

---

# UNA APLICACIÓN DE PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA EN UN PROBLEMA DE GESTIÓN FORESTAL

---

MARTÍN QUINTEROS<sup>\*</sup>  
ANTONIO ALONSO<sup>\*\*</sup>  
LAUREANO ESCUDERO<sup>\*\*</sup>  
MONIQUE GUIGNARD<sup>\*\*\*</sup>  
ANDRÉS WEINTRAUB<sup>\*\*\*\*</sup>

## Resumen

*El Problema de Planificación de Cosecha y Construcción de Caminos consiste, básicamente, en un planificador que tiene bosques destinados a explotación, los cuales son divididos en unidades de cosecha. El planificador debe decidir, en cada período de tiempo, qué unidades se cortarán y qué caminos se construirán para llevar a cabo esta explotación en orden de maximizar la utilidad esperada neta. En trabajos anteriores ya se desarrolló un modelo de programación lineal entera 0-1 para este problema. En este trabajo se incorpora al problema la incertidumbre a través de un abanico de precios de la madera en el tiempo. El enfoque propuesto se basa en considerar que la incertidumbre se traduce en una serie de escenarios con probabilidades y se busca una solución que maximice el valor esperado y que sea factible en todos los escenarios. Para este efecto se propone un enfoque de solución utilizando herramientas de programación estocástica. Se desarrollaron análisis estáticos y dinámicos en el horizonte de planeación. Cada uno de ellos se estudió considerando distintos escenarios de precios y probabilidades asociadas. Así, se contrastó la utilidad esperada por un planificador que considera la incertidumbre con la de uno que sólo emplea los precios promedio. En esta comparación, el enfoque estocástico entrega soluciones siempre factibles y hasta un 24 % mejores. Además, en muchos escenarios, la solución promedio puede resultar infactible.*

---

<sup>\*</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes

<sup>\*\*</sup>Centro de Investigación Operativa, Universidad Miguel Hernández, España

<sup>\*\*\*</sup>Wharton School, University of Pennsylvania

<sup>\*\*\*\*</sup>Departamento de Ingeniería Civil Industrial, Universidad de Chile

**Palabras Clave:** Programación Estocástica, Análisis de Escenarios,  
No Anticipatividad, Planificación Forestal.

---

## 1. Introducción

---

La industria forestal corresponde al segundo mercado exportador de Chile, sólo superado por la exportación de cobre. Según datos de INFOR (Instituto de Investigación Forestal de Chile), durante 2004 las exportaciones del sector forestal se incrementaron en un 28 % respecto al año anterior, llegando a los 2.900 millones de US\$. Esta cifra ratifica la envergadura de esta industria y fortalece la necesidad de emplear herramientas eficientes en la toma de decisiones por parte de los planificadores. Las firmas deben planificar, en un horizonte de tiempo determinado, la explotación sustentable de estos recursos, los cuales se transan en un mercado específico para satisfacer requerimientos de demanda. Esta demanda de madera proviene, en el ámbito interno, principalmente de plantas de celulosa y aserraderos y, en el ámbito externo, de mercados internacionales. El objetivo principal de las empresas es maximizar su utilidad, respetando las normas ambientales y la calidad de vida de sus trabajadores.

En el presente trabajo se ha formulado y resuelto un problema específico dentro de las diversas problemáticas que surgen en el ámbito táctico para la planificación forestal. Dicho problema corresponde al de planificar la explotación de un bosque destinado a la producción de madera y la construcción de los caminos de acceso necesarios para llevar a cabo tal explotación. El valor agregado de este estudio, respecto a los trabajos desarrollados con anterioridad, se asienta principalmente en considerar un comportamiento estocástico del precio de venta de la madera y aplicar una metodología formal para el tratamiento del mismo, no limitándose a considerar precios determinísticos como se ha supuesto tradicionalmente.

El documento está organizado como sigue. En las secciones 2 y 3 se realiza una descripción detallada del problema incluyendo una formulación determinística del mismo. En la sección 4 se formulan aspectos básicos de la metodología de programación estocástica, la cual se incorpora para tratar la incertidumbre y además se formula la versión estocástica del problema. En la sección 5 se especifica la instancia real de estudio. En la sección 6 se describen las experiencias numéricas diseñadas y los resultados obtenidos. Finalmente, en la sección 7 se establecen las principales conclusiones.

---

## 2. Descripción del Problema

---

Históricamente, recién en los últimos 30 años la planificación de las operaciones de cosecha y la construcción de caminos de acceso se ha enfrentado de manera conjunta, empleando modelos matemáticos de optimización y herramientas computacionales. Anteriormente, la planeación se realizaba en forma manual y sólo basada en la experiencia del recurso humano involucrado. La ventaja de integrar ambos procesos en un sólo modelo lineal entero con variables 0-1 fue probada por Weintraub y Navon ver [9], obteniendo soluciones desde un 15 % hasta un 45 % mejores en comparación con modelos que optimizan los procesos por separado ver [4].

La logística requerida para desarrollar una planificación forestal eficiente es de una alta complejidad y debe estar soportada fuertemente en modelos matemáticos eficientes de apoyo a la toma de decisiones. En este contexto, existen variados estudios relativos a las distintas fases de la planificación forestal, en particular al problema de la construcción de caminos de acceso y políticas de cosecha de unidades.

Básicamente, el problema puede formularse a partir de una división del bosque en unidades de cosecha que llamaremos celdas o unidades y debe decidirse, en el horizonte de planificación, qué celda se cortará en cada período, qué caminos serán necesarios construir para poder acceder a dichas unidades y qué cantidad de madera será trasladada de un punto a otro. Estas decisiones se toman en base a un criterio de optimización que típicamente consiste en la maximización de los retornos netos esperados. En la Figura 4.3 puede observarse una región particionada en celdas.

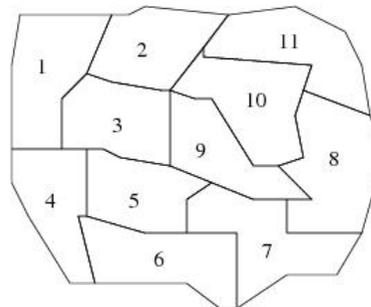


Figura 1: Partición del bosque en unidades de corte.

Es necesario destacar que en el problema recién citado, existen diversas fuentes de incertidumbre o estocasticidad, entre las cuales podemos citar, los precios futuros de la madera, la posibilidad de que ocurran incendios, u otros

siniestros. En este contexto, el trabajo desarrollado aquí, analiza la toma de decisiones bajo incertidumbre por concepto de precios de ventas de la madera. Desde ese punto de vista, el estudio considera que el precio de la madera en el tiempo puede modelarse mediante un conjunto de escenarios con distintas probabilidades asociadas.

En términos matemáticos, la versión determinista del problema anterior, esto es, suponiendo que todos los parámetros son conocidos, puede formularse como un problema de programación lineal entera mixta. Este problema es difícil de resolver debido a su gran tamaño y a la presencia de miles de variables binarias. Enfoques de resolución para este problema pueden encontrarse en [8], donde empleando técnicas de robustecimiento y descomposición, como Relajación Lagrangena, han obtenido muy buenas soluciones en tiempos computacionales razonables y con bajos gaps residuales.

### 2.1. Aleatoriedad en el Precio de la Madera

Un elemento central en la planificación forestal lo constituye el precio de venta de los distintos productos. Fluctuaciones en el precio inciden directamente en las utilidades generadas por las ventas y determinan en forma importante la toma de decisiones del planificador, ver [5]. Otra fuente relevante de incertidumbre es la posibilidad de incendios, la cual no está contemplada en este estudio.

Históricamente los precios de la madera han experimentado fluctuaciones importantes. A modo de ejemplo, en la Tabla 1 se registra los precios promedio de venta de la madera pulpable desde el año 1994 al 2003.

Tabla 1: Precios anuales Madera Pulpable periodo 1994-2003

Año	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Precio [US\$]	40	40	42	47	49	55	50	34	41	43

---

## 3. Formulación Matemática Determinística

---

En la formulación y resolución del problema forestal consideramos un horizonte de planeación a nivel táctico de 4 años. El objetivo es determinar la política óptima de explotación y construcción de caminos de acceso, de modo de maximizar la utilidad neta esperada y satisfacer todos los escenarios. La empresa en consideración posee bosques para ser explotados, los cuales son divididos, mediante el uso de sistemas de información geográficos, en unidades o celdas.

En virtud del horizonte de planificación, se ha supuesto que la totalidad del bosque se encuentra en condición de ser explotado, es decir, que las edades de los árboles que componen la región de estudio superan los 22 años aproximadamente.

Para un mejor entendimiento del proceso de explotación y del modelo matemático asociado, es conveniente definir algunos elementos:

- (a) **Orígenes:** puntos específicos dentro del bosque. En ellos se procesa la madera proveniente de unidades de cosecha ubicadas en las cercanías. De este modo, cada nodo origen tiene asignado un conjunto de unidades y cada unidad de cosecha está asociada a un único origen.
- (b) **Caminos Existentes:** corresponden a los caminos que están en condiciones de ser utilizados desde el inicio del horizonte de tiempo y por los cuales pueden circular los camiones dedicados al transporte de la madera.
- (c) **Caminos Potenciales:** corresponden a los caminos que no existen al inicio del horizonte de tiempo, pero pueden ser construidos a partir del 1er. período. Una vez que se construye un camino potencial, estará disponible desde ese período hasta el final del horizonte.
- (d) **Intersecciones:** corresponden a los puntos de intersección entre caminos potenciales y caminos existentes.
- (e) **Salidas:** corresponden a los puntos del bosque por los cuales la madera extraída, en cada período, se saca de la región y se distribuye a los distintos puntos de demanda.

Utilizando la terminología antes señalada, a continuación formulamos el modelo determinista base [1] que surge como motivación para desarrollar uno más completo y que trate formalmente la incertidumbre.

### Índices

**t:** períodos.

**u:** unidades de cosecha.

**k, l:** nodos (pueden ser Orígenes, Intersecciones o Salidas).

**o:** orígenes de explotación.

**j:** intersecciones.

**s:** salidas de madera.

### Conjuntos

**T:** conjunto de períodos que componen el horizonte de planeación.

$\varphi(\mathbf{t})$ : conjunto de períodos anteriores o igual a  $t$ .

**[o]**: conjunto de unidades de cosecha asociadas al origen  $o$ .

**CE**: conjunto de caminos existentes al inicio del horizonte de planeación.

**CP**: conjunto de caminos potenciales.

### Parámetros y sus unidades métricas

$a_u^t$ : productividad de unidad  $u$ , si es explotada en el período  $t$  [ $m^3/\text{Ha}$ ].

$A_u$ : área de la unidad  $u$  a ser explotada [Ha].

$U_{k,l}^t$ : capacidad de flujo de un camino potencial construido en el arco  $(k, l)$ , en  $t$  [ $m^3$ ].

$U_{e_{k,l}}^t$ : capacidad de flujo del camino existente en el arco  $(k, l)$ , en  $t$  [ $m^3$ ].

$Z_{\min}^t$ : límite inferior para la oferta en el período  $t$ . [ $m^3$ ].

$Z_{\max}^t$ : límite superior para la oferta en el período  $t$ . [ $m^3$ ].

$P_u^t$ : costo por explotar una hectárea de la unidad  $u$  en el período  $t$ . [dollars/Ha].

$R_s^t$ : precio de venta en la salida  $s$  en el período  $t$  [dollars/ $m^3$ ].

$d_{k,l}^t$ : costo unitario de transporte por el arco  $(k, l)$  en el período  $t$ . [dollars/ $m^3$ ].

$h_{k,l}^t$ : costo de construcción de un camino en el arco  $(k, l)$  en el período  $t$ . [dollars].

$q_o^t$ : costo unitario de producción en el origen  $o$  en el período  $t$ . [dollars/ $m^3$ ].

### Variablen de Decisión

$x_u^t$ : 1, si la unidad  $u$  es explotada en el período  $t$ ; 0, en otro caso.

$W_{k,l}^t$ : 1, si el camino potencial en el arco  $(k, l)$  es construido en el período  $t$ ; 0 si no.

$F_{k,l}^t$ : flujo de madera transportada por el arco  $(k, l)$  en el período  $t$ . [ $m^3$ ].

$Z_s^t$ : oferta de madera en la salida  $s$  en el período  $t$ . [ $m^3$ ].

### Restricciones

(a) Conservación de flujo en los nodos.

a.i) En los nodos orígenes:

$$\sum_{u \in [o]} a_u^t A_u x_u^t + \sum_k F_{k,o}^t - \sum_k F_{o,k}^t = 0, \quad \forall o, \forall t \in T$$

a.ii) En los nodos de intersección:

$$\sum_k F_{k,j}^t - \sum_k F_{j,k}^t = 0, \quad \forall j, \forall t \in T$$

a.iii) En los nodos destino:

$$Z_s^t = \sum_k F_{k,s}^t, \quad \forall s, \forall t \in T$$

(b) Cotas para la producción de madera.

$$Z_{min}^t \leq \sum_s Z_s^t \leq Z_{max}^t, \quad \forall t \in T$$

(c) Construcción de caminos potenciales y capacidades.

c.i) Capacidad de flujo de los caminos:

$$F_{k,l}^t \leq U_{p_{k,l}}^t \sum_{\theta \in \varphi(t)} W_{k,l}^\theta, \quad \forall (k,l) \in CP, \forall t \in T$$

c.ii) A lo más se construye una vez cada camino potencial en el horizonte de planeación:

$$\sum_{t \in T} W_{k,l}^t \leq 1, \quad \forall (k,l) \in CP$$

c.iii) Capacidad de flujo de los caminos existentes:

$$F_{k,l}^t \leq U_{e_{k,l}}^t, \quad \forall (k,l) \in CE, t \in T$$

(d) A lo más se explota una vez cada celda en el horizonte de planeación:

$$\sum_{t \in T} x_u^t \leq 1, \quad \forall u$$

(e) Naturaleza de las variables:

$$F_{k,l}^t, Z_s^t \geq 0, \quad \forall (k,l) \in (CP \cup CE), \forall s, \forall t \in T$$

$$x_u^t, W_{k,l}^t \in \{0, 1\}, \quad \forall u, \forall (k,l) \in (CP \cup CE), \forall t \in T$$

## Función Objetivo

$$\text{máx } Z = T_1 - T_2 - T_3 - T_4 - T_5,$$

donde los términos corresponden a:

$T_1$ : Ingreso por venta de madera.

$$T_1 = \sum_s \sum_{t \in T} R_s^t Z_s^t$$

$T_2$ : Costo de Cosechar el bosque.

$$T_2 = \sum_u \sum_{t \in T} P_u^t A_u x_u^t$$

$T_3$ : Costo de Transporte de madera.

$$T_3 = \sum_k \sum_l \sum_{t \in T} d_{k,l}^t F_{k,l}^t$$

$T_4$ : Costo de Construcción de caminos potenciales.

$$T_4 = \sum_k \sum_l \sum_{t \in T} h_{k,l}^t W_{k,l}^t$$

$T_5$ : Costo de Producción en los orígenes.

$$T_5 = \sum_o \sum_t q_o^t \left( \sum_{u \in [o]} a_u^t A_u x_u^t \right)$$

En la sección siguiente se describen aspectos básicos de programación estocástica y la formulación estocástica del modelo forestal antes detallado.

---

## 4. Enfoque de Programación Estocástica

---

La incertidumbre está presente en casi todos los sistemas, pero tradicionalmente no es posible incluir en forma explícita ésta por la complejidad resultante en muchos de los problemas a resolver. La incertidumbre puede deberse a carencia de datos fiables, errores de medida o tratarse de parámetros que representan información sobre el futuro. Por ejemplo, en el caso de planificación de sistemas de energía eléctrica, la incertidumbre surge principalmente en la demanda y precios futuros, los aportes al suministro o la disponibilidad de los elementos de generación y red. Otras áreas en las cuales la incertidumbre desempeña un rol importante son la planificación de inversiones, planificación de cadena de suministros, políticas públicas, etc.

En la optimización determinista tradicional, se supone que los parámetros del problema son conocidos con certeza. En optimización estocástica se relaja esta condición. No se conocen sus valores, pero se tiene sus distribuciones de probabilidad o se supone que éstas son discretas con un número finito de estados posibles. Usando este último supuesto, al enfrentar un problema de optimización que evoluciona en el tiempo, puede modelarse la incertidumbre mediante un árbol de escenarios, el cual representa todas las posibles realizaciones de los parámetros estocásticos.

Utilizando una metodología de análisis de escenarios, detallada más adelante, puede considerarse el riesgo de tomar una mala decisión en el propio modelo. En forma opuesta a la SP (Stochastic Programming), está el uso inadecuado de una programación determinística, reemplazando los parámetros estocásticos por sus valores promedio y optimizando el modelo resultante. Se

puede observar que dicha solución sólo es la solución óptima del escenario promedio que, incluso, puede no existir como tal. La implantación de dicha solución en los diversos escenarios, puede dar un resultado muy pobre en la función objetivo e, incluso, la solución puede ser infactible en algunos de ellos. En cambio, la SP contempla todos los escenarios, sin subordinarse a ninguno, adoptando políticas más consistentes y que satisfacen factibilidad en todos los escenarios.

El siguiente diagrama nos ilustra un árbol de escenarios. Cada camino, desde la raíz hasta alguna de las hojas, representa un escenario particular, es decir, una posible realización de la incertidumbre. Según ello, el árbol está compuesto por 6 escenarios. A su vez, asociado a cada nodo del árbol existe una decisión (o grupo de decisiones) que debe(n) ser tomada(s), es decir, una variable (o grupo de variables) que decidir en cada período o etapa.

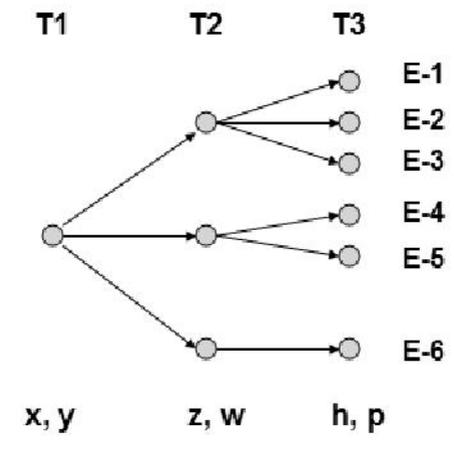


Figura 2: Árbol de Escenarios

Un objetivo central a cumplir consiste en respetar las llamadas restricciones de no anticipatividad. Estas restricciones surgen de manera de satisfacer el "Principio de No Anticipatividad", formulado por Wets y Rockafellar [6].

*"Si dos escenarios distintos, son idénticos hasta una etapa determinada en el horizonte de tiempo, entonces los valores de las variables de decisión deben ser los mismos hasta esa etapa".*

Este principio garantiza que la solución obtenida del modelo hasta una etapa determinada, no depende de información que aún no ha sido disponible. Para una mayor claridad, aplicaremos dicho principio al problema de la Figura 2. En ella figuran las variables de decisión:  $x, y$  en la primera etapa,  $z, w$  en la segunda y, finalmente,  $h, p$  en la tercera etapa. Como las variables mencionadas pertenecen a todos los escenarios, agregamos un superíndice para

diferenciar el escenario al cual pertenecen. Por ejemplo: la variable  $x^2$  corresponde a la variable  $x$  del escenario 2, la variable  $w^5$  representa la variable  $w$  del escenario 5, etc.

Siguiendo la notación del párrafo anterior, las restricciones de no anticipatividad son:

1. Primera Etapa.

- Variable  $x$ :

$$x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = x^5 = x^6$$

- Variable  $y$ :

$$y^1 = y^2 = y^3 = y^4 = y^5 = y^6$$

2. Segunda Etapa.

- Variable  $z$ :

$$z^1 = z^2 = z^3$$

$$z^4 = z^5$$

- Variable  $w$ :

$$w^1 = w^2 = w^3$$

$$w^4 = w^5$$

- Tercera Etapa. No existen restricciones de no anticipación asociadas.

En la sección siguiente se describen las formulaciones para un problema entero mixto en el caso multietápico. En el caso de múltiples etapas, se detalla el algoritmo empleado para resolver en forma coordinada los subproblemas que surgen de forma de satisfacer las restricciones de no anticipación.

#### 4.1. Tratamiento de las Restricciones de No Anticipación

Consideremos un modelo multietápico como el siguiente:

$$\text{máx } Q_E = \sum_{\omega \in \Omega} w^\omega (c^\omega x^\omega + a^\omega y^\omega) \quad (1)$$

$$\text{s.a. } Ax^\omega + By^\omega = b^\omega \quad \forall \omega \in \Omega \quad (2)$$

$$x_t^\omega = x_t^{\omega'} \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega^g, g \in G^t, t \in T_1 \quad (3)$$

$$y_t^\omega = y_t^{\omega'} \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega^g, g \in G^t, t \in T_1 \quad (4)$$

$$x^\omega \in \{0, 1\}^n, y^\omega \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (5)$$

donde:

- $\mathbf{T}$ , conjunto de etapas en el horizonte de tiempo. En este contexto corresponde al conjunto de períodos de tiempo.
- $\mathbf{T}_1$ , conjunto de etapas excluyendo la última.
- $\omega$ , escenario.
- $\Omega$ , conjunto de escenarios.
- $G$ , conjunto de grupos de escenarios.
- $\mathbf{G}^t$ , conjunto de grupos de escenarios en el período  $t$ , para  $t \in T$ , ( $G^t \subseteq G$ ).
- $\Omega^g$ , conjunto de escenarios pertenecientes al grupo  $g$ , para  $g \in G$ , ( $\Omega^g \subseteq \Omega$ ).
- $w^\omega$ , factor correspondiente a la probabilidad o peso que el modelizador asocia al escenario  $\omega \in \Omega$ . Por ende, se satisface que  $\sum_{\omega \in \Omega} w^\omega = 1$ .
- $w_g$ , factor correspondiente a la probabilidad o peso asociado al grupo de escenario  $g$ , para  $g \in G$ . Se satisface que  $\sum_{g \in G^t} w_g = 1, \forall t \in T$ .

Al analizar el modelo precedente, se observa que las únicas restricciones que ligan a distintos escenarios entre sí son las ecuaciones (3) y (4), es decir, las de no anticipación. Dichas ecuaciones complican fuertemente el problema, pues los coeficientes asociados a dichas variables en las funciones objetivos de cada escenario pueden diferir en forma considerable. Así un paquete comercial de optimización tiene escasas posibilidades de resolver satisfactoriamente un problema real a gran escala.

Como es natural en optimización entera mixta [10], surge la inquietud de separar el problema original (dado por las ecuaciones (1),(2),(3),(4),(5)) en subproblemas de tamaño más reducido y menos complicados de resolver [7]. Explícitamente, si se relajaran (omitieran) estas restricciones, el problema estocástico puede separarse de forma de resolver un subproblema determinístico para cada escenario  $\omega \in \Omega$ , que corresponde a:

$$\begin{aligned}
 &\text{máx} && c^\omega x^\omega + a^\omega y^\omega \\
 &s.a. && Ax^\omega + By^\omega = b^\omega \\
 &&& x^\omega \in \{0, 1\}^n, y^\omega \geq 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

Sin embargo, al obtener las soluciones individuales de cada escenario,  $x^\omega, y^\omega$ , muy difícilmente éstas satisfarán la condición de no anticipación, en especial si la varianza entre los parámetros asociados a los diferentes escenarios es alta. Como consecuencia, la estrategia de resolver en forma independiente el subproblema asociado a cada escenario, NO permite obtener una solución al problema original.

Un método eficiente de resolver los  $|\Omega|$  problemas que surgen relajando las restricciones (3) y (4) corresponde al algoritmo Branch and Fix Coordinado (BFC), desarrollado por Escudero y Alonso (ver[2]). Las ideas centrales del BFC se describen en la siguiente sección.

Como fue señalado anteriormente, en los experimentos numéricos, se comparará el desempeño del enfoque estocástico, con la solución obtenida del escenario medio, esto es, la solución del problema:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \bar{c}x + \bar{a}y \\ \text{s.a.} \quad & Ax + By = \bar{b} \\ & x \in \{0, 1\}^n, y \geq 0, \end{aligned} \tag{7}$$

donde  $\bar{a} = \sum_{w \in \Omega} p^w a^w$ ,  $\bar{b} = \sum_{w \in \Omega} p^w b^w$ ,  $\bar{c} = \sum_{w \in \Omega} p^w c^w$ , es decir, los vectores  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  y  $\bar{c}$  se obtienen como suma ponderada de los correspondientes a cada escenario.

#### 4.2. Enfoque Algorítmico: Esquema basado en Algoritmo Branch and Fix

Como fue mencionado en la sección precedente, resolver el modelo estocástico dado por las ecuaciones (1),(2),(3),(4) y (5), utilizando un enfoque tipo Branch and Bound tradicional, resulta extremadamente difícil para solvers y paquetes comerciales, dado el gran tamaño del problema. Esto se debe principalmente a la imposición de satisfacer las restricciones (3) y (4) en presencia de escenarios cuyos parámetros presentan una varianza alta. Cabe señalar que el grupo de restricciones realmente complicado es el (3), pues plantea una igualdad de variables 0-1 relativas a distintos escenarios. En particular, el problema real a estudiar contempla sobre 10000 variables binarias.

Como alternativa a la implementación directa del modelo estocástico, utilizando a CPLEX 8.1 como solver, se considera un enfoque basado en el algoritmo Branch and Fix Coordinado (BFC) (ver [2]). El BFC resuelve en forma coordinada los modelos independientes de cada escenario de forma que se cumpla la condición de no anticipatividad. En particular, está especialmente diseñado para coordinar la selección de la variable y el nodo sobre el cual ramificar en el árbol de Branch and Fix (BF) asociado a cada escenario, de forma que las condiciones (3) y (4) se satisfagan al fijar las variables binarias en 0 o 1. En términos simplistas, podría decirse que el algoritmo BFC ejecuta en forma coordinada los  $|\Omega|$  árboles de Branch and Bound correspondientes a los distintos escenarios.

El algoritmo de BFC puede desglosarse en cuatro grandes etapas. Para este propósito consideramos un Programa Maestro (MP), cuya misión es tomar

decisiones acerca de la selección del nodo y la variables sobre la cual se hará el branching. A continuación se describen los pasos del algoritmo.

*Inicialización:* El algoritmo recibe como parámetro una solución *factible* del problema estocástico original (dado por las ecuaciones (1),(2),(3),(4),(5)). Ésta puede obtenerse corriendo directamente en el solver unos pocos minutos dicho problema, pero dicha solución estará muy lejos del óptimo entero, dada la complejidad del problema. Dicha solución factible corresponde al *incumbente* inicial.

*Paso 1:* Se resuelve para cada escenario la relajación lineal del problema formulado en (6). Si las condiciones de no anticipatividad e integralidad se satisfacen, entonces STOP; la solución óptima al problema original ha sido obtenida. En otro caso, ir al Paso 2.

*Paso 2:* los siguientes parámetros son guardados en el *MP*: Los valores fraccionarios de las variables y el valor óptimo de la función objetivo del problema relajado asociado a los distintos escenarios. En este momento *MP* toma la decisión respecto a la familia a ramificar y, dentro de dicha familia (con sus correspondientes nodos), decide qué variable es seleccionada para fijar en 0 ó 1.

*Paso 3:* El mismo branching y fijación de variables se realiza en los *nodos gemelos* de la familia seleccionada en el Paso 2. Se resuelven los  $|\Omega|$  problemas relajados, uno correspondiente a cada nodo gemelo.

*Paso 4:* En caso de que la solución de los problemas relajados resueltos en el Paso 3 satisfaga las condiciones de no anticipatividad e integralidad, una nueva solución factible se ha encontrado para el problema original. La solución *incumbente* puede ser actualizada y los nodos gemelos de la familia incumbente anterior pueden ser *podados* en conjunto. Adicionalmente, se actualiza el conjunto de nodos *activos* en el árbol  $\mathcal{R}^\omega$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ . Si el conjunto de nodos activos es vacío, entonces STOP, la solución incumbente hallada corresponde a la óptima. En caso contrario, ir al Paso 2 y comenzar una nueva iteración.

### 4.3. Formulación Matemática Estocástica

Empleando la metodología anterior formulamos la versión estocástica del modelo descrito en la sección 2.1. La estructura es similar y los parámetros son los mismos pero poseen un nuevo índice  $\omega$  asociado a cada escenario. En particular  $p^\omega$  corresponde a la probabilidad de ocurrencia del escenario  $\omega$ .

- Variables de Decisión

$\mathbf{x}_u^{t,\omega}$ : 1, si la unidad  $u$  es explotada en el período  $t$  bajo el escenario  $\omega$ ;  
0, en otro caso.

$\mathbf{W}_{k,l}^{t,\omega}$ : 1, si el camino en el arco  $(k, l)$  es construido en el período  $t$  bajo el escenario  $\omega$ ; 0 si no.

$\mathbf{F}_{k,l}^{t,\omega}$ : flujo de madera transportada por el arco  $(k,l)$ , en el período  $t$ , bajo el escenario  $\omega$ . [ $m^3$ ].

$\mathbf{Z}_s^{t,\omega}$ : oferta de madera en la salida  $s$  en el período  $t$ , bajo el escenario  $\omega$ . [ $m^3$ ]

■ Restricciones

(a) Conservación de flujo en los distintos tipos de nodos.

a.i) En los nodos orígenes:

$$\sum_{u \in [o]} a_u^t A_u x_u^{t,\omega} + \sum_k F_{k,o}^{t,\omega} - \sum_k F_{o,k}^{t,\omega} = 0, \quad \forall o, \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega$$

a.ii) En los nodos de intersección:

$$\sum_k F_{k,j}^{t,\omega} - \sum_k F_{j,k}^{t,\omega} = 0, \quad \forall j, \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega$$

a.iii) En los nodos destino:

$$Z_s^{t,\omega} = \sum_k F_{k,s}^{t,\omega}, \quad \forall s, \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega$$

(b) Límites de producción de madera.

$$Z_{min}^{t,\omega} \leq \sum_s Z_s^{t,\omega} \leq Z_{max}^{t,\omega}, \quad \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega$$

(c) Construcción de caminos potenciales y capacidades.

c.i) A lo más se construye una vez cada camino potencial en el horizonte de planeación:

$$\sum_{t \in T} W_{k,l}^{t,\omega} \leq 1, \quad \forall (k, l) \in CP, \forall \omega \in \Omega$$

c.ii) Capacidad de flujo de los caminos existentes:

$$F_{k,l}^{t,\omega} \leq U e_{k,l}^t, \quad \forall (k, l) \in CE, t \in T, \forall \omega \in \Omega$$

c.iii) Capacidad de flujo de los caminos:

$$F_{k,l}^{t,\omega} \leq U p_{k,l}^t \sum_{\theta \in \varphi(t)} W_{k,l}^{\theta,\omega}, \quad \forall (k, l) \in CP, \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega$$

(d) A lo más se explota una vez cada celda en el horizonte de planeación:

$$\sum_{t \in T} x_u^{t,\omega} \leq 1, \quad \forall u, \forall \omega \in \Omega$$

(e) No anticipatividad

$$x_t^\omega = x_t^{\omega'}, \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega^g : g \in G^t, \omega \neq \omega', t \in T_1$$

$$W_{k,l}^{t,\omega} = W_{k,l}^{t,\omega'}, \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega^g : g \in G^t, \omega \neq \omega', t \in T_1, \forall (k, l) \in CP$$

(f) Naturaleza de las variables:

$$F_{k,l}^{t,\omega}, Z_s^{t,\omega} \geq 0, \quad \forall (k, l) \in (CP \cup CE), s, \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega$$

$$x_u^{t,\omega}, W_{k,l}^{t,\omega} \in \{0, 1\}, \quad \forall u, (k, l) \in (CP \cup CE), \forall t \in T, \forall \omega \in \Omega$$

■ Función Objetivo

$$\text{máx } Z = T_1 - T_2 - T_3 - T_4 - T_5,$$

donde los términos corresponden a:

$T_1$ : Ingreso por venta de madera.

$$T_1 = \sum_{\omega} \sum_s \sum_t p^\omega R_s^{\omega,t} Z_s^{t,\omega}$$

$T_2$ : Costo de Cosechar el bosque.

$$T_2 = \sum_{\omega} \sum_u \sum_t p^\omega P_u^t A_u x_u^{t,\omega}$$

$T_3$ : Costo de Transporte de madera.

$$T_3 = \sum_{\omega} \sum_k \sum_l \sum_t p^\omega d_{k,l}^t F_{k,l}^{t,\omega}$$

$T_4$ : Costo de Construcción de caminos potenciales.

$$T_4 = \sum_{\omega} \sum_k \sum_l \sum_t p^\omega h_{k,l}^t W_{k,l}^{t,\omega}$$

$T_5$ : Costo de Producción en los orígenes.

$$T_5 = \sum_{\omega} \sum_o \sum_t q_o^t p^\omega \left( \sum_{u \in [o]} a_u^t A_u x_u^{\omega,t} \right)$$

## 5. Instancia de Estudio: Predio Los Copihues

El predio Los Copihues, propiedad de forestal Millalemu, corresponde a uno de los bosques destinados a explotación y posee una mayor superficie de aproximadamente 300 Ha. El volumen explotable de este predio es  $150000 \text{ m}^3$  aproximadamente y está dividido en 25 celdas.

Como una forma de representar la variabilidad de los precios en el tiempo para la madera, se elaboraron 18 escenarios de precios posibles. Éstos se detallan en la Tabla 2.

Tabla 2: Precio de la madera y cotas inferiores (Inf.) y superiores (Sup.) de producción en cada período.

Esc. Nº	P1 US\$	Inf. m3	Sup. m3	P2 US\$	Inf. m3	Sup. m3	P3 US\$	Inf. m3	Sup. m3	P4 US\$	Inf. m3	Sup. m3
1	45	30000	40000	60	27000	50000	65	28000	52000	68	25000	50000
2	45	30000	40000	60	27000	50000	65	28000	52000	57	20000	51000
3	45	30000	40000	60	27000	50000	55	26000	50000	62	25000	48000
4	45	30000	40000	60	27000	50000	55	26000	50000	50	26000	49000
5	45	30000	40000	60	27000	50000	45	24000	44000	58	26000	48000
6	45	30000	40000	60	27000	50000	45	24000	44000	48	22000	40000
7	45	30000	40000	45	15000	33000	52	27000	45000	55	21000	50000
8	45	30000	40000	45	15000	33000	52	27000	45000	44	19000	42000
9	45	30000	40000	45	15000	33000	45	25000	41000	50	20000	36000
10	45	30000	40000	45	15000	33000	45	25000	41000	42	15000	30000
11	45	30000	40000	45	15000	33000	30	20000	32000	48	15000	28000
12	45	30000	40000	45	15000	33000	30	20000	32000	42	13000	24000
13	45	30000	40000	30	10000	18000	45	22000	40000	40	12000	18000
14	45	30000	40000	30	10000	18000	45	22000	40000	30	12000	18000
15	45	30000	40000	30	10000	18000	30	15000	25000	40	13000	18000
16	45	30000	40000	30	10000	18000	30	15000	25000	30	12000	17000
17	45	30000	40000	30	10000	18000	22	12000	22000	35	11000	16000
18	45	30000	40000	30	10000	18000	22	12000	22000	20	10000	15000

- Cada escenario está compuesto por 4 períodos anuales:  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$  y  $P4$ , que corresponden a 2004, 2005, 2006 y 2007, respectivamente, y tienen en común el precio para el año 2004 (año en que se realizó el estudio), el cual corresponde a  $45 \text{ [US\$/m}^3\text{]}$ .
- Las columnas Inf. y Sup. situadas a la derecha del precio de cada año

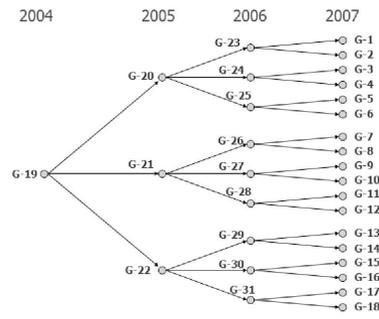


Figura 3: Arbol de 18 Escenarios para instancia real.

corresponden a las cotas inferiores y superiores de producción (en  $m^3$ ), respectivamente, para cada período del horizonte.

Por ejemplo, para el escenario 14, en el periodo 1 presenta un precio de 45 y las cotas de producción, inferior y superior, son 30000 y 40000, respectivamente; en período 2, el precio es 30 US\$ y las cotas son 10000 y 18000; en el período 3, el precio es 45 US\$ y las cotas son 22000 y 40000. Finalmente, en el periodo 4 el precio es 30 US\$ y las cotas 12000 y 18000, respectivamente.

En la definición de los escenarios, se trató de cubrir un rango de precios que oscilara entre los 20 [US\$/ $m^3$ ] y los 70 [US\$/ $m^3$ ]. A su vez, las cotas productivas son, en general, directamente proporcionales al precio de venta en cada período, es decir, las cotas son más altas en un período de precio alto de forma de aprovecharlo para aumentar los ingresos por concepto de ventas.

En el diagrama de la Figura 3 se ilustra el árbol de escenarios considerado en la formulación del problema estocástico. Cabe señalar que al considerar un escenario cualquiera de los 18 anteriores, se está evaluando una posible realización de la incertidumbre y corresponde a resolver un problema de optimización determinístico.

---

## 6. Experiencias Numéricas: Predio Los Copihues

---

### 6.1. Diseño de las experiencias

Las experiencias numéricas ideadas para resolver la versión estocástica del problema de planificación forestal y construcción de caminos, pueden separarse en dos grandes grupos: estáticas y dinámicas. En ambos casos, se realiza una comparación entre el rendimiento de la solución que adoptaría un planificador

estocástico y la que tomaría un planificador que sólo se guía por los valores promedios de los parametros inciertos.

En las experiencias estáticas, se resuelve el problema suponiendo que el planificador debe tomar todas las decisiones al inicio del horizonte de tiempo, es decir, sin conocimiento alguno de la realización de la incertidumbre, pero conociendo el abanico de escenarios según los cuales podría evolucionar.

En las experiencias dinámicas, el problema es resuelto en forma progresiva de forma que el planificador toma decisiones, período a período, sabiendo lo que ocurrió en el período anterior y puede, eventualmente, tomar decisiones que le permitan corregir acciones pasadas erróneas.

A su vez, para cada uno de estos dos grupos, se estudiaron tres configuraciones probabilísticas en el árbol de escenarios.

- Escenarios Equiprobables
- Probabilidades Cargadas a Escenarios de Precios Altos
- Probabilidades Cargadas a Escenarios de Precios Bajos

Es importante señalar que, como primera aproximación a la resolución del problema estocástico, se intentó correr directamente esta instancia utilizando CPLEX 8.1. En esta corrida, después de 500 minutos (8 hr, 20 minutos), el gap residual no bajó de un 12 %. Esto motivó la implementación de un enfoque tipo BFC para resolverlo.

## 6.2. Resultados Caso Estático

### 6.2.1. Escenarios Equiprobables

En este caso se considera que los parámetros inciertos pueden evolucionar en forma equiprobable. Por ejemplo, si estamos en el 1er. período (2004) con un precio de  $45 \text{ US\$/m}^3$ , que corresponde al grupo de escenario G-19, con probabilidad  $1/3$  el precio del próximo período será de  $60 \text{ US\$/m}^3$  (correspondiente a G-20), con probabilidad  $1/3$  será de  $45 \text{ US\$/m}^3$  (correspondiente a G-21) y, finalmente, con probabilidad  $1/3$  será de  $30 \text{ US\$/m}^3$  (correspondiente a G-22)(ver Figura 4).

En la Tabla 4, se establece una comparación entre la solución del Escenario Promedio y la solución del BFC. Dicha comparación consiste en simular lo que ocurre en un escenario específico, digamos  $\omega \in \Omega$ , y calcular la función objetivo que reporta evaluar el vector solución del Esc. Promedio (ESC. PROM) en  $\omega$ . Este valor se compara con el obtenido al evaluar el vector solución del BFC (B&F) en  $\omega$ . La comparación anterior se realiza para cada uno de los escenarios del árbol. La Tabla siguiente detalla los resultados obtenidos:

Tabla 4: Caso Estático Equiprobable.

	ESC.PROM	B&F	GAP ABS	GAP REL. %
ESC 1	7860376,2	8141684,5	281308,3	3,6
ESC 2	74986706,4	7832291,9	335585,6	4,5
ESC 3	7272765,9	7681257,3	408491,9	5,6
ESC 4	6876035,1	7248863,7	372828,7	5,4
ESC 5	6751277,3	7288986,5	537709,3	8,0
ESC 6	6420668,3	6913420,5	492752,3	7,7
ESC 7	6440966,1	6739744,0	298777,9	4,6
ESC 8	6077296,2	6359584,0	282287,8	4,6
ESC 9	6003190,1	6111671,1	108481,1	1,8
ESC 10	Infactible	5604078,0		
ESC 11	Infactible	4945591,0		
ESC 12	Infactible	4541990,9		
ESC 13	Infactible	4324647,4		
ESC 14	Infactible	4149814,2		
ESC 15	Infactible	3335188,5		
ESC 16	Infactible	3067968,2		
ESC 17	Infactible	2866035,9		
ESC 18	Infactible	2593300,9		

Por ejemplo, si suponemos que ocurre el escenario 5, el vector solución del escenario promedio reemplazado en la función objetivo del escenario 5 reporta un valor de ESC. PROM = 6751277,3. Por su parte, el vector solución del BFC, asociado al escenario 5, si lo reemplazamos en la función objetivo de

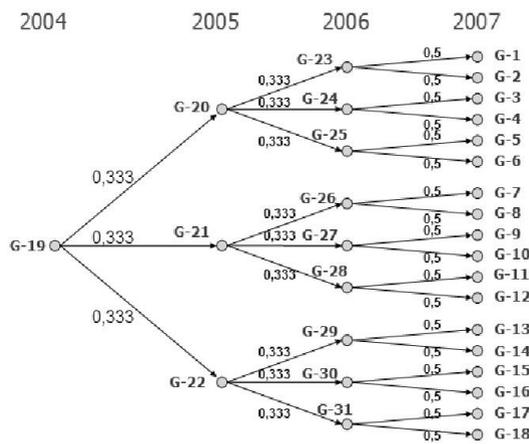


Figura 4: Probabilidades Caso Equiprobable

dicho escenario, reporta un valor de  $B\&F = 7288986,5$ . De esta forma, la diferencia absoluta  $GAP\ ABS = B\&F - ESC.PROM$  es  $537709,3$  y significa que, en este escenario específico, el  $B\&F$  es un  $8\%$  mejor que el  $ESC.PROM$ .

Cabe señalar que de los escenarios 10 al 18 en la columna  $ESC.PROM$  figura la palabra Infactible. Esto significa, que el vector solución del  $ESC.PROM$  al ser reemplazado en dichos escenarios viola alguna de las restricciones productivas y, como consecuencia, es matemáticamente infactible.

### 6.2.2. Probabilidades Cargadas a Precios Altos

En forma similar al caso equiprobable, se contrasta el desempeño del Escenario Promedio versus el BFC para cada escenario. Ahora las probabilidades están inclinadas hacia los escenarios de mejores precios. Como las cotas productivas también son superiores respecto al caso de escenarios equiprobables, puede notarse que el volumen cosechado de madera es mayor en el escenario medio que el caso anterior.

En la figura 5 se detallan las probabilidades empleadas. Análogamente al caso equiprobable, en la Tabla 5 se contrasta, para cada escenario, el desempeño del  $ESC.PROM$  versus el BFC.

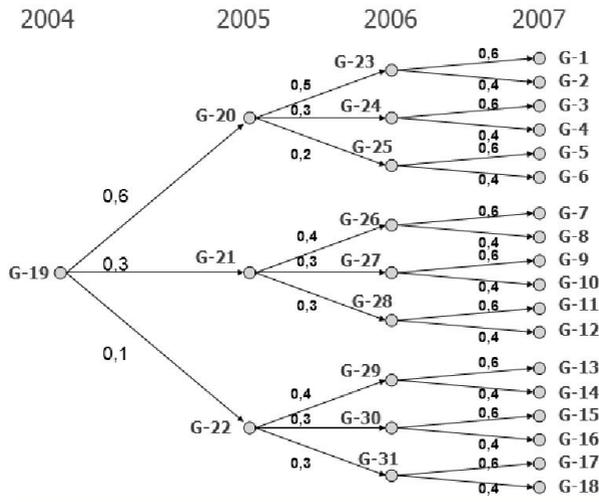


Figura 5: Probabilidades Altas a Precios Altos

Tabla 5: Caso Estático. Prob Cargadas a Precios Altos.

	ESC.PROM	B&F	GAP ABS	GAP REL. %
ESC 1	8401129,1	8162086,3	-239042,9	-2,8
ESC 2	7946073,4	7865469,1	-80604,3	-1,0
ESC 3	7779746,9	7674062,6	-105684,3	-1,4
ESC 4	7283322,5	7273159,4	-10163,1	-0,1
ESC 5	7241102,1	7318535,0	77432,9	1,1
ESC 6	Infactible	6919073,0		
ESC 7	Infactible	6744774,0		
ESC 8	Infactible	6363873,7		
ESC 9	Infactible	6117076,8		
ESC 10	Infactible	5662547,3		
ESC 11	Infactible	4944700,8		
ESC 12	Infactible	4607232,8		
ESC 13	Infactible	4044687,9		
ESC 14	Infactible	3801413,5		
ESC 15	Infactible	3193279,8		
ESC 16	Infactible	3032666,9		
ESC 17	Infactible	2798942,6		
ESC 18	Infactible	2531468,4		

### 6.2.3. Probabilidades Cargadas a Precios Bajos

En forma similar a las simulaciones anteriores, se contrasta el desempeño del Escenario Promedio versus el B&F para cada escenario. Las probabilidades están inclinadas hacia los escenarios de peores precios. Como las cotas productivas también son inferiores respecto al caso de escenarios equiprobables, puede esperarse que el volumen cosechado de madera sea menor. En la figura 6 se detallan las probabilidades utilizadas y en la Tabla 6 se realiza la comparación ESC. PROM versus B&F, escenario por escenario.

Tabla 6: Caso Estático. Prob Cargadas a Precios Bajos .

	ESC.PROM	B&F	GAP ABS	GAP REL. %
ESC 1	Infactible	8140719,9		
ESC 2	Infactible	7852042,5		
ESC 3	Infactible	7623354,5		
ESC 4	Infactible	7287829,7		
ESC 5	Infactible	7280768,5		
ESC 6	Infactible	6905772,5		
ESC 7	5447432,9	6731022,2	281308,3	23,6
ESC 8	5176245,5	6354119,3	281308,3	22,8
ESC 9	5101141,7	6107012,7	281308,3	19,7
ESC 10	4903914,5	5666319,3	281308,3	15,5
ESC 11	4573925,9	4866508,9	281308,3	6,4
ESC 12	Infactible	4571835,1		
ESC 13	Infactible	4257515,9		
ESC 14	Infactible	4125105,1		
ESC 15	Infactible	3334782,0		
ESC 16	Infactible	3182105,0		
ESC 17	Infactible	2930051,7		
ESC 18	Infactible	2657131,6		

#### 6.2.4. Discusión de resultados estáticos

*Caso Equiprobable*

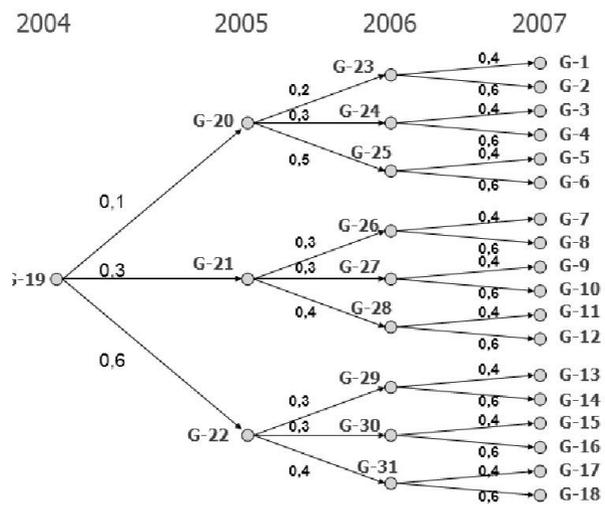


Figura 6: Probabilidades Altas a Precios Bajos

En términos agregados, observamos que en las simulaciones el B&F siempre reporta soluciones factibles, las cuales son hasta un 8% mejores que el ESC. PROM. El indicador GAP ABS corresponde a la diferencia entre B&F y ESC. PROM, mientras que el indicador GAP REL corresponde a la diferencia porcentual. Notemos que en el escenario 9, el B&F es sólo un 1.8% mejor que ESC. PROM. Esto puede explicarse a raíz que el escenario promedio es bastante parecido al escenario 9 en el caso equiprobable.

Adicionalmente, se observan las "bondades" de la solución estocástica pues, del escenario 10 al 18, el vector solución de ESC.PROM resulta infactible al ser evaluado. Esta infactibilidad se debe a que las producciones para los períodos 2, 3 y 4, del escenario promedio, resultan muy altas para las cotas superiores de dichos escenarios.

En resumen, en el caso equiprobable el B&F es siempre mejor alternativa que el escenario medio. En la mitad de los casos porque reporta una mejor función objetivo y, en la otra mitad, porque el escenario medio ni siquiera es factible.

#### *Caso Probabilidades Cargadas a Precios Altos*

En este caso las probabilidades privilegian a los escenarios de mejores precios, esto se traduce en que el escenario promedio también presenta mejores precios y cotas productivas más altas que en el caso equiprobable y aprovecha la totalidad del recurso forestal. Así en los escenarios 1 al 5 ESC.PROM tiene un mejor rendimiento que B&F, hasta un 2.8%. Sin embargo, en los 13 restantes escenarios el vector solución de ESC.PROM resulta infactible, en cambio la solución estocástica siempre es factible.

Las infactibilidades del vector ESC.PROM se deben a que en los períodos 2, 3 y 4, esta solución contempla producir más que las cotas superiores permitidas en dichos escenarios.

En síntesis, en caso de probabilidades cargadas a precios altos, el B&F es mejor en 13 de los 18 escenarios por motivos de infactibilidad, y en los 5 restantes, el promedio es mejor indicador, pero por diferencias marginales.

#### *Caso Probabilidades Cargadas a Precios Bajos*

En este caso las probabilidades favorecen a los escenarios de precios más bajos, esto se traduce en que el escenario promedio también presente peores precios y cotas productivas más bajas que en el caso equiprobable.

El vector solución de ESC.PROM. es infactible en los escenarios 1 al 6, pues propone cortar menos que la cota inferior de producción de dichos escenarios. Por su parte, la infactibilidad en los escenarios 12 al 18, radica en que ESC.PROM propone cortar más que lo permitido. Por último en los escenarios 7 al 11, el B&F es notablemente superior en la planificación que el promedio, alcanzando a ser hasta un 23.6% mejor.

Resumiendo, en caso de probabilidades altas a precios bajos, el B&F es siempre mejor que el promedio.

### 6.3. Resultados Caso Dinámico

Como fue señalado anteriormente, las simulaciones dinámicas consisten en resolver, tanto el escenario promedio como el problema estocástico, en forma gradual y sucesiva.

A modo de explicación, consideremos el árbol de escenarios de la figura 4. Para obtener la solución de ESC PROM, suponemos que las variables de decisión de la primera etapa (G-19) ya se escogieron y estamos parados en el grupo de escenarios G-20. Resolvemos el problema con los valores promedio suponiendo que el origen está en el nodo G-20 y los valores de la 1era etapa están fijos. Con ello tendremos la solución para la 2da. etapa. Posteriormente, nos trasladamos al nodo G-23, resolvemos el problema para los valores medios, pero con las variables de 1era y 2da etapa fijas, y así, sucesivamente. De esta forma obtendremos una solución ESC.PROM para cada escenario.

Para obtener la solución estocástica se procede de manera análoga. Con esta construcción hacemos las mismas comparaciones que en el caso estático.

Puede anticiparse que las diferencias entre los enfoques tendrían que ser menores, pues al avanzar gradualmente en el árbol, la varianza es mucho menor y, por ende, ESC.PROM será bastante más parecido a B&F.

Como se hizo en el caso estático, se considera una configuración equiprobable, una configuración con probabilidades altas a precios altos y una configuración de probabilidades altas a precios bajos.

En las Tablas 7, 8 y 9, se realizan para cada escenario las comparaciones entre el ESC.PROM y el BFC.

Tabla 7: Caso Dinámico. Equiprobable; Tabla 8: Caso Dinámico. Carg. a Precios Altos.

	ESC.PROM	B&F	GAP ABS	GAP REL. %
ESC 1	8118392,0	8121064,8	2672,8	0,03
ESC 2	7841525,3	7846015,3	4490,0	0,06
ESC 3	7664610,0	7682431,1	17821,1	0,23
ESC 4	7260208,8	7268014,7	7805,9	0,11
ESC 5	7293710,6	7309976,5	16265,9	0,22
ESC 6	6922425,6	6944752,5	22326,9	0,32
ESC 7	6725870,7	6726426,1	555,4	0,01
ESC 8	6347834,8	6368266,1	20431,3	0,32
ESC 9	6243151,9	6112316,0	-130835,9	-2,10
ESC 10	5851030,1	5712145,8	-138884,3	-2,37
ESC 11	4975274,1	5008839,4	33565,4	0,67
ESC 12	4670541,0	4680686,8	10145,8	0,22
ESC 13	4357880,0	4359179,8	1299,8	0,03
ESC 14	4177925,0	4180957,8	3032,8	0,07
ESC 15	3387095,0	3380882,4	-6212,6	-0,18
ESC 16	3167450,4	3186797,7	19347,2	0,61
ESC 17	2988927,0	2993666,7	4739,7	0,16
ESC 18	2723128,0	2737203,9	14075,8	0,52

	ESC.PROM	B&F	GAP ABS	GAP REL. %
ESC 1	8351523,9	8156280,8	-195243,2	-2,3
ESC 2	8039306.5	7880210.4	-159096.1	-2.0
ESC 3	7834017.8	7706724.5	-127293.4	-1.6
ESC 4	7262701.4	7250680.1	-12021.4	-0.2
ESC 5	7353811.0	7320419.8	-33391.3	-0.5
ESC 6	6542738.1	6920646.8	377908.6	5.8
ESC 7	6827124.4	6740871.9	-86252.5	-1.3
ESC 8	6203400.2	6367170.0	163769.8	2.6
ESC 9	5976595.8	6117618.8	141023.0	2.4
ESC 10	5520818.3	5665396.2	144577.9	2.6
ESC 11	4591676.2	4938622.4	346946.3	7.6
ESC 12	4284524.3	4637067.6	352543.3	8.2
ESC 13	4001158.1	4312107.0	310948.9	7.8
ESC 14	3821935.1	4133133.0	311197.9	8.1
ESC 15	2995077.5	3345545.2	350467.7	11.7
ESC 16	2781343.0	3127437.4	346094.4	12.4
ESC 17	2621666.2	2926108.1	304441.9	11.6
ESC 18	2370311.1	2686742.3	316431.2	13.3

Tabla 9: Caso Dinámico. Prob. Cargadas a Precios Bajos.

	ESC.PROM	B&F	GAP ABS	GAP REL. %
ESC 1	Infactible	8123207,9		
ESC 2	7864881.4	7848093.5	-16787.9	-0.21
ESC 3	7665707.7	7631733.9	-33973.9	-0.44
ESC 4	7276948.5	7306956.3	30007.7	0.41
ESC 5	7308021.4	7311461.9	3440.5	0.05
ESC 6	6943164.4	6945769.9	2605.5	0.04
ESC 7	6729813.3	6729612.3	-201.0	0.00
ESC 8	6359090.2	6368597.8	9507.6	0.15
ESC 9	6254226.9	6112964.1	-141262.8	-2.26
ESC 10	5852799.5	5712504.3	-140295.1	-2.40
ESC 11	4997163.0	4977435.6	-19727.4	-0.39
ESC 12	4653474.9	4679333.7	25858.8	0.56
ESC 13	4364334.6	4362612.7	-1721.9	-0.04
ESC 14	4186688.6	4183880.7	-2807.9	-0.07
ESC 15	3352431.5	3389360.8	36929.3	1.10
ESC 16	3177790.7	3182553.0	4762.3	0.15
ESC 17	2960944.2	2996745.2	35800.9	1.21
ESC 18	2722988.8	2745390.1	22401.3	0.82

### 6.3.1. Discusión de resultados dinámicos

En términos generales, en las pruebas dinámicas los resultados reflejaron lo que se había anticipado. El vector solución de ESC. PROM. se parece muchísimo más al del B&F en gran parte de los escenarios, dado que al poder tomar una decisión en un espacio de probabilidades más reducido, el valor medio tendrá muchísimo menos varianza respecto a los extremos.

En el caso equiprobable, el ESC. PROM se recuperó y tiene un 100 % de factibilidad (recordemos que el caso estático en el 50 % de los escenarios era infactible). Además, las diferencias con el B&F en el Gap relativo son muy pequeñas, por lo que no es claro qué formulación resulta más favorable en este caso.

En el caso de probabilidades altas a precios altos, el ESC. PROM tiene un 100 % de factibilidad, pero el B&F tiene un desempeño superior de hasta un 13.3 %. Esto puede explicarse pues el promedio está más inclinado hacia los escenarios superiores y se aleja un poco de los precios y cotas de los escenarios inferiores. Sin embargo, cabe señalar que no se observa una situación perfectamente simétrica respecto del caso de probabilidades altas a precios bajos.

En el caso de probabilidades altas a precios bajos, el ESC.PROM es factible en casi todos los escenarios, salvo en el 1, dado que en su solución propone producir, en el período 4, una cantidad menor a la cota inferior de dicho escenario en el 1er. período. A su vez, las diferencias en el gap relativo son muy pequeñas por lo que no es completamente claro qué formulación es preferible en esta situación.

---

## 7. Conclusiones

---

En este estudio se ha formulado y resuelto, satisfactoriamente, una versión estocástica del problema de Planificación Forestal y Construcción de caminos de acceso. Específicamente, empleando la metodología de programación estocástica 0-1 en múltiples etapas, se ha resuelto el problema considerando aleatoriedad por concepto del precio de venta de la madera.

El principal valor agregado de este trabajo, consiste en incorporar formalmente la incertidumbre a un problema de este tipo, mediante el análisis de escenarios discretos, en contraposición a la tradicional utilización de valores promedios para los parámetros inciertos. Esta modelación más sofisticada complica sobremanera su resolución, pues el modelo de programación entera mixta original aumenta considerablemente sus dimensiones y tipo de restricciones a satisfacer. En especial por incorporar las llamadas restricciones de no anticipación, las cuales conceptualmente imponen que las decisiones que toma un planificador en cada instante, sólo dependen de la información que dispone hasta ese momento y no del futuro.

En un principio, y para tener una noción de la dificultad del problema, se intentó fallidamente una codificación y resolución directa, que después de 8 hrs. corriendo no bajó de un 12% de gap residual. Como alternativa se estudiaron distintos métodos de descomposición que facilitarían el manejo de las variables 0-1, las cuales constituyen la verdadera dificultad del problema (la relajación lineal es bastante rápida). En este contexto, se estudió e implementó computacionalmente un enfoque basado en el algoritmo de Branch and Fix, el cual está especialmente diseñado para coordinar el avance, ramificación y poda de los árboles de branch and bound correspondientes a cada escenario. El algoritmo encuentra la solución óptima del problema en un tiempo inferior a las 3 hrs., lo cual es satisfactorio respecto al enfoque directo.

Para contrastar el real valor de la solución estocástica, en comparación con la tradicional planificación en función de los promedios de los parámetros inciertos, se desarrollaron 6 simulaciones: 3 estáticas y 3 dinámicas.

En las simulaciones estáticas, en las cuales las decisiones para todo el horizonte de planeación se adoptan al inicio, el enfoque B&F resultó ser muy sólido respecto al escenario promedio, hasta un 24% mejor. Entre sus prin-

cipales ventajas están que siempre reporta soluciones suficientemente buenas, considerando todos los escenarios a la vez y, además, siempre sus soluciones son factibles, no así el escenario promedio, el cual puede resultar infactible en muchos de los escenarios.

En las simulaciones dinámicas, en las cuales el origen del tiempo es móvil y pueden corregirse decisiones erróneas del pasado, el desempeño de los dos enfoques fue más similar. Esto se debe a la posibilidad del bosque de adaptarse en forma flexible período a período en muchas situaciones. Sin embargo, no es difícil encontrar ejemplos en que el enfoque determinista lleve a situaciones de infactibilidad aún en manejo dinámico, en casos de cotas de producción más ajustadas.

Sería interesante estudiar la metodología algorítmica desarrollada para enfrentar un problema de planificación forestal donde la incertidumbre contemple, tanto escenarios de precios en el tiempo, como posibilidad de incendios. Esta última componente estocástica, incide directamente en la superficie disponible del bosque a cosechar, siendo ésta inversamente proporcional a la probabilidad de desarrollo de un incendio.

## Referencias

- [1] Barahona F., Weintraub A. and R. Epstein, (1992). *Habitat dispersion in forest planning and the stable set problem*. Operations Research, Vol 40:14–21.
- [2] Escudero L., A. Alonso, and T. Ortuño, (2002). *Bfc, A Branch and Fix Coordination algorithmic frame work for solving some types of stochastic pure and mixed 01 programs*. European Journal of Operational Research, Vol 151:503–519.
- [3] Escudero L. and A. Alonso, T. Ortuño, and G. Perez. *An approach for strategic supply chain planning under uncertainty based on stochastic 01 programming*, (2003). Journal of Global Optimization, Vol 26:97–124.
- [4] Jones J., J. Hyde, and M.L. Meachan, (1986) *Four analytical approaches for integrating land and transportation planning on forest lands*. U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Research Paper INT361.
- [5] Lohmander, (2005). *Optimal Sequential Forestry decisions under risk*. Annals of Operations Research, Vol 295: 217–228.
- [6] Rockafellar and R. T. Wets, (1993). *Scenario and policy aggregation in optimization under uncertainty*. Mathematics of Operations Research, Vol 16:119–147.

- [7] Schultz R, (1999). *Dual decomposition in stochastic integer programming*. Operations Research Letters, Vol 24:37–45.
- [8] Weintraub A., M. Guignard, N. Andalaft, P. Andalaft, A. Magendzo, and A. Wainer, (2006). *A Problem of Forest Harvesting and Road Building solved through model Strengthening and Lagrangean Relaxation*. Operation Research, Vol 51:613–628
- [9] Weintraub A. and D. Navon, (1976). *A Forest Management Planning model integrating silvicultural and transportation activities*. Management Science, Vol 22:1299–1309.
- [10] Wolsey J. Integer Programming, (1997). Wiley, New York.

