investment evaluation. *International Journal of Production Economics*. (www.sciencedirect.com).
- Boyle, P., (1977). "Options: A Monte Carlo approach," *Journal of Financial Economics* 4 (3), 323-338.
- Brealey R. y Myers, S., (1993). *Fundamentos de Financiación Empresarial*, Cuarta Edición, España, McGraw - Hill.
- Breeden, D. (1979). "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", *Journal of Financial Economics*, 7: pp. 265-296.
- Brennan M. y E. Schwartz, (1985). "Evaluating Natural Resource Investments" en *Journal of Business*, vol. 58, No. 2, 135-157.
- Brooks, Chris and Persaud, Gita (2002). *Value at Risk and market crashes*. ISMA Center.

- Carmona, S. Memoria de Titulación “Análisis de un Proyecto de Riego mediante VaR”. 2007.. Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile.
- Cartes, Contreras y Cruz (2005) La Tasa Social de Descuento en Chile. Documentos de Trabajo. Serie de Gestión. N°77. Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile.
- Campbell, J. (1993). “Intertemporal Asset Pricing without Consumption Data”, *American Economic Review*. 83: pp. 487-512.
- Coleman R.(1976) *Procesos Estocásticos*. Editorial Limusa. México.
- Contreras E. (2008). “Aplicación de metodologías basadas en valor en riesgo para el análisis de riesgos en proyectos de embalses”. Tesis doctoral de la Universidad Autónoma de Madrid.
- Contreras E, y Fernández V. (2003). “Una Nueva Metodología Para La Evaluación De Proyectos De Inversión: Las Opciones Reales”. *Revista de Ingeniería de Sistemas*. Volumen XVII, Número 1, Julio de 2003.
- Contreras E. y Cruz J.M. (2006) “No más VAN: el Value at Risk (VaR) del VAN, una nueva metodología para análisis de riesgo”. *Revista Trend Management*, Volumen 8.
- Constantinides, G. (1978). “Market risk adjustment in project evaluation.” *Journal of Finance* 33(2), 603-616.
- Consultora: SMI - Luis San Martín Moll , (2004). Estudio *Construcción Embalse Ancoa, Etapa de Diseño VII Región*. Informe Técnico.
- Cox, J., y S. Ross, (1976), “The valuation of option for alternative stochastic processes,” *Journal of Financial Economics* 3, no. 1/2: 145-166.
- Cruz, J.M. (2004) *Measurement of Risks in the Evaluation of Mining Projects: The VaR of VAN*, Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile - Atacama Resource Proyecto Fondef 1087.
- Departamento de Planificación – DOH, (2002). *Estudio Evaluación de Medio Término Sistema de Regadío Canal Laja – Diguillín*. Informe técnico.
- Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile. (2006) *Estudio análisis para el mejoramiento del proceso de evaluación de proyectos de riego*. Informe Técnico.
- Diez C y Avilés H. (1998) *Apuntes del curso de Evaluación de Proyectos* (Capítulo 10), Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile.
- Dowd K. (1999) *Beyond Value at Risk – The new science of risk management*. John Wiley & Sons Ltd. Reprinted January 1999.
- Dickey, D.A. and W.A. Fuller (1979), “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root,” *Journal of the American Statistical Association*, 74, p. 427–431.
- Embrechts, P. McNeil, A. & Straumann. D. (1999) *Correlation: Pitfalls and Alternatives*. Departement Mathematik, ETH Zentrum, CH-8092 Zurich. March 1999.
- Embrechts, P. H’oing, A. Juri A. (2002) *Using Copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks*. Department of Mathematics ETHZ, CH-8092 Zurich, Switzerland.
- Embrechts. Paul (2003). *The Wizards of Wall Street: did mathematics change finance?* Departement Mathematik. ETH Zürich, 8092 Zürich. Switzerland.
- Empresa Consultora Cygsa, DOH (2002), *Estudio Agroeconómico Valle de Petorca*. Informe Técnico.
- Engel E. y Valdés R. (2000): “Optimal Fiscal Strategy for oil exporting countries”, IMF Working Paper.
- Engel y Valdés (2002) Prediciendo el precio del cobre: ¿Más allá del camino aleatorio?. En *Dilemas y Debates en torno al cobre*. Dolmen. (Patricio Meller editor).
- Engel E. (1998). “Prediciendo Precios de Commodities”, Serie Docente, N° 1. Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile.
- Engle, Robert and Manganelli S. (1999). CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles. Working Paper 7341. *National bureau of economic research*. Cambridge.
- Ergashev, B. (2002) A note on a generalized Black-Sholes formula. Department of Economics. Elliot Hall Campus.
- Espinoza, C., 2002, “Valor de la información y teoría de opciones en la evaluación de proyectos mineros”, Memoria de Ingeniero Civil de Minas y Tesis de Magíster en Gestión y Dirección de Empresas del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile.
- Fama, E. Y K. French (1996). “Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies”, *Journal of Finance*, 51: pp.55-84.
- _____(1992). “The Cross-section of Expected Stock Returns”, *Journal of Finance*, 47: pp.427-465.
- Feria, J.M. (2005) *El riesgo de Mercado: su medición y control*. España. Delta Publicaciones.
- Fernández V. (2007), *Procesos no Estacionarios*, Apuntes del curso IN72W, Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile.

- ____(2003), *Extreme Value Theory and Value at Risk*, Documentos de Trabajo, Serie Gestión, N°47, Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile.
- Figuroa G, Muñoz V et al (1993) ."*Regadío Canal Victoria - Traiguén - Lautaro*" Programa de Adiestramiento en preparación y evaluación de proyectos, Santiago - Chile. Insituto de Economía. Pontificia Universidad Católica.
- Fondef – Universidad de Chile. (2003). *Desarrollo de herramientas para la articulación de un mercado de capitales orientado a la mediana minería en Chile*. Propuesta de investigación del proyecto FONDEF 1087.
- Geotécnica Consultores, (1997). *Estudio de Factibilidad Habilidadación Canal La Victoria de Vilcún* (4 volúmenes), Informe Técnico.
- Glasserman, Paul, Heidelberger Philip and Shahabuddi Perwez. (2000) Efficient Monte Carlo methods for value-at-risk.
- González, Ana María (2004) *Value at Risk (VaR) con la metodología RiskMetrics*,. Universidad Autónoma de Madrid.
- Hooper V. y Pointon J. (2002) *Obsolescence Risk and Project Appraisal*. University of New South Wales and University of Plymouth. Working Paper Series. SSRN Electronic Library (<http://papers.ssrn.com>).
- Hao, C., Yan, G., Jun, H., Komlan, K..(2005) *Value at Risk-- Monte Carlo simulation*. University of Exeter. Working Paper. 27/06/05
- Hidrogestión (2005) *Estudio de Prefactibilidad de La Ligua – Petorca*. Informe Técnico.
- Ikons, (2002).*Test de Asociación Pública – Privada para el desarrollo de Obras Hidráulicas en Chile: Elementos de Diseño y una Aplicación del PSC para el Embalse Convento Viejo*. Informe Técnico.
- Jacoby, H. y D. Laughton, (1987), "Project analysis using methods of derivative asset valuation" MIT Energy Laboratory Working Paper, 87-001WP, marzo.
- Jorion P. (2004) *Valor en riesgo: el nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados*. Editorial Limusa. México 2004.
- Kettlun A. (1999), Evaluación por simulación de un proyecto en la minería del cobre usando la teoría de opciones. Tesis para optar simultáneamente al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería, mención Industrial, y al título de Ingeniero Civil Industrial. Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile.
- Knuth D. (1998). *The Art of Computer Programming*, volume 2: Seminumerical Algorithms, 3rd edn. Boston: Addison-Wesley. ISBN 0-201-89684-2. See section 3.4.1, p. 133.
- Lamothe Prosper y Otero Jorge (2003) *Garantías de Valor Residual en la Industria Aeronáutica: Un Enfoque de Valoración Basado en Opciones Reales*. Universidad Autónoma de Madrid.
- Lamothe P. y Carillo S. (2001) *Nuevos retos en la medición del riesgo de Mercado*. Perspectivas del Sistema Financiero. N° 72.
- Lamothe P. y Pérez Somalo (2004). *Opciones Financieras y Productos Estructurados* España. Mc Graw Hill. Segunda Edición.
- Larsen N. (2000) Royal Institute of Technology. Dept. of Mathematics, Stockholm, Sweden), Mausser H. (Algorithmics, Inc.) and Uryasev S. (University of Florida, Dept. of Industrial and Systems Engineering). Algorithms for optimization of value at- risk.
- Lawrence C. & Robinson G (market risk management division at BZW), (1995) "How safe es Risk Metrics?", *Market Risk*, Vol 8, N° 1.
- Linsmeier Thomas J. and Pearson Neil D. (1996) *Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk*. University of Illinois at Urbana-Champaign. July.
- Longerstaey J. & Zangar P, Market risk research group at JP Morgan, (1995) "A transparent tool", *Market Risk*, Vol. 8, N° 1.
- Manfredo M. and Leuthold R. (1998). Agricultural Applications of Value-at-Risk Analysis: A Perspective. Department of Agricultural and Consumer Economics. University of Illinois at Urbana-Champaign. OFOR Paper Number 98-04. May 1998.
- McDonald, R. y D. Siegel, (1986), "The Value of Waiting to Invest" en *Quarterly Journal of Economics* 101, 707-728.
- Merton, R. (1976) "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous", *Journal of Financial Economics* , 3: 125-144.
- Metcalf y Hasset, (1995). Investment Under alternative return assumptions: comparing random walk and mean reversion. National Bureau of Economic Research.
- Moel A., y P. Tufano, (2000), "When are Real Options Exercised?: An Empirical Study of Mine Closings". Harvard Business School Working Paper 99-117.

- MIDEPLAN (1996). “Guía metodológica para la formulación y evaluación de proyectos de riego mediante el método del presupuesto”. Documento de Trabajo.
- Ministerio de Obras Públicas (2005). *Cuenta Gestión MOP 2005*.
- Markowitz, Harry. (1952). “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, 7: pp. 77 -91.
- Paddock, J., D. Siegel y J. Smith (1988), “Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases” en *Quarterly Journal of Economics* 103, 479-508.
- Pearson N. (2002) *Risk Budgeting: Portfolio problem solving with Value at Risk*. Published by John Wiley & Sons.
- Petrucci. M. (2001). “La formulación de Black-Scholes con Jump-Diffusion”. Presentación realizada en el marco de los Seminarios de Matemática Financiera Instituto BME RiskLab-Madrid.
- Quigg, L., (1993), “Empirical testing of real option-pricing models” en *Journal of Finance* 48(2), 621-640.
- Radev, D. (2005) *Stochastic Process Generation for Traffic Flow Simulation*. Telsiks 2005 Conference. IEEE. Serbia y Montenegro.
- Ramírez E. (2004) *Valor en Riesgo no lineal para portafolios con activos contingentes*. Trabajo presentado en el Encuentro Internacional de Finanzas 2004.
- Roll, R. (1977). “A Critique of the Assets Pricing Theory Test: On Past and Potential Testability of the Theory”, *Journal of Financial Economics*, 4: pp. 129-176.
- Ross, S.A. (1976). “The Arbitrage Theory of Capital Assets Pricing”, *Journal of Economic Theory*, 13 pp. 341-360.
- Ruiz R. (2005) Camargo, Tesis de Master en Comercio y Finanzas Internacionales, Universidad De Barcelona.
- Sáez F. y Rodríguez N.(2002) “Rentabilidad de Los Regadíos de Iniciativa pública de la Cuenca de Guadalquivir”, Libro Blanco de la Agricultura y el Desarrollo Rural.
- Samis, M., Loughton, D., and Poulin, R. (2003) *Risk Discounting: The Fundamental Difference between the Real Option and Discounted Cash Flow Project Valuation Methods*. Kuiseb Minerals Consulting (KMC) Working Paper.
- Sapag Nassir y Reinaldo Sapag (1995). *Preparación y Evaluación de Proyectos*. McGraw Hill, 3a. ed., 1995.
- Savvides S. (1994) Risk Analysis in Investment Appraisal. *Project Appraisal*, Volume 9 Number 1, pages 3-18, March 1994.
- Sharpe, W.F. (1964). “Capital Assets Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk”, *Journal of Finance*, 19: pp. 425 – 442.
- Shimko D. (2001) “NPV No More: RPV for Risk-Based Valuation”. RCM, Risk Capital Management Partners. February 2001.
- Schwartz E. y M. Moon, (2001), “Rational Pricing of Internet Companies Revisited.” Documento de trabajo, Anderson School of Business, University of California in Los Angeles.
- Simons Katerina. (2000). The Use of Value at Risk by Institucional Investors. Federal Reserve Bank of Boston. *New England Economic Review*. 2000.
- Statman, M. (1987). “How Many Stock Make a Diversified Portfolio”, *Journal of Finance and Quantitative Analysis* 23: pp. 354-364.
- Stein J., Usher S., LaGattuta D. and Youngen J, (2001), “A Comparable Approach to Measuring CashFlow-At-Risk for Non-Financial Firms”. National Economic Research Associates, *Journal of Applied Corporate Finance*. Vol 13. N° 4, 8-17.
- Stulz (1999) “What’s wrong with Capital Budgeting”, Address delivered at the Eastern Finance Association meeting in Miami Beach, April 1999 upon reception of the 1999 Eastern Finance Association Scholar Award
- Szego (2004) Measures of risk *European Journal of Operational Research* 163 (2005) 5–19.
- Trigeorgis L., (1996), *Real Options*. The MIT Press.
- Tufano, P., (1998), “The determinants of stock price exposures: Financial engineering and the gold mining industry” en *Journal of Finance* 53, 1015-1052.
- Vilariño A. (2001) *Turbulencias financieras y riesgos de mercado*. Financial Times – Prentice Hall.
- Villamil J. (2006) Modelos de valoración de opciones europeas en tiempo continuo. *Cuadernos de Economía*. ISSN 0121-4772. v.25 n.44 Bogotá.
- Zenteno L., 1998. “Definición del tamaño de producción para un proyecto minero utilizando teoría de opciones – aplicación y análisis a un caso real”. Tesis para optar simultáneamente al Grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería, Mención Industrial y al título profesional de Ingeniero Civil de Minas. Universidad de Chile.

Anexos

Anexo 1 Test de raíz unitaria para precios de productos agrícolas

Date: 07/30/07 Time: 21:46

Sample: 1985:01 2005:12

Included observations: 21

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. ****	. ****	1	0.580	0.580	8.1259	0.004
. **	. *	2	0.254	-0.124	9.7662	0.008
. **	. **	3	0.238	0.221	11.288	0.010
. *	. *	4	0.181	-0.066	12.219	0.016
. .	. .	5	0.027	-0.097	12.241	0.032
. .	. .	6	-0.014	0.022	12.248	0.057
. *	. *	7	0.096	0.139	12.566	0.083
. .	. *	8	0.048	-0.112	12.650	0.124
. *	. *	9	-0.112	-0.124	13.151	0.156
. **	. **	10	-0.273	-0.268	16.416	0.088
. **	.	11	-0.285	-0.039	20.337	0.041
. **	.	12	-0.212	0.046	22.739	0.030

Null Hypothesis: AVENA has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=8)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.868670	0.0678
Test critical values:		
1% level	-3.831511	
5% level	-3.029970	
10% level	-2.655194	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Warning: Probabilities and critical values calculated for 20 observations and may not be accurate for a sample size of 19

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(AVENA)

Method: Least Squares

Date: 07/30/07 Time: 21:48

Sample(adjusted): 1985:03 1986:09

Included observations: 19 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AVENA(-1)	-0.523712	0.182563	-2.868670	0.0111
D(AVENA(-1))	-0.020215	0.205128	-0.098550	0.9227
C	42995.62	16519.73	2.602682	0.0192
R-squared	0.383358	Mean dependent var		-3135.437
Adjusted R-squared	0.306278	S.D. dependent var		15061.02
S.E. of regression	12544.32	Akaike info criterion		21.85586
Sum squared resid	2.52E+09	Schwarz criterion		22.00499
Log likelihood	-204.6307	F-statistic		4.973491
Durbin-Watson stat	2.214753	Prob(F-statistic)		0.020906

Date: 07/30/07 Time: 21:49

Sample: 1985:01 2005:12

Included observations: 22

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. *****	. *****	1	0,739	0,739	13,745	0,000
. ****	. * .	2	0,504	-0,094	20,454	0,000
. **	. .	3	0,321	-0,038	23,320	0,000
. *	. * .	4	0,158	-0,091	24,049	0,000
. .	. * .	5	0,004	-0,113	24,050	0,000
. **	. ** .	6	-0,193	-0,254	25,284	0,000
. **	. .	7	-0,294	-0,006	28,320	0,000
. **	. ** .	8	-0,230	0,209	30,308	0,000
. *	. * .	9	-0,104	0,157	30,752	0,000
. *	. * .	10	-0,083	-0,168	31,052	0,001
. *	. * .	11	-0,086	-0,097	31,405	0,001
. *	. * .	12	-0,094	-0,135	31,868	0,001

Null Hypothesis: LECHUGA has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=8)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.963687	0,2991
Test critical values:		
1% level	-3.788030	
5% level	-3.012363	
10% level	-2.646119	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(LECHUGA)

Method: Least Squares

Date: 07/30/07 Time: 21:50

Sample(adjusted): 1985:02 1986:10

Included observations: 21 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LECHUGA(-1)	-0,222260	0,113185	-1,963687	0,0644
C	1875,770	849,3994	2,208349	0,0397
R-squared	0,168711	Mean dependent var		258,8024
Adjusted R-squared	0,124959	S.D. dependent var		1020,969
S.E. of regression	955,0511	Akaike info criterion		16,65180
Sum squared resid	17330330	Schwarz criterion		16,75128
Log likelihood	-172,8439	F-statistic		3,856066
Durbin-Watson stat	1,891140	Prob(F-statistic)		0,064370

Date: 07/30/07 Time: 21:51

Sample: 1986 2006

Included observations: 21

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. *****	. *****	1	0,714	0,714	12,327	0,000
. ****	. *	2	0,568	0,118	20,533	0,000
. ***	. *	3	0,370	-0,150	24,204	0,000
. **	. *	4	0,237	-0,034	25,801	0,000
. **	. *	5	0,216	0,168	27,204	0,000
. *	. .	6	0,181	0,013	28,259	0,000
. *	. **	7	0,083	-0,205	28,497	0,000
. .	. .	8	0,044	0,023	28,568	0,000
. **	. ***	9	-0,223	-0,443	30,561	0,000
. **	. .	10	-0,301	-0,005	34,546	0,000
. ***	. *	11	-0,328	0,136	39,748	0,000
. ***	. .	12	-0,334	-0,088	45,736	0,000

Null Hypothesis: MAIZ has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 8 (Automatic based on SIC, MAXLAG=8)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2,340681	0,1760
Test critical values:		
1% level	-4,121990	
5% level	-3,144920	
10% level	-2,713751	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Warning: Probabilities and critical values calculated for 20 observations and may not be accurate for a sample size of 12

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(MAIZ)

Method: Least Squares

Date: 07/30/07 Time: 21:52

Sample(adjusted): 1995 2006

Included observations: 12 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MAIZ(-1)	-0,866967	0,370391	-2,340681	0,1441
D(MAIZ(-1))	-0,083695	0,304835	-0,274557	0,8094
D(MAIZ(-2))	-0,108860	0,307820	-0,353647	0,7574
D(MAIZ(-3))	-0,145066	0,315994	-0,459078	0,6912
D(MAIZ(-4))	-0,408218	0,342017	-1,193562	0,3550
D(MAIZ(-5))	-0,595583	0,431732	-1,379520	0,3017
D(MAIZ(-6))	-0,469278	0,453786	-1,034139	0,4097
D(MAIZ(-7))	-0,056520	0,323615	-0,174651	0,8774
D(MAIZ(-8))	0,431727	0,265798	1,624271	0,2458
C	73450,77	32314,70	2,272983	0,1509
R-squared	0,924976	Mean dependent var		-3202,286
Adjusted R-squared	0,587366	S.D. dependent var		13503,98
S.E. of regression	8674,496	Akaike info criterion		20,84907
Sum squared resid	1,50E+08	Schwarz criterion		21,25316
Log likelihood	-115,0944	F-statistic		2,739778
Durbin-Watson stat	2,641436	Prob(F-statistic)		0,295978

Date: 07/30/07 Time: 21:53

Sample: 1986 2006

Included observations: 20

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. ****	. ****	1	0,619	0,619	8,8649	0,003
. ***	. .	2	0,405	0,036	12,881	0,002
. **	. .	3	0,251	-0,021	14,516	0,002
. *	. *	4	0,112	-0,074	14,858	0,005
. *	. .	5	0,080	0,059	15,044	0,010
. *	. **	6	-0,084	-0,221	15,267	0,018
. *	. *	7	-0,099	0,054	15,597	0,029
. .	. *	8	-0,002	0,158	15,598	0,049
. .	. .	9	0,056	0,060	15,725	0,073
. .	. *	10	0,035	-0,119	15,778	0,106
. .	. *	11	-0,055	-0,109	15,925	0,144
. **	. **	12	-0,209	-0,255	18,331	0,106

Null Hypothesis: NARANJA has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 8 (Automatic based on SIC, MAXLAG=8)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	2,610260	0,9998
Test critical values:		
1% level	-4,200056	
5% level	-3,175352	
10% level	-2,728985	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(NARANJA)

Method: Least Squares

Date: 07/30/07 Time: 21:54

Sample(adjusted): 1995 2005

Included observations: 18 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
NARANJA(-1)	2,920677	1,118922	2,610260	0,2329
D(NARANJA(-1))	-4,580152	1,427632	-3,208215	0,1924
D(NARANJA(-2))	-3,885841	1,343977	-2,891299	0,2120
C	-457,5963	165,6721	-2,762060	0,2211
R-squared	0,960578	Mean dependent var		-0,347273
Adjusted R-squared	0,605780	S.D. dependent var		31,16476
S.E. of regression	19,56740	Akaike info criterion		8,205893
Sum squared resid	382,8830	Schwarz criterion		8,567616
Log likelihood	-35,13241	F-statistic		2,707395
Durbin-Watson stat	2,828602	Prob(F-statistic)		0,441624

Date: 07/30/07 Time: 21:55

Sample: 1986 2006

Included observations: 21

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
. .	. .	1 -0,018	-0,018	0,0080	0,929
. * .	. * .	2 0,088	0,088	0,2066	0,902
. .	. .	3 -0,056	-0,053	0,2902	0,962
. .	. .	4 0,025	0,015	0,3073	0,989
. * .	. * .	5 -0,091	-0,082	0,5560	0,990
. * .	. * .	6 0,132	0,126	1,1170	0,981
. * .	. * .	7 -0,148	-0,135	1,8748	0,966
. ** .	. ** .	8 -0,254	-0,297	4,2756	0,831
. .	. .	9 -0,034	0,000	4,3226	0,889
. * .	. * .	10 -0,127	-0,117	5,0266	0,889
. .	. .	11 0,053	0,054	5,1618	0,923
. * .	. * .	12 -0,066	-0,096	5,3940	0,944

Null Hypothesis: PALTA has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=8)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-4,341367	0,0032
Test critical values:		
1% level	-3,808546	
5% level	-3,020686	
10% level	-2,650413	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(PALTA)

Method: Least Squares

Date: 07/30/07 Time: 21:55

Sample(adjusted): 1987 2006

Included observations: 20 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PALTA(-1)	-1,018097	0,234511	-4,341367	0,0004
C	544,6496	127,0796	4,285892	0,0004
R-squared	0,511500	Mean dependent var		2,514000
Adjusted R-squared	0,484361	S.D. dependent var		146,7246
S.E. of regression	105,3601	Akaike info criterion		12,24728
Sum squared resid	199813,4	Schwarz criterion		12,34686
Log likelihood	-120,4728	F-statistic		18,84746
Durbin-Watson stat	1,994467	Prob(F-statistic)		0,000393

Date: 07/30/07 Time: 21:56

Sample: 1986 2006

Included observations: 21

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. * .	. * .	1	0,196	0,196	0,9325	0,334
. .	. * .	2	-0,050	-0,092	0,9963	0,608
. * .	. * .	3	0,093	0,128	1,2283	0,746
. * .	. * .	4	0,149	0,103	1,8578	0,762
. * .	. * .	5	0,117	0,086	2,2693	0,811
. .	. .	6	0,011	-0,021	2,2730	0,893
. .	. .	7	0,057	0,057	2,3860	0,935
. .	. * .	8	-0,028	-0,092	2,4144	0,966
. * .	. * .	9	0,101	0,124	2,8241	0,971
. * .	. ** .	10	-0,111	-0,208	3,3626	0,972
. .	. * .	11	-0,014	0,093	3,3722	0,985
. .	. * .	12	-0,009	-0,096	3,3763	0,992

Null Hypothesis: PAPA has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 8 (Automatic based on SIC, MAXLAG=8)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	1,743380	0,9987
Test critical values:		
1% level	-4,121990	
5% level	-3,144920	
10% level	-2,713751	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(PAPA)

Method: Least Squares

Date: 07/30/07 Time: 21:56

Sample(adjusted): 1995 2006

Included observations: 19 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PAPA(-1)	2,523679	1,447578	1,743380	0,2234
D(PAPA(-1))	-3,799581	1,518643	-2,501958	0,1294
C	-282,5466	151,4846	-1,865184	0,2032
R-squared	0,893977	Mean dependent var		-2,390833
Adjusted R-squared	0,416876	S.D. dependent var		29,38144
S.E. of regression	22,43642	Akaike info criterion		8,934156
Sum squared resid	1006,786	Schwarz criterion		9,338244
Log likelihood	-43,60493	F-statistic		1,873768
Durbin-Watson stat	1,426688	Prob(F-statistic)		0,396094

Anexo 2: Supuestos del Modelo Computacional

1. – Precio anual: $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i$; $m =$ número de meses con precios mayores que cero.

2. – Retorno anual: $R_A = \log\left(\frac{P_A}{P_{A-1}}\right)$

3. – Media retornos de n : $\mu_n = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A R_{i,n}$

4. – Varianza retornos de n : $\sigma_n^2 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A (R_{i,n} - \mu_n)^2$

5. – Co varianza de x, y : $\sigma_{x,y}^2 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A (R_{i,x} - \mu_x)(R_{i,y} - \mu_y)$

6. – Correlación: $\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x \sigma_y}$

7. – Generación de números aleatorios normales independientes: Método Box – Muller:

Siendo: u_1, u_2 números aleatorios de una distribución Uniforme(0,1)

$$N(0,1) = \sqrt{-2 * \text{Log}(u_1)} * \cos(2 * \pi * u_2)$$

8. – Sea R matriz de correlación, $R = T^T T$

Generación de números aleatorios normales correlacionados:

$$\langle e \rangle = T^T \langle N(0,1) \rangle$$

9. – Simulación de Precios:

$$P_{i,j} = \exp\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} + \sigma_i * e + \text{Log}(P_{i,j-1})\right);$$

con:

$i =$ variable

$j =$ año



NACIONES UNIDAS

Serie

C E P A L

manuales

Números publicados

El listado completo de esta colección, así como las versiones electrónicas en pdf están disponibles en nuestro sitio web: www.cepal.org/publicaciones

63. Evaluación de inversiones bajo incertidumbre: teoría y aplicaciones a proyectos en Chile, Eduardo Contreras (LC/L.3087-P; LC/IP/L.301), N° de venta: S.09.II.G.73 (US\$ 15.00), 2009.
62. La economía de los ingresos tributarios. Un manual de estimaciones tributarias, Fernando R. Martín (LC/L.3047-P; LC/IP/L.299), N° de venta: S.09.II.G.49 (US\$ 15.00), 2009.
61. Guía metodológica para desarrollar indicadores ambientales y de desarrollo sostenible en países de América Latina y el Caribe, Rayén Quiroga Martínez (LC/L.3021-P), N° de venta: S.09.II.G.45 (US\$ 15.00), 2009.
60. Directrices para la elaboración de módulos sobre envejecimiento en las encuestas de hogares, CELADE (LC/L.2969-P), N° de venta: S.08.II.G.81, (US\$ 15.00), 2008.
59. Técnicas de análisis regional, Luis Lira, Bolívar Quiroga (LC/L.2884-P; LC/IP/L.289), N° de venta: S.08.II.G.21 (US\$ 15.00), 2009.
58. Manual metodológico de evaluación multicriterio para programas y proyectos, Juan Francisco Pacheco, Eduardo Contreras (LC/L.2957-P; LC/IP/L.293), N° de venta: S.08.II.G.71 (US\$ 15.00), 2008.
57. Manual de presupuesto plurianual, Roberto Martirene (LC/L.2829-P; LC/IP/L.286), N° de venta: S.07.II.G.153 (US\$ 15.00), 2007.
56. Indicadores ambientales y de desarrollo sostenible: avances para América Latina y el Caribe, Rayén Quiroga Martínez (LC/L.2771-P), N° de venta: S.07.II.G.108 (US\$ 20.00), 2007.
55. Potencialidades y aplicaciones de los datos censales: una contribución a la explotación del Censo de Población y Vivienda de Nicaragua 2005, CELADE (LC/L.2786-P), N° de venta: S.07.II.G.119, (US\$ 15.00), 2007.
54. Las cuentas nacionales: lineamientos conceptuales, metodológicos y prácticos, Michael Séruzier (LC/L.2765-P), N° de venta: S.07.II.G.101, (US\$ 15.00), 2007.
53. El modelo GTAP y las preferencias arancelarias en América Latina y el Caribe: reconciliando su año base con la evolución reciente de la agenda de liberación regional, Andrés R. Schuschny, José E. Durán y Carlos J. de Miguel (LC/L.2679-P), N° de venta: S.07.II.G.29, (US\$ 15.00), 2007.
52. Modelo de análisis del impacto social y económico de la desnutrición infantil en América Latina (LC/L.2650-P), N° de venta: S.06.II.G.175, (US\$ 15.00), 2006.
51. Manual de prospectiva y decisión estratégica: bases teóricas e instrumentos para América Latina y el Caribe, Javier Medina Vásquez y Edgar Ortégón, (LC/L.2503-P; LC/IP/L.270), N° de venta: S.06.II.G.37, (US\$ 20.00), 2006
50. Regularizando la informalidad del suelo en América Latina y el Caribe. Una evaluación sobre la base de 13 países y 71 programas, Nora Clichevsky, (LC/L.2474-P), N° de venta: S.06.II.G.3, (US\$ 15.00), 2006
49. Opciones y propuestas estratégicas para la superación de la pobreza y precariedad urbana en América Latina y El Caribe-, Ricardo Jordán (LC/L.2473-P), N° de venta: S.05.II.G.219, (US\$ 15.00), 2006.

Algunos títulos de años anteriores se encuentran disponibles

- El lector interesado en adquirir números anteriores de esta serie puede solicitarlos dirigiendo su correspondencia a la Unidad de Distribución, CEPAL, Casilla 179-D, Santiago, Chile, Fax (562) 210 2069, correo electrónico: publications@eclac.cl.

Nombre:.....

Actividad:

Dirección:

Código postal, ciudad, país:

Tel.: Fax: E.mail: