
PREPROCESAMIENTO EFECTIVO DE UN PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN DE COMBUSTIBLE EN SISTEMAS DE TRANSPORTE DE GAS NATURAL

YANET VILLALOBOS MORALES*
ROGER Z. RÍOS MERCADO*

Resumen

El presente trabajo trata una clase de los diversos problemas de toma de decisiones que surgen en sistemas de transporte de gas natural. En particular, el problema tratado consiste en, dada una red de gasoductos, con ciertas restricciones de capacidad en centros proveedores (donde se inyecta gas al sistema) y de demanda en puntos de entrega (donde se requiere el gas), determinar la forma más eficiente de operar el sistema con el objetivo de minimizar la cantidad de combustible consumido por las estaciones compresoras que empujan el fluido a través de la red. Específicamente, las variables de decisión son el flujo másico a través de cada arco de la red y la presión del gas en cada nodo de la red. Como es bien conocido en estos sistemas de transporte, el impacto económico derivado de una operación eficiente del sistema es vital debido a las inmensas cantidades de gas que se transportan cada año. En este artículo se presenta la formulación de este problema como un modelo de optimización no lineal. En ésta se incluye una descripción de la estructura matemática del modelo, así como también las suposiciones utilizadas. El modelo es no lineal y no convexo y con una estructura tal que presenta diversas dificultades numéricas al intentar solucionarlo. Posteriormente se presentan y describen las técnicas de preprocesamiento utilizadas en este problema. Estas técnicas de preprocesamiento consisten esencialmente en, antes de optimizar el problema en sí, transformarlo en uno equivalente que tenga mejores propiedades para ser resuelto numéricamente. La fase experimental del presente trabajo comprueba que el uso de estas técnicas en el presente problema impacta significativamente en el rendimiento del algoritmo de optimización, lo cual es la principal aportación del presente trabajo. Estos resultados son avalados estadísticamente.

*Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León AP, México

Palabras Clave: industria de gas natural; sistemas de transporte; optimización de flujo en redes; optimización no lineal; preprocesamiento; Método heurístico.

1. Introducción

1.1. Descripción y Relevancia del Problema

Uno de los servicios principales en la industria del gas natural es la transportación del gas a través de una sistema de redes de gasoductos. Al fluir el gas por la red, se pierden energía y presión debido a la fricción que existe entre el gas y las paredes internas de la tubería y a la transferencia de calor que existe entre el gas y sus alrededores. Para sobreponer esta pérdida de energía y mantener al gas en movimiento, se instalan estaciones compresoras en varios puntos de la red. Típicamente, las estaciones consumen un 3-5 % del gas que está siendo transportado resultando en un costo por consumo de combustible relativamente alto (Wu, 1998). Este costo de transportación es significativo porque la cantidad de gas que se transporta anualmente en cualquier sistema es enorme. De acuerdo a Luongo, Gilmour y Schroeder (1989), los costos de operación de estaciones compresoras prendidas representan entre un 25 % y 50 % del presupuesto de operación total de la compañía. Todo esto hace al problema de minimizar el consumo de combustible en una red de gasoductos significativamente importante. El problema de toma de decisiones aquí planteado consiste en determinar la manera de operar los compresores y la red, con el objetivo de transportar el gas desde centros de almacenamiento o producción (donde se inyecta gas al sistema) a los diferentes centros de distribución (donde se requiere el gas) al menor costo posible. Numerosas simulaciones basadas en modelos en estado estable o modelos en estado transiente han sido usadas para intentar proveer soluciones a este tipo de problema. La industria del gas ha desarrollado, a través de los años, redes más grandes y sistemas más complejos. Una red típica hoy en día puede consistir de cientos de ductos, docenas de estaciones compresoras, y muchos otros componentes, tales como válvulas y reguladores. Dentro de cada estación pueden existir varias unidades compresoras. Una red puede transportar miles de MMCFD (1MMCFD = 106 pies cúbicos por día) de gas. Hoy, con la ayuda de las computadoras digitales, numerosas cantidades de simulaciones de redes de gas trabajan exitosamente. Esto abre las puertas al desarrollo de algoritmos de optimización. A través de los años, muchos investigadores han intentado resolver este problema con variación en el grado de éxito. Las dificultades de tales problemas de optimización provienen de varios aspectos. Primero, las estaciones compresoras son muy

sofisticadas. Éstas pueden consistir en docenas de unidades compresoras con diferentes configuraciones y características. Por otra parte, el comportamiento de una unidad compresora es no lineal, esto es, el conjunto de restricciones que define las condiciones de operación factible de un compresor junto con las restricciones en los ductos constituyen un sistema complejo de restricciones no lineales. Todas estas características hacen que el problema sea difícil de resolver y dificulten el éxito de algoritmos de optimización existentes. Técnicamente, este problema no convexo está clasificado como NP-difícil (Garey y Johnson, 1979).

1.2. Antecedentes Científicos

El primer trabajo en el desarrollo de algoritmos de optimización para redes de gas natural es atribuido a Wong y Larson (1968). En este trabajo, se usan técnicas de programación dinámica (DP, por sus siglas en inglés) para resolver problemas de optimización en redes sencillas de gas natural. Las principales ventajas de la DP son que se garantiza que el óptimo global es encontrado y que la no linealidad puede ser fácilmente manejada. Una desventaja que se tiene al usar DP en este tipo de problemas es su limitación a redes con estructuras sencillas, por ejemplo redes tipo línea recta y tipo árbol. Otra desventaja es que los cálculos se incrementan exponencialmente según la dimensión del problema. La aplicabilidad de DP en problemas con topologías simples obedece al hecho que ha sido demostrado (Osiadacz, 1987) que es posible predeterminedar los flujos de antemano lo cual reduce el problema a encontrar los valores óptimos de presiones. En redes con ciclos, esta propiedad no se aplica por lo que deben considerarse presiones y flujos en el proceso de optimización. Para mayor información sobre programación dinámica aplicada a este tipo de problema véase Ríos-Mercado (2002).

Otro tipo de metodología para resolver este tipo de problemas fue la empleada por Percell y Ryan (1987). Ellos aplican el método de optimización no lineal del Gradiente Reducido Generalizado (GRG). Las ventajas que presenta este método es que, a diferencia de la programación dinámica, el aumento de la dimensionalidad del problema no le afecta tan dramáticamente, y por tanto permite que puede aplicarse a redes con ciclos. El precio que se paga por esto es que al estar el método basado en un proceso de búsqueda de gradiente que satisface condiciones de optimalidad local, no garantiza el encontrar un óptimo global en un problema no convexo como el aquí estudiado.

En estudios más recientes, Wu (1998) realizó su investigación doctoral sobre la minimización de consumo de combustible en redes de transporte de gas natural y simulación en estado estable. En este trabajo, se establece un modelo matemático completo del flujo en estado estable para redes de gas natural. Uno de los productos de ese trabajo, publicado en Ríos-Mercado et al. (2002), fue

la demostración, haciendo uso de los resultados de teoría de grafos y análisis funcional, de la existencia de la solución única para un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que surgen de los flujos en una red de transporte. Basado en estos resultados, se derivó un método de descomposición de la red con el que se obtuvo grandes reducciones de tamaño, ayudando a simplificar la dificultad del problema. En Wu et al. (2000), se desarrolló un procedimiento de acotamiento inferior, el cual fue probado en algunas topologías con buenos resultados.

En otro trabajo de investigación doctoral, Kim (1999) trabajó en un procedimiento de solución heurística para el PMCC en topologías con ciclos. Esta metodología de solución heurística se basa en un procedimiento iterativo de dos etapas. En particular, en cada iteración, como primera etapa, las variables de flujo de gas son fijadas y las variables de presiones óptimas son encontradas utilizando DP. En el segundo estado, las variables de presiones son fijadas y se intenta encontrar un conjunto de variables de flujo, las cuales mejoran la función objetivo al explotar la estructura fundamental de la red.

1.3. Objetivo

Los métodos recién citados suponen que se parte de una solución factible inicial que en la práctica es en ocasiones muy difícil de obtener debido a la complejidad que presenta la estructura matemática del modelo. Es decir, no existe una forma sistemática de generar soluciones factibles iniciales. Inclusive, en algunos métodos clásicos de NLP, como el método del gradiente reducido, aunque técnicamente el algoritmo puede iniciar la búsqueda en un punto inicial no factible, el algoritmo de solución encuentra dificultades numéricas debido a la compleja estructura matemática del PMCC. Esto ocasiona que el algoritmo no converja a un óptimo local, afectando significativamente el tiempo computacional empleado. Peor aún, en muchas ocasiones no es posible obtener soluciones factibles al problema.

Reconociendo esta dificultad existente en encontrar, de una forma sistemática, soluciones factibles iniciales para el PMCC, y notando que esta es una limitante en los trabajos arriba citados, la parte medular de este trabajo se enfoca en el estudio y evaluación de técnicas de preprocesamiento, que básicamente consisten en, antes de optimizar el problema, transformarlo en uno equivalente que tenga mejores propiedades para ser resuelto desde el punto de vista computacional. Esto constituye la principal aportación del presente trabajo.

Este artículo está organizado como sigue. En la sección 2, se presenta el planteamiento del problema. Se plantean las suposiciones empleadas así como el modelo matemático. En la Sección 3, se describen las diferentes técnicas de preprocesamiento utilizadas en la evaluación. Se discute su importancia y

relevancia, así como las posibles ventajas y desventajas, y el impacto potencial en la calidad de las soluciones obtenidas. En la Sección 4, se presenta el trabajo experimental. Se presenta una extensa evaluación computacional de las técnicas de preprocesamiento en una diversidad de instancias de prueba. Entre los resultados principales de esta evaluación se observó que la fase de preprocesamiento impacta de una manera positiva el comportamiento del algoritmo. Por último, en la Sección 5 se presentan las conclusiones y recomendaciones para trabajo futuro.

2. Planteamiento del Problema

2.1. Suposiciones

La operación real de sistemas de transporte de gas natural es bastante compleja. Debido a esto, es necesario hacer algunas consideraciones que permitan estudiar el problema. Cabe aclarar que aún con estas suposiciones la estructura matemática de este tipo de problema es bastante complicada ya que la función objetivo es no lineal y no convexa, el dominio de operación factible del compresor define un conjunto no convexo y las restricciones de flujo en los ductos definen un conjunto no lineal y no convexo. Como es bien conocido (Garey y Johnson, 1979) un problema con estas características es NP-difícil. Las suposiciones que se consideraron para nuestro estudio fueron las siguientes:

S1. Sistema en estado estable. Bajo este supuesto consideramos que los valores característicos del flujo de gas en el sistema son independientes del tiempo. En este caso, el sistema de restricciones, particularmente aquellas que describen el flujo del gas a través de los ductos pueden ser descritas usando ecuaciones algebraicas no lineales. Existe otro tipo de sistema cuando en el análisis se considera el tiempo, este tipo de sistema es considerado en estado transitorio. En un sistema transitorio las variables del sistema, tales como flujos y presiones, están en función del tiempo. Para modelarlo se tiene que hacer uso de ecuaciones diferenciales parciales en función del tiempo que describen la relación que existe entre estas variables. El sistema en estado transitorio ha sido abordado con muy poco grado de éxito desde la perspectiva de optimización debido a la gran complejidad que se tiene en la estructura matemática del modelo para este tipo de sistema y representa sin duda uno de los grandes retos en materia de investigación en los años por venir.

- S2. La red es dirigida.** Consideramos que el sentido del flujo en cada ducto se conoce con anterioridad.
- S3. Temperatura ambiente constante.** Se considera un proceso isotérmico, es decir, que la temperatura en el sistema se mantiene constante en cada ducto. Esto se hace con la finalidad de hacer más tratable la restricción de flujo en los ductos.
- S4. Número fijo de compresores en cada estación compresora.** El número de compresores operando en cada estación se considera como un parámetro conocido. Aunque en la práctica puede ser posible considerar este dato como una variable de decisión, esto convertiría al problema en un programa entero mixto no lineal, lo cual requiere una metodología de solución enteramente diferente.
- S5. Todas las unidades compresoras en una estación compresora son centrífugas, idénticas e instaladas en paralelo.** El hecho de considerar idénticas y conectadas en paralelo, nos permite suponer que el flujo que entra a la estación compresora se reparte equitativamente entre el número de compresores que tenga la estación lo cual facilita el análisis. Este tipo de configuración es además común en la industria. El tipo centrífugo de compresores es también de los más popularmente utilizados en el medio industrial.

2.2. Modelo Matemático

En la definición del modelo empleamos la siguiente nomenclatura.

Índices y conjuntos

N = Conjunto de nodos en la red

N_f = Conjunto de nodos fuente ($N_f \subseteq N$)

N_d = Conjunto de nodos destino ($N_d \subseteq N$)

A_p = Subconjunto de arcos ductos

A_c = Subconjunto de arcos compresores

A = Conjunto de arcos en la red ($A = A_p \cup A_c$)

Parámetros

U_{ij} = Capacidad del ducto $(i, j); (i, j) \in A_p$

R_{ij} = Resistencia del ducto $(i, j); (i, j) \in A_p$

B_i = Flujo neto en el nodo $i; i \in N$ donde:

$$B_i = \begin{cases} > 0 & \text{si } i \in N_f \\ < 0 & \text{si } i \in N_d \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Variables

x_{ij} = Flujo de masa en el arco $(i, j); (i, j) \in A$

p_i = Presión en el nodo $i; i \in N$

El modelo queda establecido como sigue:

$$\text{minimizar } \sum_{\{(i,j) \in A_c\}} g_{ij}(x_{ij}, p_i, p_j) \quad (1)$$

Sujeta a:

$$\sum_{\{j|(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in A\}} x_{ji} = B_i \quad i \in N \quad (2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq U_{ij} \quad (i, j) \in A_p \quad (3)$$

$$p_i^2 - p_j^2 = R_{ij} x_{ij}^2 \quad (i, j) \in A_p \quad (4)$$

$$p_i^L \leq p_i \leq p_i^U \quad i \in N \quad (5)$$

$$(x_{ij}, p_i, p_j) \in D_{ij} \quad (i, j) \in A_c \quad (6)$$

El objetivo (1), como ya se mencionó antes, es una función no lineal y no convexa y describe para nuestro problema el consumo total de combustible en

la red en cada arco compresor que se encuentre en la red. Está definida (Wu et al., 2000) como:

$$g_{ij}(x_{ij}, p_i, p_j) = \left(\frac{c}{\eta(x_{ij}, p_i, p_j)} \right) \cdot x_{ij} \left[\left(\frac{p_j}{p_i} \right)^m - 1 \right]$$

con

$$c = ZRT/m$$

$$\eta(x_{ij}, p_i, p_j) = A_E + B_E \left(\frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right) + C_E \left(\frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right)^2 + D_E \left(\frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right)^3 \quad (7)$$

Aquí, $Z = 0,95$ es el factor de compresibilidad del gas, R es la constante del gas, $T = 519^\circ\text{R}$ la temperatura promedio del gas y $m = 0,229$ es la razón de calor específico del gas. El término η es la eficiencia adiabática del compresor y A_E, B_E, C_E y D_E son constantes estimadas por el método de mínimos cuadrados de mediciones del compresor. La restricción (2) denota el balance de flujo de masa en cada nodo de la red. Un valor positivo de B_i indica que el nodo i es fuente, mientras que un valor negativo indica que se trata de un nodo demanda. Se supone que es una red balanceada, es decir, $\sum_{i \in N} B_i = 0$. La restricción (3) denota la capacidad del flujo de gas en cada ducto. En la práctica, éste es típicamente fijado por el distribuidor a un valor un poco menor que la capacidad real del ducto para compensar por posibles desbalances. La restricción (4) representa la dinámica del flujo de gas a través del ducto. Es una ecuación que indica la relación entre la caída de presiones y el flujo, y es válida para gases de alta presión. Nótese que el parámetro de resistencia está dado a su vez por $R_{ij} = CfL/d^5$, donde C es una constante que se calcula como $C = KZS_gT$, con $K = 133050$ la constante del ducto, $Z = 0,95$ el factor de compresibilidad del gas, $S_g = 0,6248$ la gravedad específica del gas y $T = 519^\circ\text{R}$ la temperatura promedio del gas; y f, L y d , son el factor de fricción, la longitud del ducto y el diámetro interior del ducto respectivamente, las cuales pueden variar de ducto a ducto. Para más detalle puede verse Osiadacz (1987). La restricción (5) describe el rango de presión permisible para cada nodo de la red. Estos límites superior e inferior son dados por el distribuidor. La restricción (6) representa los límites de operación en cada compresor. Estos límites definen el dominio en el cual el compresor puede operar en la industria. Este dominio factible de operación D_{ij} está dado a su vez por las siguientes relaciones:

$$\frac{H_{ij}}{S_{ij}^2} = A_H + B_H \left(\frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right) + C_H \left(\frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right)^2 + D_H \left(\frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \right)^3 \quad (8)$$

$$S_{ij}^L \leq S_{ij} \leq S_{ij}^U \quad (9)$$

$$r_1 \leq \frac{Q_{ij}}{S_{ij}} \leq r_2 \quad (10)$$

Donde Z (factor de compresibilidad del gas), R (constante del gas) y T (temperatura de succión del gas), son parámetros que dependen de las propiedades físicas del gas; S_{ij}^L , S_{ij}^U , r_1 y r_2 son parámetros establecidos en el compresor; A_H , B_H , C_H y D_H son constantes estimadas por el método de mínimos cuadrados a partir de mediciones de valores de H_{ij} , Q_{ij} , S_{ij} , y éstas a su vez son variables (cabeza adiabática, flujo volumétrico, velocidad del compresor, respectivamente) que están relacionadas a las variables del problema mediante las siguientes relaciones:

$$H_{ij} = \frac{ZRT}{m} \left[\left(\frac{p_j}{p_i} \right)^m - 1 \right] \quad (11)$$

$$Q_{ij} = ZRT \left(\frac{x_{ij}}{p_i} \right) \quad (12)$$

Es decir, podemos expresar $D_{ij} = \{(x_{ij}, p_i, p_j) : p_i^L = p_i = p_i^U, (9), (10), (11) \text{ y } (12) \text{ se cumplen}\}$. Para una descripción más detallada de la estructura matemática que compone un compresor centrífugo puede verse Villalobos Morales (2002). Las restricciones (2) y (3) son las comunes en un modelo de flujo en redes típico. Las restricciones (4), (5) y (6) son propias del problema en cuestión y son las que en unión con la función objetivo hacen que el modelo sea difícil de resolver, ya que éstas son no lineales y definen un conjunto no convexo.

3. Técnicas de Preprocesamiento

3.1. Importancia y Relevancia

Dada una formulación de un problema de optimización, el preprocesamiento se refiere a operaciones elementales que pueden ser desarrolladas para mejorar o simplificar la formulación mediante el acotamiento de variables y asignación de valores iniciales, por mencionar algunas. El preprocesamiento puede ser interpretado como una fase entre formulación y solución. Este puede acrecentar enormemente la velocidad de un algoritmo sofisticado el cual, pudiera por ejemplo, estar imposibilitado para reconocer el hecho de que alguna variable puede ser fijada y entonces eliminada del modelo (Nemhauser y Wolsey, 1989). Ocasionalmente un problema pequeño puede ser resuelto en la fase de preprocesamiento o por la combinación de preprocesamiento con algún proceso enumerativo. Aunque esta aproximación ha sido abordada como una técnica de solución en el desarrollo primitivo de programación entera, bajo el nombre de enumeración implícita, este no es el papel importante de estas técnicas simples. Su principal propósito es preparar una formulación rápida y más efectiva para un algoritmo más sofisticado. Desafortunadamente, ha tomado mucho tiempo a los investigadores reconocer el hecho de que existe generalmente la necesidad para ambas fases en la solución de problemas prácticos.

Para resolver el PMCC, primeramente se formuló matemáticamente como un programa no lineal donde la función objetivo representa el consumo de combustible incurrido por todas las estaciones compresoras que se encuentran en la red. Posteriormente se aplicó el algoritmo GRG (Bazaraa, Sherali y Shetty, 1993). Para la modelación y para el uso del método se utilizó GAMS (Brooke, Kendrick y Meeraus, 1992), software de modelación algebraica con interfaces a varias librerías de optimización. Sin embargo debido a la complejidad del problema, donde se tiene una función objetivo no convexa y restricciones que definen un conjunto no convexo, al aplicar este método de solución surgieron dificultades de diversos tipos. Por ejemplo, la principal dificultad que se presentó en nuestro problema al aplicar el algoritmo fue que no se encontraba ninguna solución factible inicial (en problemas donde se sabía que sí eran factibles) para diversos valores de flujo de masa para los nueve compresores utilizados en la evaluación.

Como ya se había mencionado anteriormente cualquier algoritmo de optimización requiere un punto inicial para iniciar su proceso de búsqueda para la optimización. Debido a que para este problema aun no se cuenta con un

procedimiento eficiente que encuentre soluciones factibles iniciales, fue necesario emplear algunas técnicas comunes de preprocesamiento que básicamente consisten en, antes de optimizar el problema, transformarlo en uno equivalente que tenga mejores propiedades para ser resuelto desde el punto de vista computacional con la finalidad de que ayuden al algoritmo a encontrar dichas soluciones iniciales para el problema en cuestión. Esto fue lo que motivo el desarrollo del presente trabajo.

3.2. Descripción de Técnicas de Preprocesamiento

3.2.1. Acotamiento de Variables

El acotamiento en una variable consiste en especificar una cota inferior y otra superior, aun en el caso en que una variable no está restringida. Esto se realiza con la finalidad de hacer la región factible o espacio de búsqueda más reducido, con el objetivo de que el esfuerzo computacional empleado por el algoritmo para encontrar la solución óptima local sea menor.

Existen dos razones por las cuales las cotas son importantes en modelos no lineales. La primera es que las cotas previenen de que el algoritmo realice operaciones no definidas, tales como la división por cero. La segunda razón es que éstas pueden garantizar que las variables permanezcan en una región apropiada. Algunas veces se obtienen valores en soluciones parciales enormemente grandes y recursos considerables pueden ser desperdiciados. La estrategia más segura es acotar todas las variables superior e inferiormente y para el PMCC podemos conocer las cotas de todas las variables.

3.2.2. Asignación de Valores Iniciales de Variables

El asignar buenos valores iniciales es importante por muchas razones (Drud, 1992). Valores iniciales que satisfacen o cercanamente satisfacen muchas de las restricciones hacen que se reduzca el trabajo involucrado en encontrar una solución inicial factible. Los valores iniciales que además son cercanos al óptimo también reducen la distancia al punto final y por lo tanto indirectamente el esfuerzo computacional. El progreso del algoritmo de optimización se basa en una buena información direccional y por lo tanto de buenas derivadas. Las derivadas en un modelo no lineal dependen del punto actual y del punto inicial en el cual las primeras derivadas son calculadas. Finalmente, los modelos no convexos pueden tener múltiples soluciones, pero el modelador está buscando una en una parte particular del espacio de búsqueda, es decir en una vecindad apropiada donde sea más probable encontrar la solución deseada. Típicamente, cuando se deja que el punto inicial sea asignado arbitrariamente por un algoritmo optimizador, los valores iniciales con los que inicia tienen de antemano el valor cero proyectado en los límites. Por ejemplo, si una variable del modelo

es libre o tiene una cota inferior de cero, entonces para ésta su valor inicial es cero. Desafortunadamente, cero es en muchos de los casos un valor inicial malo para una variable no lineal. Un valor inicial de cero es especialmente malo si la variable aparece en un término de producto ya que la derivada inicial se hace cero, y esto hace parecer que la función no depende de la variable. Si en el problema existe una variable que tiene una cota inferior positiva pequeña, por ejemplo, si esta variable aparece como argumento de la función logarítmica o como un denominador, entonces de antemano el valor inicial de la variable es esa cota inferior y ésta también es mala ya que este punto tendrá primeras y segundas derivadas muy grandes.

Una posibilidad es inicializar todas las variables en 1, o utilizar un factor de escala si se combina con alguna opción de escalamiento. Otra posibilidad es seleccionar valores razonables para algunas variables que del contexto se conoce que son importantes y entonces usar algunas de las ecuaciones del modelo para derivar valores para las otras variables.

3.2.3. Escalamiento

Existen una diversidad de factores que pueden influenciar la eficiencia y éxito de un optimizador no lineal, incluyendo la forma en la cual el modelo es formulado y la selección de las unidades (o escalamiento) para las variables (Fourer, Gay y Kernighan, 1990). El escalamiento consiste en que los valores de los coeficientes de las variables deberían tener un grado de magnitud muy parecido. Los optimizadores pueden introducir error cuando algunos coeficientes de variables o restricciones varían considerablemente. Algunos optimizadores automáticamente escalan el problema para tratar de no permitir esta situación, pero se puede ayudar considerablemente analizando con buen juicio las unidades en las cuales las variables son expresadas.

Las variables llegan a ser bien escaladas si éstas son medidas con las unidades apropiadas. En la mayoría de los casos se debe seleccionar la unidad de medida para las variables tal que su valor esperado esté alrededor de la unidad. Las ecuaciones llegan a ser bien escaladas si los términos individuales son medidos en las unidades apropiadas. Después de que se han seleccionado las unidades para las variables, el siguiente paso es seleccionar la unidad de medida para las ecuaciones, tal que los valores esperados de los términos individuales estén alrededor de la unidad. Si se siguen estas reglas, se garantiza que las ecuaciones de balance usualmente tendrán coeficientes alrededor de 1. Si el problema estaba mal escalado originalmente, entonces es muy probable que la técnica de escalamiento cause un mejoramiento dramático en el costo y un proceso de solución confiable.

4. Evaluación Computacional

En esta sección procedemos a evaluar el impacto del uso de las técnicas de pre-procesamiento descritas anteriormente. Primeramente describimos la base de datos utilizada para esta evaluación, a continuación definimos el diseño experimental de las diversas pruebas y finalmente presentamos los resultados y conclusiones del trabajo.

4.1. Descripción de la Base de Datos

Los datos de cada red son tomados de su respectivo archivo de la Tabla 11 que se encuentra en el Apéndice A en (Villalobos Morales, 2002). Para ver todas las instancias que fueron probadas en cada red ver en Apéndice D en (Villalobos Morales, 2002).

Topología A: Red en línea .

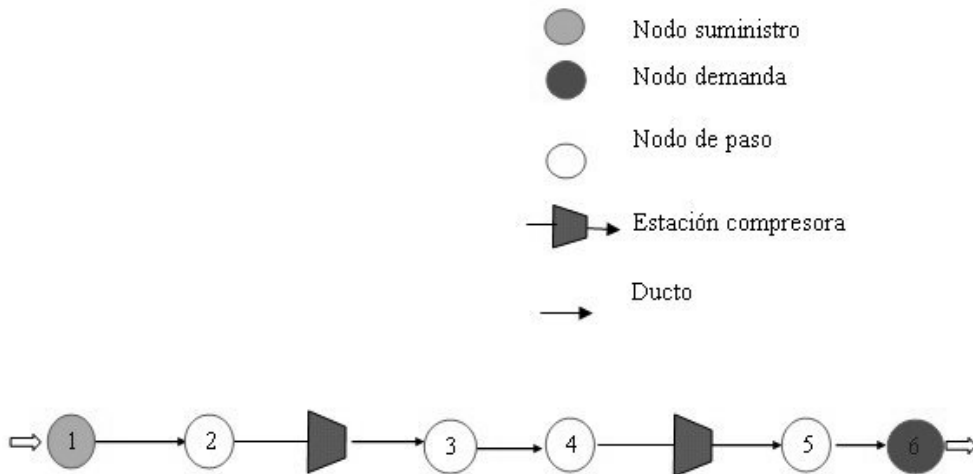


Figura 1: Topología A

Esta red está formada por 6 nodos, tres arcos ductos y dos estaciones compresoras en la red. Los arcos forman una línea recta (llamada una red “gun barrel” en la industria del gas natural) como se muestra en la Figura 1. Esta red tiene un nodo suministro (nodo 1) y un nodo demanda (nodo 6). Se probaron varias instancias con diferentes valores de flujo en los nodos 1 y 6 en unidades MMSCFD. Para todos los otros nodos el $B_i = 0$. El rango de presión mínima y máxima para cada nodo es [200, 800] psia respectivamente.

El conjunto de arcos ductos está dado por $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$. Para cada ducto, $L = 50$ millas, $d = 3$ ft y $f = 0,0085$. El conjunto de arcos compresores está dado por $\{(2, 3), (4, 5)\}$. Cada estación compresora tiene un compresor centrífugo.

Topología B: Red tipo árbol

Esta red está formada por diez nodos, seis arcos ductos y tres estaciones compresoras, cada una con un compresor centrífugo, como puede observarse en la Figura 2. La red tiene un nodo suministro (nodo 1) y cinco nodos demanda (nodos 5, 6, 7, 9 y 10). Se probaron varias instancias con diferentes valores de flujo en estos nodos en unidades MMSCFD. Para todos los otros nodos el $B_i = 0$. Los límites de presión mínima son dados (en psia) por $p_1^L = p_2^L = p_4^L = p_{10}^L = 200$, $p_3^L = p_5^L = p_6^L = p_7^L = p_8^L = p_9^L = 250$. La presión máxima para cada nodo es $p_i^U = 1500$ psia para todo $i \in N$. El conjunto de arcos ductos está dado por $\{(2, 3), (4, 5), (5, 6), (5, 7), (8, 9), (9, 10)\}$. Para cada ducto, $L = 50$ millas, $d = 3$ ft y $f = 0,0085$. El conjunto de arcos compresores está dado por $\{(1, 2), (3, 4), (3, 8)\}$.

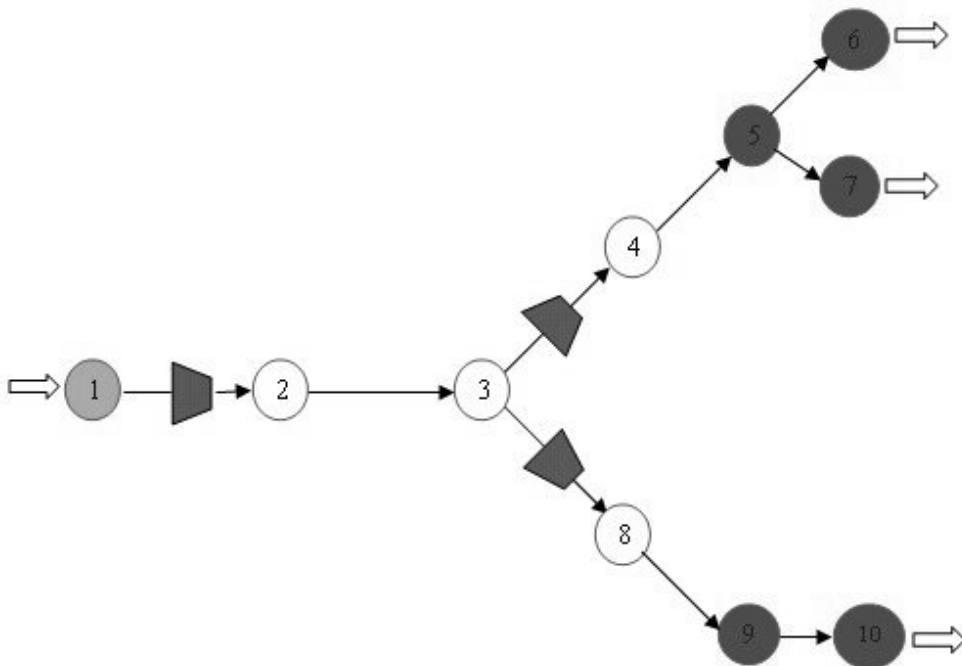


Figura 2: Topología B

Topología C: Red con ciclo .

El tercer tipo es una red con ocho nodos, cinco arcos ductos y tres estaciones compresoras, como puede observarse en la Figura 3. La red tiene un nodo suministro (nodo 1) y dos nodos demanda (nodos 5, 8). Se probaron varias instancias para diferentes valores de flujo en estos nodos en unidades MMSCFD. Para todos los otros nodos $B_i = 0$. Los límites de presión mínima y máxima son: $p_i^L = 300$ y $p_i^U = 1200$ psia respectivamente para todo $i \in N$. El conjunto de arcos ductos está dado por $\{(1, 3), (2, 6), (4, 5)(6, 5), (7, 8)\}$. Para cada ducto, $L = 40$ millas, $d = 3$ ft y $f = 0,0085$. El conjunto de arcos compresores está dado por $\{(1, 2), (3, 4), (7, 8)\}$. Cada estación compresora tiene un compresor centrífugo.

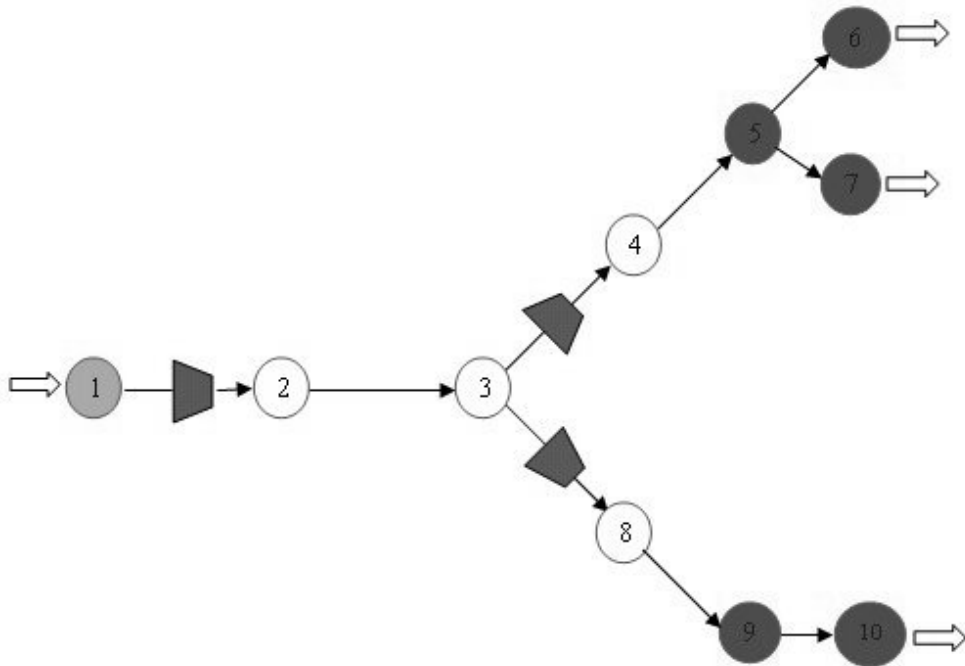


Figura 3: Topología C

4.2. Metodología y Diseño Experimental

Primero, se modelaron matemáticamente las instancias mediante el uso de GAMS, versión 2.50, (Brooke, Kendrick y Meeraus, 1992), en una estación de trabajo Sun Ultra 10. Una vez modelado, se procedió a llevar a cabo la evaluación de las técnicas de preprocesamiento. Los factores que se evaluaron de la fase de preprocesamiento en este experimento fueron: (a) acotamiento de las variables de decisión; (b) asignación de un valor inicial a las variables de decisión y (c) escalamiento de las ecuaciones. Esta evaluación se efectuó en

tres topologías reales de la industria del gas natural (descritas en la Sección 4.1) con datos de nueve compresores centrífugos (Kim, 1999), para los cuales se utilizaron diferentes valores de flujo. Para hacer la comparación entre las técnicas de preprocesamiento utilizadas, se llevó a cabo una prueba de hipótesis utilizando estadística no paramétrica. Los detalles de esta prueba pueden encontrarse en el Apéndice F de Villalobos Morales (2002).

Para llevar a cabo estas evaluaciones, se consideraron los siguientes escenarios. En el escenario E1 se aplicaron al problema original las técnicas de acotamiento de variables y asignación de valores iniciales a las variables. En el escenario E2, al E1 se le agregó la técnica de escalamiento de ecuaciones, en particular escalando la ecuación de la eficiencia del compresor (7). En el escenario E3, al E2 se le añadió el escalamiento a la ecuación del dominio del compresor (8). Para estas evaluaciones se registraron las instancias donde se encontraron soluciones, tanto óptimas como factibles, registrando el número de iteraciones en aquellas instancias donde se encontraron soluciones óptimas, con la finalidad de poder hacer una comparación entre un escenario y otro.

4.3. Experimento 1: Impacto de las Cotas en las Variables y Punto Inicial

El objetivo de esta parte del experimento consiste en mostrar una evaluación computacional de dos técnicas comunes de preprocesamiento: acotamiento de las variables y asignación de valores iniciales a las variables, las cuales fueron aplicadas al problema en cuestión, con la finalidad de ayudar al algoritmo en su proceso de búsqueda de soluciones óptimas locales y factibles. En las Tablas 1, 2 y 3 se muestran los resultados al aplicar estas dos técnicas de pre-procesamiento en las tres topologías empleadas en la evaluación.

Tipo de compresor	# instancias probadas	óptimos locales
Snarlin-k1	12	11
Rakeey-k1	10	10
Rakeey-k2	17	14
Hamper-k1	19	12
Bellvan-k1	10	10
Bellvan-k2	10	10
Bellvan-k3	17	12
Bethany-k1	18	14
Bethany-k2	16	12
Total	129	105

Cuadro 1: Aplicación de cotas y solución inicial en topología A

El promedio de iteraciones en este escenario fue de 92 iteraciones. Como puede observarse en la Tabla 1, al aplicar estas técnicas de pre-procesamiento en la topología de red en línea, el número de soluciones óptimas locales encon-

tradas representa el 81 % del total probadas. El 19 % restante esta repartido en soluciones factibles, soluciones no factibles y en algunas instancias donde el algoritmo alcanzó el límite de iteraciones preestablecido sin encontrar una solución. Este resultado es alentador comparado con el obtenido al emplear el algoritmo sin pre-procesamiento donde no se encontraron soluciones factibles para ninguno de los compresores.

Tipo de compresor	# instancias probadas	óptimos locales
Snarlin-k1	18	17
Rakeey-k1	15	14
Rakeey-k2	16	7
Hamper-k1	11	1
Bellvan-k1	9	9
Bellvan-k2	9	9
Bellvan-k3	17	9
Bethany-k1	12	8
Bethany-k2	5	5
Total	112	79

Cuadro 2: Aplicación de cotas y solución inicial en topología B

En la Tabla 2 vemos similares resultados para la red tipo árbol. El promedio de iteraciones en este escenario es de 70,9 iteraciones. En este tipo de topología, como puede observarse, al aplicar las técnicas de pre-procesamiento el número de soluciones óptimas locales encontradas por el algoritmo representa el 70 % del total probadas, el 30 % restante es únicamente para soluciones factibles. Este resultado es también muy alentador, ya que no encontramos soluciones no factibles, ni tampoco hubo instancias donde se alcanzara el límite de iteraciones sin encontrar una solución.

Tipo de compresor	# instancias probadas	óptimos locales
Snarlin-k1	23	21
Rakeey-k1	19	18
Rakeey-k2	25	20
Hamper-k1	31	15
Bellvan-k1	15	15
Bellvan-k2	15	15
Bellvan-k3	22	22
Bethany-k1	20	18
Bethany-k2	19	19
Total	189	163

Cuadro 3: Aplicación de cotas y solución inicial en topología C

Finalmente en la Tabla 3 vemos los resultados para la topología con ciclo. El promedio de iteraciones en este escenario es de 83.8 iteraciones. En este tipo de topología como puede observarse al aplicar las técnicas de pre-procesamiento

el número de soluciones óptimas locales encontradas por el algoritmo representa el 86 % del total probadas, el 14 % restante es únicamente también para soluciones factibles, que se encuentran repartidas en los nueve compresores como puede observarse en la tabla.

Conclusiones: De una forma clara y contundente pudo observarse, en las tres topologías utilizadas, que las técnicas de preprocesamiento de acotamiento en las variables y el punto inicial impactaron de una manera positiva en el desarrollo del algoritmo. Al aplicar éstas nos dimos cuenta que el algoritmo ya no tiene tanta dificultad para encontrar soluciones factibles para el problema. Como pudo observarse para cada topología se encontró un buen porcentaje de soluciones óptimas locales. Estos resultados avalan el uso de estas técnicas de preprocesamiento en el algoritmo.

4.4. Experimento 2: Impacto del Escalamiento

Después de realizar la primera parte del experimento, donde se aplicaron dos técnicas comunes de preprocesamiento, nos dimos cuenta de la enorme utilidad de aplicar esta fase de preprocesamiento al algoritmo, ya que se logró obtener una gran cantidad de soluciones óptimas locales. Analizando los resultados obtenidos, observamos que la parte restante donde el algoritmo no encontró soluciones óptimas locales estaba repartida en soluciones factibles (mayoría), soluciones no factibles y soluciones donde se alcanzaba el límite de iteraciones.

La causa principal de que el algoritmo siguiera encontrando soluciones no factibles después de aplicar las dos técnicas de pre-procesamiento anteriores, se debía principalmente a que algunas de las ecuaciones del modelo tenían un mal escalamiento, es decir, los coeficientes de las ecuaciones variaban considerablemente en magnitud, lo que provocaba este tipo de inestabilidades numéricas que provocaban el fallo en el algoritmo. Por tal motivo, fue necesario realizar un mejor escalamiento a algunas de las ecuaciones. El procedimiento consiste en observar los valores de los coeficientes de todas las ecuaciones del modelo. Por ejemplo, en el caso de la ecuación de dominio del compresor (8) en el compresor tipo Bethany-k1 de la topología A, se observó que las magnitudes de sus coeficientes se encuentran aproximadamente tres órdenes de magnitud mayores al del resto de las restricciones. Por tanto, se escala esta restricción dividiéndola toda por 1.0×10^3 .

Siguiendo este procedimiento, se determinaron los factores de escalamiento apropiados para cada instancia en cada uno de los compresores utilizados en la evaluación, los cuales se muestran en la Tabla 4. Esta evaluación se realizó para las mismas topologías de la sección anterior. En esta parte del experimento se llevó a cabo la evaluación de la técnica del escalamiento a la ecuación de la

Tipo de compresor	Topología A		Topología B		Topología C	
	Ecuación eficiencia	Ecuación dominio	Ecuación eficiencia	Ecuación dominio	Ecuación Ecuación	Ecuación dominio
Snarlin-k1	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+04	1.0e+01	1.0e+01
Rakeey-k1	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+04	1.0e+01	1.0e+01
Rakeey-k2	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+02
Hamper-k1	1.0e+01	1.0e+06	1.0e+01	1.0e+05	1.0e+01	1.0e+01
Bellvan-k1	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+02
Bellvan-k2	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+02
Bellvan-k3	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01
Bethany-k1	1.0e+01	1.0e+04	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+03
Bethany-k2	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+02	1.0e+01	1.0e+01	1.0e+01

Cuadro 4: Factores de escalamiento

eficiencia (escenario E2) y ecuación del dominio (escenario E3). Los resultados obtenidos al aplicar el escalamiento a estas dos restricciones para las topologías A, B y C, se muestran en las Tablas 8, 6 y 7 respectivamente. En cada fila se muestra el número de soluciones óptimas locales encontradas para cada compresor en cada escenario.

Como puede apreciarse en las Tablas 8, 6 y 7, los resultados obtenidos al aplicar las tres técnicas de pre-procesamiento son muy alentadores en las tres topologías, ya que se logra encontrar en la mayoría de las instancias probadas soluciones óptimas locales en los nueve compresores utilizados. Haciendo una comparación entre los tres escenarios respecto al número de soluciones óptimas locales encontradas en una de las topologías, se observa que cuando se compara el escenario E1 con el escenario E2 se logra un mejoramiento hasta de un 10%. Al comparar los escenarios E2 y E3 se obtiene una mejora de un 3% y por último comparando el escenario E1 con el escenario E3 se logra obtener una mejora hasta de un 12%. Como puede verse en las tres tablas, el mejor escenario es el E3, ya que en éste se logra obtener el mayor número de instancias con soluciones óptimas locales. Esto se logró porque se le aplicó un mejor escalamiento a una de las ecuaciones del modelo (ecuación del dominio).

Para comprobar estos resultados se realizaron las siguientes pruebas de hipótesis:

- (a) H_0 : El promedio de iteraciones en el escenario E1 es menor o igual que en el escenario E2 vs.
 H_1 : El promedio de iteraciones en el escenario E1 es mayor que en el escenario E2
- (b) H_o : El promedio de iteraciones en el escenario E2 es menor o igual que en el escenario E3 vs.
 H_1 : El promedio de iteraciones en el escenario E2 es mayor que en el escenario E3 para cada topología

Tipo de Compresor	# instancias probadas	soluciones óptimas locales		
		E1	E2	E3
Snarlin-k1	12	11	12	12
Rakeey-k1	10	10	10	10
Rakeey-k2	17	14	17	16
Hamper-k1	19	12	16	17
Bellvan-k1	10	10	10	10
Bellvan-k2	10	10	10	10
Bellvan-k3	17	12	14	17
Bethany-k1	18	14	14	13
Bethany-k2	16	12	15	15
Total	129	105	118	120

Cuadro 5: Comparación de técnicas (escenarios) en la red en línea.

Tipo de Compresor	# instancias probadas	soluciones óptimas locales		
		E1	E2	E3
Snarlin-k1	17	17	17	18
Rakeey-k1	15	14	15	15
Rakeey-k2	16	7	8	8
Hamper-k1	11	1	1	3
Bellvan-k1	9	9	9	9
Bellvan-k2	9	9	9	9
Bellvan-k3	17	9	14	14
Bethany-k1	12	8	9	9
Bethany-k2	5	5	5	5
Total	112	79	87	90

Cuadro 6: Comparación de técnicas (escenarios) en la red tipo árbol.

Tipo de Compresor	# instancias probadas	soluciones óptimas locales		
		E1	E2	E3
Snarlin-k1	23	21	23	23
Rakeey-k1	19	18	19	19
Rakeey-k2	25	20	23	25
Hamper-k1	31	15	16	20
Bellvan-k1	15	15	15	15
Bellvan-k2	15	15	15	15
Bellvan-k3	22	22	22	22
Bethany-k1	20	18	16	17
Bethany-k2	19	19	18	17
Total	189	163	167	173

Cuadro 7: Comparación de técnicas (escenarios) en la red con ciclo.

Los resultados de esta prueba de hipótesis se muestran a continuación en forma resumida en la Tabla 7, donde se muestra el valor P para cada hipótesis. Para más detalle sobre esta prueba puede verse el Apéndice F en Villalobos Morales (2002).

Red en línea		Red tipo árbol		Red con ciclo	
E1 y E2	E2 y E3	E1 y E2	E2 y E3	E1 y E2	E2 y E3
P = 0.0154	P = 0.0158	P = 0.0212	P \cong 0	P = 0.008	P \cong 0

Cuadro 8: Resultados de prueba de hipótesis.

Como puede apreciarse en la tabla, la prueba fue significativa para cada topología, a un nivel de significancia $\alpha = 0,05$. Es decir, se concluye que hay evidencia suficiente para rechazar H_0 , en favor de la hipótesis alternativa que indica que el promedio de iteraciones en E1 es mayor que en E2. Similarmente vemos que el promedio de iteraciones en E2 es mayor que en el escenario E3 para las tres topologías.

Conclusiones: Como pudo observarse, la fase de preprocesamiento es de gran importancia para algoritmos que presentan dificultades en su proceso de búsqueda. En particular en este problema se obtuvieron muy buenos resultados en cada una de las evaluaciones realizadas en este experimento al aplicar algunas de las técnicas más comunes de la fase de preprocesamiento. Los resultados obtenidos avalan categóricamente el uso de estas técnicas, gracias a éstas se logro obtener una gran cantidad de soluciones óptimas locales en la mayoría de los compresores utilizados en cada topología y se logró también reducir el esfuerzo computacional empleado por el algoritmo. Lo anterior fue demostrado estadísticamente, utilizando una prueba de hipótesis para confirmar científicamente los resultados obtenidos en esta evaluación.

5. Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

Este artículo consistió en el estudio de un problema de optimización cuyo objetivo es la minimización del consumo de combustible incurrido por las estaciones compresoras en una red de gas natural. La resolución de este tipo de problema en la industria del transporte del gas natural es de gran interés, ya que las estaciones compresoras consumen una cantidad considerable del gas transportado, ocasionando que su costo de transportación sea bastante alto.

Al analizar la estructura matemática del problema se observan diversas características que lo hacen difícil de resolver, entre ellas figuran la no convexidad de la función objetivo, del dominio de operación factible del compresor y de las ecuaciones que definen el flujo en los ductos. Una dificultad del problema es que cuando se intenta utilizar un algoritmo de optimización, se presentan dificultades para encontrar soluciones factibles al PMCC. Es por ello que este artículo se enfocó en el estudio y evaluación de técnicas de preprocesamiento. Las técnicas de preprocesamiento consisten en, antes de optimizar el problema, transformarlo en uno equivalente que tenga mejores propiedades para ser resuelto desde el punto de vista computacional.

Los resultados obtenidos en la evaluación de las técnicas de preprocesamiento, avalan categóricamente su uso. Las técnicas aplicadas tuvieron un impacto positivo en el algoritmo. Se logró obtener una gran cantidad de instancias (89%) con soluciones óptimas locales para diferentes topologías reales de la industria del gas natural en varios compresores centrífugos. El algoritmo por si solo (sin la fase de preprocesamiento) no pudo encontrar soluciones factibles para la mayoría de instancias del problema. También se logró que el esfuerzo computacional empleado por el algoritmo se redujera notablemente. Los resultados fueron avalados por pruebas de hipótesis utilizando estadística no paramétrica.

5.2. Recomendaciones para Trabajos Futuros

Una primera recomendación es ampliar el estudio a un mayor número de instancias. En el presente estudio nos basamos en una instancia por cada una de tres topologías distintas y ciertamente esta base de datos puede ser ampliada. Otra recomendación es que, a partir de las soluciones obtenidas en la evaluación realizada con las técnicas de preprocesamiento, se realice un estudio más completo de la fase de optimización del algoritmo, utilizando éstas como puntos iniciales. Sería de gran utilidad que la evaluación se llevara a cabo entre varios algoritmos no lineales disponibles en el área de optimización para analizar su comportamiento y en base a los parámetros evaluados en cada uno de ellos elegir el que mejor desempeño presente para el problema.

Una de las áreas de oportunidad más importantes es el desarrollar heurísticas que encuentren soluciones factibles iniciales que sirvan como puntos iniciales para la optimización del algoritmo. Esto podría ayudar a seleccionar en forma más metódica el punto de inicio, en lugar de tener que partir de un punto arbitrario. Así mismo, otra área de oportunidad es el emplear técnicas de búsqueda local como GRASP (Díaz et al., 1996) y Búsqueda Tabú (Glover y Laguna, 1997) para mejorar las soluciones obtenidas por los métodos convencionales.

Entre las áreas de investigación de mayor interés figuran el considerar otras variaciones del problema cómo manejar el número de compresores en la estación compresora como una variable de decisión (entera), lo cual hace que el problema se convierta en un problema entero mixto no lineal, lo cual es desde luego un proyecto de mayor complejidad. El tema tratado en este trabajo de investigación es de gran importancia. Se espera que los resultados obtenidos en esta investigación sean de gran utilidad para los trabajos posteriores que aborden este importante problema de la industria del gas natural.

Agradecimientos Agradecemos los comentarios y observaciones de un árbitro anónimo que ayudaron a mejorar la presentación del presente trabajo. Este trabajo de investigación fue apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (apoyo J33187-A) y por el Programa de Apoyo a la Investigación Científica y Tecnológica de la UANL (apoyos CA363-00, CA555-01).

Referencias

- [1] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali y M. Shetty (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley, New York, EUA.
- [2] A. Brooke, D. Kendrick y A. Meeraus (1992). *GAMS: A User's Guide*, Release 2.25. The Scientific Press, South San Francisco, EUA.
- [3] A. Díaz, F. Glover, H. M. Ghaziri, J. L. González, M. Laguna, P. Moscato y F. T. Tseng (1996). *Optimización Heurística y Redes Neuronales*. Paraninfo, Madrid, España.
- [4] A. Drud (1992). CONOPT: A large scale GRG code. *ORSA Journal on Computing*, 6(2):207-216.
- [5] R. Fourer, D. M. Gay y B. W. Kernighan (1990). A modeling language for mathematical programming. *Management Science*, 36(5):519-554.
- [6] M. R. Garey y D. S. Johnson (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York, EUA.
- [7] F. Glover y M. Laguna (1997). *Tabu Search*. Kluwer, Boston, EUA.
- [8] S. Kim (1999). Minimum-Cost Fuel Consumption on Natural Gas Transmission Network Problem. *Disertación doctoral*, Departamento de Ingeniería Industrial, Texas A&M University, EUA.
- [9] C. A. Luongo, B. J. Gilmour y D. W. Schroeder. Optimization in natural gas transmission networks: A tool to improve operational efficiency. Presentado en *3rd SIAM Conference on Optimization*, Boston, EUA, Abril, 1989

- [10] G. L. Nemhauser y L. A. Wolsey. Integer Programming. En G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan y M. J. Todd, editores, Optimization, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol. 1. Capítulo 6, 447-521. Elsevier, Amsterdam, Holanda, 1989.
- [11] A. J. Osiadacz. Simulation and Analysis of Gas Networks. Gulf Publishing Company, Houston, EUA, 1987.
- [12] P. B. Percell y M. J. Ryan. Steady-state optimization of natural-gas pipeline network operation. En *Proceedings of the 19th PSIG Annual Meeting*. Tulsa, EUA, Octubre, 1987.
- [13] R. Z. Ríos-Mercado. Natural gas pipeline optimization. En P. M. Pardalos y M.G. Resende, editores, *Handbook of Applied Optimization*, Capítulo 18.8.3, 813-825. Oxford University Press, New York, EUA, 2002
- [14] R. Z. Ríos-Mercado, S. Wu, L. R. Scott y E. A. Boyd. A reduction technique for natural gas transmission network optimization problems. *Annals of Operations Research*, 117(1-4):199-224, 2002.
- [15] Y. Villalobos Morales. Pre-procesamiento de un Problema de Optimización de Redes de Gas Natural. Tesis de maestría, Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas, FIME, Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, NL, 2002. Disponible en: <http://yalma.fime.uanl.mx/pisis/ftp/pubs/pubs.html>
- [16] P. J. Wong y R. R. Larson. Optimization of natural-gas pipeline systems via dynamic programming. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC13(5):475-481, 1968.
- [17] S. Wu. Steady-State Simulation and Fuel Cost Minimization of Gas Pipeline Networks. *Disertación doctoral*, Departamento de Matemáticas, University of Houston, EUA, 1998.
- [18] S. Wu, R. Z. Ríos-Mercado, E. A. Boyd y L. R. Scott. Model relaxations for the fuel cost minimization of steady-state gas pipeline networks. *Mathematical and Computer Modelling*, 31(2-3):197-220, 2000.