Tesis Doctoral
Sobre grafos intersección de arcos y cuerdas en un círculo

Guillermo A. Durán
willy@dc.uba.ar
Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA
Director: Jayme L. Szwarcfiter (UFRJ)

Mayo de 2000

A Tita, la mejor persona que conocí, que sigue viva dentro de mi corazón

A Clau, mi gran amor, también responsable de esta tesis

A Santi y a Manu, nuestras principales razones de vida

Agradecimientos

A Jayme, mi director, por su experiencia, su claridad conceptual, su guía, su humildad y su hombría de bien.

A mi viejo, que ya no está, y a mis hermanos Juli, Ricardo y Hebe, por haberme inculcado el amor y el respeto por la ciencia.

A mis amigos de toda la vida, mi "hermano" Ricky, Aldo, Mariano, Walter, Andy, Miguel, por haber contado siempre con ellos.

A Jack, por haber sido un padre para mí en estos últimos años.

A Oscar, por haber compartido cientos de horas de discusiones sobre nuestras respectivas tesis.

A Marisa, João y Claudia, por su cuidadosa lectura del trabajo y sus valiosas sugerencias que contribuyeron a mejorar la versión final.

A la gran cantidad de amigos que me ha dado esta Facultad: Pablo, Rosita, Jorge A., Rober, Lisi, Sil, Richard, Armando, Fernando, Simón, Jorge B., Juan, Guille, Cecile, Analía, Yiyi, Gaby, Vanina, Carola, Miriam, Sergio B., Marcelo S., Ernesto G.B., Gustavo, Marcelo F., Emilio, Darío, Nico, Ignacio, Flavia y algunos más que seguramente debo estar olvidando.

A Irene, por su gran ayuda y por el empuje con el que defendió nuestro programa de Doctorado, y al resto de los integrantes del grupo de Optimización Combinatoria de la Facultad: Isabel, Pablo, Paula y Javier, por su apoyo y colaboración.

A Sebastián, a quien siempre vi como un ejemplo a seguir.

A Oscar P. y Laura, por su hospitalidad en cada uno de mis viajes a Rio.

A Fabio, por su colaboración cada vez que me tocó trabajar en la UFRJ.

A Mario y a Ernesto F.P., por haberme dado una gran mano en el momento en que la necesité.

A Adrian Bondy, Pavol Hell, Frédéric Maffray, Jerry Spinrad, Juan Sabia y Joos Heintz, por haber pensado algunos de los problemas de esta tesis.

A mi amiga Cecy, por el diseño de la carátula, y a Gustavo Y., por su gran ayuda en el armado de las figuras.

A toda la gente de Renovación, por la militancia compartida en pos de una Facultad cada día más científica, más ética y más democrática.

A mis amigos Sergio y Pablo S., por el crecimiento personal que significó para mí el poder construir junto a ellos y otro grupo de personas un espacio de libertad detrás de las rejas.

A mis compañeros de fútbol y a mis amigos de www.sanlorenzo.com.ar, porque en ambos casos forman parte de mi vida cotidiana.

Resumen:

Los grafos arco-circulares son los grafos intersección de arcos alrededor de un círculo. Presentamos en esta tesis los principales resultados conocidos sobre esta clase y definimos las principales subclases. Mostramos como a partir de la caracterización formulada por Tucker para grafos arco-circular propios surgen nuevas caracterizaciones para esta subclase y deducimos características de las estructuras prohibidas minimales para arco-circulares.

Se estudian todas las posibles intersecciones de las subclases definidas, mostrando un ejemplo minimal en cada una de las regiones que se generan, excepto en una de ellas que se demuestra que es vacía. Este resultado asegura que dado un grafo arco-circular propio no unitario, si es clique-Helly debe ser arco-circular Helly.

Los grafos circulares son los grafos intersección de cuerdas dentro de un círculo. También aquí presentamos una reseña de los resultados más importantes y definimos las principales subclases, demostrando algunas relaciones de inclusión entre ellas.

Damos una condición necesaria para que un grafo sea circular Helly y conjeturamos que también es suficiente. De ser correcta esta conjetura tendríamos una caracterización y también un reconocimiento polinomial para esta subclase.

Se muestra como a partir de la mencionada caracterización de Tucker para grafos arco-circular propios y de un teorema de caracterización de Bouchet para los circulares surgen estructuras prohibidas minimales para esta clase.

Analizamos también todas las posibles intersecciones de las subclases definidas, mostrando un ejemplo minimal en cada una de las regiones que se generan.

Estudiamos una superclase de los grafos circulares: los grafos overlap de arcos circulares. Se muestran nuevas propiedades sobre esta clase, poniendo énfasis en su relación con los grafos arco-circulares y los circulares. Damos una condicion necesaria para que un grafo sea overlap de arcos circulares.

Probamos la polinomialidad de encontrar una partición en cliques mínima para la clase de grafos que no contienen como subgrafo inducido ni una rueda de 5 vértices ni un abanico de 5 vértices, y donde todo ciclo impar de longitud mayor ó igual que 5 tiene una cuerda corta. Usamos para ello resultados de teoría poliedral para programación lineal entera. Extendemos este mismo resultado para cubrimiento mínimo de cliques por vértices. Aplicamos estos resultados a una sublcase de los grafos circular Helly, lo que es interesante pues estos problemas son NP-Hard para la clase general de los grafos y de complejidad desconocida para la clase de los grafos circulares.

También proponemos un nuevo algoritmo polinomial que encuentra un cubrimiento mínimo de cliques por vértices en grafos arco-circular Helly.

Por último, presentamos algunas conclusiones que surgen de este trabajo y las líneas futuras de investigación en estos tópicos, destacando algunos problemas interesantes que permanecen abiertos.

Índice

Capítulo 1

Introducción

Consideremos una familia finita de conjuntos no vacíos. El grafo intersección de esta familia se obtiene representando cada conjunto por un vértice, mientras que dos vértices están conectados por una arista si y sólo sí los correspondientes conjuntos se intersecan. Los grafos intersección han recibido especial atención en los últimos años en el estudio de teoría algorítmica de grafos y sus aplicaciones. Algunas clases muy estudiadas de grafos de intersección son los grafos cordales, los grafos de permutación, los grafos de intervalos y las dos clases que serán motivo de estudio en esta tesis: grafos arco-circulares y grafos circulares.

Los grafos arco-circulares, grafos intersección de arcos alrededor de un círculo, fueron introducidos a mediados de la década del '60, siendo Alan Tucker quien aportó los primeros resultados teóricos. Tienen aplicaciones en genética, control del tránsito, diseño de compiladores, estadística y problemas de almacenamiento.

Los grafos circulares, grafos intersección de cuerdas en un círculo, fueron presentados por Even e Itai a comienzos de la década del '70. Existen aplicaciones a problemas computacionales que operan con pilas y colas. Un problema de la vida real para el que se utilizan estas ideas en su resolución es aquel formulado por Knuth en el que se busca un reordenamiento de vagones de un tren utilizando la menor cantidad de vías posibles.

Es objetivo de esta tesis estudiar estas dos clases de grafos de intersección, analizar sus subclases más importantes, encontrar nuevas caracterizaciones y estructuras prohibidas e investigar la complejidad, por un lado, de ciertos problemas algorítmicos aplicados a estas subclases y, por el otro, del reconocimiento de la pertenencia de un grafo dado a alguna de ellas.

El grafo overlap de una familia finita de conjuntos no vacíos se obtiene también representando cada conjunto por un vértice, mientras que ahora dos vértices están conectados por una arista si y sólo sí los correspondientes conjuntos se intersecan pero ninguno está incluido en el otro.

Los grafos overlap han sido menos estudiados. Está demostrado que los grafos overlap de intervalos (conocidos en la literatura como grafos overlap) son equivalentes a los grafos circulares. Los grafos overlap de arcos circulares forman una superclase de los grafos circulares y fueron introducidos por Kashiwabara y otros en 1991. Presentamos también en esta tesis algunos nuevos resultados relacionados con esta clase de grafos overlap.

Describimos a continuación la forma en que está organizado el presente trabajo.

En este capítulo, además de definir los tópicos de la tesis, se presenta una breve reseña de los inicios de la teoría de grafos, una lista de definiciones básicas y de la notación que se empleará a lo largo del trabajo, un resumen sobre clases de grafos y una breve introducción sobre complejidad de algoritmos.

El Capítulo 2 está destinado a los grafos arco-circulares. Presentamos los principales resultados conocidos sobre esta clase y definimos las principales subclases. Mostramos como a partir de la caracterización formulada por Tucker para grafos arco-circular propios surgen nuevas caracterizaciones para esta subclase y deducimos características de las estructuras prohibidas minimales para arco-circulares.

Se estudian todas las posibles intersecciones de las subclases definidas, mostrando un ejemplo minimal en cada una de las regiones que se generan, excepto en una de ellas que se demuestra que es vacía. La región vacía indica que dado un grafo arco-circular propio no unitario, si es clique-Helly debe ser arco-circular Helly. Los resultados de esta sección aparecen en [24].

El Capítulo 3 está destinado a los grafos circulares. También aquí presentamos una reseña de los resultados más importantes y definimos las principales subclases, demostrando algunas relaciones de inclusión entre ellas. Damos una condición necesaria para que un grafo sea circular Helly y conjeturamos que también es suficiente. De ser correcta esta conjetura tendríamos una caracterización y también un reconocimiento polinomial para esta subclase.

Se muestra como a partir de la mencionada caracterización de Tucker para grafos arco-circular propios y de un teorema de caracterización de Bouchet para los circulares surgen estructuras prohibidas minimales para esta clase. Analizamos también todas las posibles intersecciones de las subclases definidas, mostrando un ejemplo minimal en cada una de las regiones que se generan.

La última parte del capítulo 3 está destinada a los grafos overlap de arcos circulares. Se muestran nuevas propiedades sobre esta clase, poniendo énfasis en su relación con los grafos arco-circulares y los circulares. Damos una condicion necesaria para que un grafo sea overlap de arcos circulares.

El Capítulo 4 enfoca su atención sobre dos problemas algorítmicos en grafos: partición en cliques y cubrimiento de cliques por vértices.

Probamos la polinomialidad de encontrar una partición en cliques mínima para la clase de grafos que no contienen como subgrafo inducido ni una rueda de 5 vértices ni un abanico de 5 vértices, y donde todo ciclo impar de longitud mayor ó igual que 5 tiene una cuerda corta. Usamos para ello resultados de teoría poliedral para programación lineal entera. Demostramos que esta clase de grafos está incluida en la clase de grafos Berge y conjeturamos que es una clase perfecta.

Extendemos este mismo resultado para cubrimiento mínimo de cliques por vértices, problema que ha sido muy poco estudiado en la literatura.

Aplicamos estos resultados a una subclase de los grafos circular Helly, lo que es interesante pues estos problemas son NP-Hard para la clase general de los grafos y de complejidad desconocida para la clase de los grafos circulares.

También proponemos un nuevo algoritmo polinomial que encuentra un cubrimiento mínimo de cliques por vértices en grafos arco-circular Helly.

En el Capítulo 5, presentamos algunas conclusiones que surgen de este trabajo y las líneas futuras de investigación en estos tópicos, destacando algunos problemas interesantes que permanecen abiertos.

1.1 Los inicios de la teoría de grafos

Leonhard Euler, matemático suizo del siglo XVIII, es reconocido como el padre de la teoría de grafos por haber resuelto en 1736 un problema abierto de su época conocido como el "Problema de los puentes de Königsberg". La palabra "grafo" tal cual la entendemos en la actualidad fue utilizada por primera vez recién en 1878 en un trabajo del matemático inglés James Sylvester, publicado en Nature [81]. En los siglos XVIII y XIX se conocieron diversos resultados que marcan los primeros avances en lo que hoy llamamos teoría de grafos. Destacamos aquí algunos de los más importantes.

Los apuntes históricos que describimos han sido extraidos, básicamente, de [12].

1.1.1 El problema de los puentes de Königsberg

En Königsberg existía una isla, un río que la rodeaba que se dividía en 2 ramas y 7 puentes que cruzaban esas ramas (figura 1.1). La pregunta era si se podía encontrar una ruta que cruzara por cada puente una y sólo una vez.

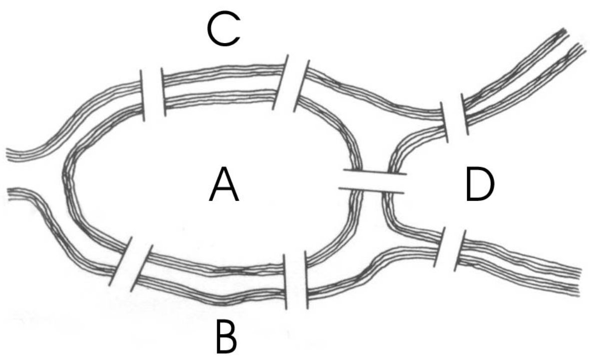

Figura 1.1: Los puentes de Königsberg.

Para probar que el problema no tenía solución, Euler reemplazó cada área terrestre por un punto y cada puente por una línea uniendo los correspondientes puntos, generando un "grafo" (figura 1.2). Más que atacar este problema específico, Euler dio condiciones generales para que un grafo pueda ser atravesado de esta forma: debe ser conexo y no tener más que 2 puntos en los que incidan un número impar de líneas. El grafo de la figura 1.2 es conexo pero en sus 4 puntos inciden un número impar de líneas.

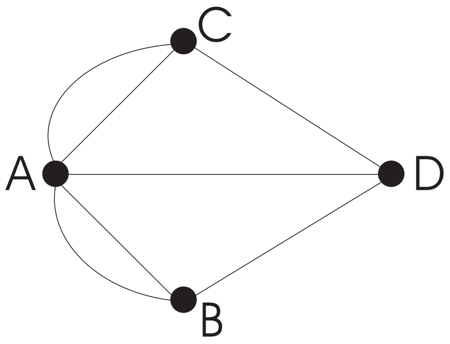

Figura 1.2: El "grafo" resultante

1.1.2 Redes eléctricas

En 1845, un joven estudiante de física, Gustav Kirchhoff formuló 2 reglas que gobiernan el flujo de electricidad en una red de ondas, reglas que hoy se conocen como "Leyes de Kirchhoff". Tal red puede ser pensada como un grafo con ciertas características físicas que pueden ser obviadas. Una de estas 2 leyes trabaja con el flujo que corre a través de un circuito, y conduce a un conjunto de ecuaciones lineales, una para cada circuito del grafo. Estas ecuaciones no son todas independientes por lo que es interesante saber cuántas de ellas son necesarias para obtener el conjunto completo. Esta fue la pregunta que Kirchhoff formuló y resolvió en 1847 [57]. Consideremos las implicancias en teoría de grafos de este problema analizando el siguiente ejemplo (figura 1.3).

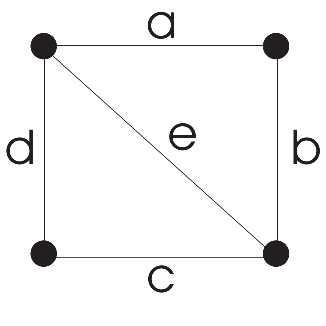

Figura 1.3

Este grafo contiene 3 circuitos: $C_1 = abe, C_2 = cde$ y $C_3 = abcd$. Diremos que la suma de 2 circuitos consiste de todas las aristas que pertenecen a uno de ellos pero no a ambos. Este concepto puede ser extendido de manera obvia a la suma de cualquier número finito de circuitos. En nuestro ejemplo, C_3 es la suma de C_1 y C_2. Un conjunto de circuitos se dice independiente si ninguno de ellos puede ser expresado como la suma de otros. Un conjunto maximal de circuitos independientes es llamado un conjunto fundamental. Por ejemplo, $\{C_1, C_2\}$ es un conjunto fundamental del grafo de la figura 1.3. El problema entonces consistía en saber cuántos circuitos hay en un conjunto fundamental y describir un método para construir tal conjunto; si un conjunto fundamental es dado, todo otro circuito puede ser escrito como la suma de miembros de este conjunto.

El problema tratado por Kirchhoff es esencialmente el mismo: la ecuación lineal correspondiente a la suma de circuitos es justamente la suma de las ecuaciones correspondientes a los circuitos individuales, y consecuentemente, las ecuaciones correspondientes a un conjunto independiente de circuitos, son independientes.

En su trabajo [57], Kirchhoff explicó cómo un conjunto fundamental de circuitos podía ser construido, y probó que para cualquier grafo conexo con n vértices y m aristas, un conjunto fundamental siempre contiene $m - n + 1$ circuitos. Muchos años después, Veblen [93] dio otro método para construir un conjunto fundamental de circuitos partiendo de un árbol generador del grafo.

1.1.3 Isómeros químicos

En 1857, un matemático inglés, Arthur Cayley, definió los árboles [18], una importante clase de los grafos. Esta definición se derivó de considerar los cambios de variables en el cálculo diferencial. Unos años después, se preocupó en enumerar los isómeros de los hidrocarbonos saturados C_nH_{2n+2}, con un número dado n de átomos de carbono. La representación de una molécula de uno de estos isómeros (el butano) puede verse en la figura 1.4.

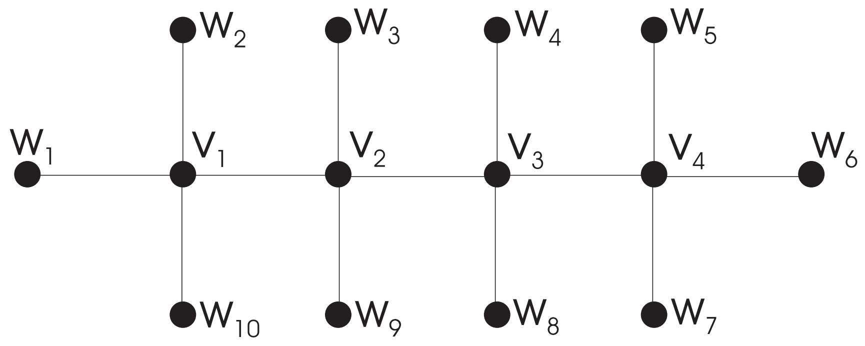

Figura 1.4: Una molécula de butano, que verifica la fórmula C_4H_{10}

Cayley estableció el problema en forma abstracta: encontrar el número de árboles con n vértices tal que todo vértice tiene grado 1 ó 4. Como no pudo resolver el problema en forma inmediata, lo fue modificando y así pudo enumerar: árboles enraizados (en los cuales un vértice está distinguido de los otros); árboles; árboles con vértices de grado a lo sumo 4 y, por último, el problema químico de los árboles en los que todo vértice tiene grado 1 ó 4 [19].

1.1.4 El juego icosiano

Uno de los más significativos descubrimientos del famoso matemático irlandés, Sir William Hamilton, fue la existencia de álgebras no-conmutativas. Hay muchos sistemas de álgebras no-conmutativas, y una de ellas, descubierta por Hamilton y nombrada como "El cálculo icosiano" [43], puede ser interpretada en términos de caminos sobre el grafo del dodecaedro regular (figura 1.5).

Hamilton usó esta interpretación gráfica como base para un entretenimiento que llamó "El juego icosiano". Este juego fue exhibido en un congreso en Dublín en 1857 y comercializado en 1859. El objetivo del juego era encontrar caminos y circuitos en el grafo dodecaedral, satisfaciendo ciertas condiciones. En particular, el primer problema consistía en hallar un circuito que pasara exactamente una vez por cada vértice retornando al vértice de partida, lo que hoy se conoce como circuito hamiltoniano. Dicho circuito puede ser encontrado en el grafo dodecaedral siguiendo la numeración creciente de la figura 1.5.

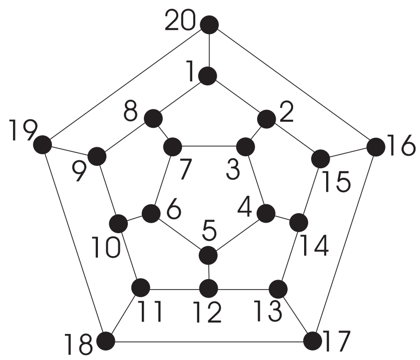

Figura 1.5: El dodecaedro regular.

Tiempo después hubo otra versión del juego de Hamilton conocida como "Un viaje alrededor del mundo". En este caso, los vértices representaban 20 ciudades importantes (Bruselas, Canton, Delhi,...,Zanzíbar) y se quería encontrar un *tour* que, saliendo de la primera ciudad, pasara exactamente una vez por todas las demás retornando al punto de partida.

1.1.5 El problema de los 4 colores

Uno de los problemas más conocidos en teoría de grafos es el “Problema de los 4 colores”. Consiste en la afirmación (originalmente conjetura) de que todo mapa en el plano puede ser coloreado con a lo sumo 4 colores de manera de que 2 países limítrofes (con algún borde en común) no reciban el mismo color. Claramente, este problema puede ser modelado usando grafos si asignamos a cada país un vértice, unimos con una arista vértices correspondientes a países limítrofes y coloreamos los vértices del grafo de manera de que 2 vértices adyacentes no reciban el mismo color.

La primer referencia escrita a este problema surge en una carta enviada por el matemático inglés Augustus De Morgan a William Hamilton en 1852. De Morgan relataba en la carta que este problema le había sido planteado por uno de sus alumnos, Frederick Guthrie. Muchos años después, Guthrie reveló en una nota [40] que el originador del problema había sido en realidad su hermano Francis. Hamilton no pareció demasiado interesado en la conjetura. Su respuesta a De Morgan fue: *“I am not likely to attempt your 'quaternion of colours' very soon”*.

Recién en 1879, el inglés Alfred Kempe publicó un artículo [55] “probando” la conjetura de los 4 colores, en lo que fue una de las más notables demostraciones erróneas en la historia de la matemática. La supuesta solución del problema de los 4 colores fue recibida con gran entusiasmo por la comunidad científica, quien aceptó la demostración como correcta. La falacia en la prueba de Kempe fue revelada en 1890 por Percy John Heawood. En la introducción de su artículo [45], Heawood prácticamente se disculpaba por haber encontrado un error en los argumentos de Kempe. También probaba allí que 5 colores son siempre suficientes para colorear un mapa planar y analizaba el coloreo de mapas en otras superficies.

La conjetura permaneció abierta hasta que fue probada computacionalmente en 1976 ([5], [6]). Sin embargo, la comunidad científica nunca terminó de aceptar esta demostración como correcta. Recién en 1997, una nueva prueba también computacional pero mucho más sencilla fue publicada [71], prueba que ahora sí es considerada totalmente válida.

1.2 Definiciones básicas y notación

Denotaremos un grafo G por un par $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ representa un conjunto finito de vértices de G y $E(G)$, un conjunto de pares no ordenados de vértices de G, llamados aristas. Sean $n = |V(G)|$ y $m = |E(G)|$.

Un vértice v es adyacente a otro vértice w en G si $(v, w) \in E(G)$. Decimos que v y w son los extremos de la arista. El vecindario de un vértice v es el conjunto $N(v)$ que consiste de todos los vértices adyacentes a v. El vecindario cerrado de v es $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Un vértice v es universal cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$.

Un vértice v es aislado cuando $N(v) = \emptyset$.

El grado de un vértice v es la cardinalidad del conjunto $N(v)$.

El complemento de un grafo G, denotado por $\overline{G}$, es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices de G y tal que dos vértices distintos son adyacentes en $\overline{G}$ si y sólo sí no son adyacentes en G.

Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si $V(H) = V(G)$, decimos que H es un subgrafo generador de G. Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de G inducido por X es el subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en X.

Dos grafos G y H son isomorfos si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que conserva las adyacencias. En este caso, notamos $G = H$.

Para cualquier vértice v de un grafo G, se define una complementación local de G en v como el grafo obtenido al reemplazar $N(v)$ por su complemento. Dos grafos son localmente equivalentes si uno puede ser obtenido del otro por una secuencia de complementaciones locales.

Un camino en un grafo G es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, v_2, ..., v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G), i = 1, ..., k-1$. Una cuerda en P es una arista que une dos vértices no consecutivos de P. Un camino inducido es un camino sin cuerdas. Denotamos por P_k un camino inducido por k vértices.

Un circuito en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, v_2, ..., v_k$, no necesariamente distintos, donde $v_1 = v_k$ y $(v_i, v_{i+1}) \in E(G), i = 1, ..., k-1$.

Un ciclo en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}$, donde $v_1, ..., v_k$ es un camino, v_1 es adyacente a v_k, $v_1 = v_{k+1}$ y $k \geq 3$. Una cuerda en C es cualquier cuerda del camino $v_1, v_2, ..., v_k$. Si los vértices que une la cuerda en C están a distancia 2, decimos que la cuerda es corta. Un ciclo es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos C_k al ciclo inducido por k vértices (C_3 es también llamado triángulo). C_k es conocido como el agujero de k vértices.

Un conjunto S es maximal (minimal) en relación a una determinada propiedad P si S satisface P, y todo conjunto S' que contiene propiamente a S (que está contenido propiamente en S) no satisface P.

Un grafo G es conexo si para todo par de vértices distintos v y w de G existe un camino de v a w.

Un grafo G es completo si cualquier par de vértices distintos de G son adyacentes. Llamamos K_n al grafo completo con n vértices.

Un conjunto de vértices M de un grafo G es un subgrafo completo si el subgrafo inducido por M es completo. Un clique es un subgrafo completo maximal de G. Una arista es llamada multiclical si está contenida en por lo menos 2 cliques distintos. Un parámetro bastante estudiado en un grafo G es el tamaño de un clique máximo $\omega(G)$, definido como la cardinalidad de un clique máximo de G.

Un conjunto de vértices I de un grafo G es un conjunto independiente si el subgrafo inducido por I no tiene aristas. Otro parámetro muy estudiado de un grafo G es su número de estabilidad $\alpha(G)$, definido como la cardinalidad de un conjunto independiente máximo de G.

Un conjunto de vértices S de un grafo G es un conjunto dominante si todo vértice de G está en S o es adyacente a algún vértice de S.

Un coloreo de un grafo G es una partición de $V(G)$, donde cada clase de la partición es un conjunto independiente al que identificamos con un color. Un k-coloreo es una partición de $V(G)$ en k conjuntos independientes. Si G admite un k-coloreo, decimos que G es k-cromático. El número cromático de G es el menor k para el cual existe un k-coloreo de G. Lo denotamos $\chi(G)$.

Un grafo G es un diamante si es isomorfo a $K_4 - \{e\}$, para e cualquier arista de K_4.

Un grafo es una rueda W_j si es isomorfo a un ciclo inducido C_j al que se le agrega un vértice universal.

Un grafo es un abanico F_j si es isomorfo a un camino inducido P_j al que se le agrega un vértice universal.

Dado un grafo G, definimos el grafo de líneas $L(G)$, como un nuevo grafo en el que los vértices son las aristas de G, y dos vértices en $L(G)$ son adyacentes si y sólo sí las correspondientes aristas en G tienen un vértice en común.

Definimos $G^* = G \cup \{v\}$, donde v es un vértice aislado que se agrega al grafo G.

Decimos que G es un digrafo, o un grafo dirigido, si las aristas están dadas por un conjunto de pares ordenados de vértices.

Decimos que G es un multigrafo si se permite que entre un mismo par de vértices se trace más de una arista.

Un grafo H es una estructura prohibida para una determinada clase de grafos si un grafo en dicha clase no puede contener a H como subgrafo inducido. La estructura prohibida será minimal si cualquier subgrafo inducido propio de ella pertenece a la clase.

Un concepto muy usado a lo largo de este trabajo es el de la propiedad de Helly. Una familia de subconjuntos S satisface la propiedad de Helly cuando toda subfamilia de S consistente en subconjuntos que se intersecan de a pares tiene intersección no vacía.

Una propiedad en grafos es hereditaria cuando se verifica que si un grafo tiene la propiedad, cualquier subgrafo inducido de él también la tiene.

Definiciones no dadas aquí pueden encontrarse en [10],[35] o [44].

1.3 Clases de grafos

Consideremos una familia finita de conjuntos no-vacíos. El grafo intersección de esta familia es obtenido representando cada conjunto por un vértice, conectando dos vértices por un arista si y sólo sí los correspondientes conjuntos se intersecan. Es sencillo probar que todo grafo es un grafo intersección de alguna familia. El grafo overlap de esta familia se obtiene representando cada conjunto por un vértice, conectando dos vértices por un arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan pero ninguno de los dos está incluido en el otro (diremos en este caso que los conjuntos se superponen). Es fácil también demostrar que todo grafo es un grafo overlap de alguna familia.

Los grafos intersección han recibido mucha atención en el estudio de teoría algorítmica de grafos y sus aplicaciones ([35], [64]). Algunas clases especiales muy estudiadas de grafos de intersección son los grafos de intervalos, los cordales, los arco-circulares, los circulares, los de permutación, los grafos clique, etc.

Un grafo arco-circular es el grafo intersección de arcos alrededor de un círculo.

Un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo.

Un grafo de intervalos es el grafo intersección de intervalos en una recta.

El grafo clique de G, $K(G)$, es el grafo intersección de los cliques de G. Dada una clase de grafos $\mathcal{H}$, definimos $K(\mathcal{H})$ como la clase de los grafos clique de grafos en $\mathcal{H}$, y $K^{-1}(\mathcal{H})$ como la clase de los grafos cuyos grafos clique están en $\mathcal{H}$ (éstos últimos son llamados grafos clique-inversos de $\mathcal{H}$).

Un grafo es clique-Helly si sus cliques satisfacen la propiedad de Helly.

Un grafo G es cordal (o triangulado) si G no contiene al ciclo inducido C_k como subgrafo inducido, para $k \geq 4$.

Un grafo G es bipartito si su conjunto de vértices puede ser particionado en dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2, de modo de que no exista ninguna arista entre vértices de V_1 ni entre vértices de V_2.

Un grafo G es grafo línea si existe un grafo H tal que $L(H) = G$, o sea, G es el grafo de líneas de H.

Un grafo overlap de intervalos (conocidos en la literatura como grafos overlap) es el grafo overlap de intervalos en una recta. Está probado que son equivalentes a los grafos circulares.

Un grafo overlap de arcos circulares (CAO) es el grafo overlap de arcos alrededor de un círculo.

Un grafo $G = (V(G), E(G))$ es de comparabilidad si es posible direccionar sus aristas de modo de que el grafo dirigido resultante $G' = (V(G), D(G))$ satisfaga: $(u, v) \in D(G), (v, w) \in D(G) \Rightarrow (u, w) \in D(G)$

Sea $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ una permutación de los números $1, \ldots, n$. Definimos $G[\pi]$ como el grafo de n vértices, en el que dos vértices son adyacentes si y sólo sí el de índice mayor está a la izquierda del de índice menor en π. Diremos entonces que G es un grafo de permutación si existe una permutación π tal que G sea isomorfo a $G[\pi]$. Grafos de permutación constituyen una sublcase de los grafos de comparabilidad.

Un grafo G es perfecto si $\chi(H) = \omega(H)$ para todo H subgrafo inducido de G.

Un grafo G es Berge si no contiene como subgrafo inducido ni un ciclo inducido impar de longitud ≥ 5 ni su complemento. Una de las principales conjeturas abiertas en teoría de grafos, formulada por C. Berge en 1960, dice que un grafo es perfecto si y sólo sí es Berge. Así, los grafos Berge han sido extensamente estudiados en la Teoría de Grafos Perfectos.

Una completa recopilación sobre clases de grafos aparece en [17].

1.4 Complejidad algorítmica

Un problema algorítmico $\pi(I, Q)$ consiste de un conjunto I de todas las posibles entradas para el problema, llamado el conjunto de instancias, y de una pregunta Q sobre esas instancias. Resolver uno de estos problemas consiste en desarrollar un algoritmo cuya entrada es una instancia del problema y cuya salida es una respuesta a la pregunta del problema.

Decimos que un problema es de decisión cuando las posibles respuestas a la pregunta son SI ó NO. Por ejemplo, π podría ser el siguiente problema: "dado un grafo G, ¿ es arco-circular ?". El conjunto de instancias es el conjunto de todos los grafos y la pregunta es saber si el grafo dado es ó no arco-circular. El problema dado no sólo es de decisión sino que en particular es un problema de reconocimiento. Es de sumo interés tanto desde el punto de vista teórico como de las aplicaciones estudiar problemas de reconocimiento para las diferentes clases de grafos.

Un problema es de optimización cuando lo que se busca a través de la pregunta es la solución óptima para el problema formulado. Por ejemplo, "dado un grafo G, ¿ cuánto vale $\chi(G)$?"

Usualmente, los problemas de optimización tienen su variante de decisión. En el caso del coloreo será: "dado un grafo G y un entero k positivo, ¿ existe un coloreo de G con menos que k colores ?"

Diremos que un algoritmo es polinomial cuando el número de operaciones que efectúa está acotado por una función polinomial en el tamaño de su entrada. Si el tamaño de la entrada es n y la función polinomial es $f(n)$, decimos que el algoritmo tiene complejidad $O(f(n))$. Los problemas de decisión para los que existen algoritmos polinomiales constituyen la clase P y son llamados polinomiales.

Un problema de decisión es no-determinístico polinomial cuando cualquier instancia que produce respuesta SI posee una comprobación de correctitud (también llamada certificado) verificable en tiempo polinomial en el tamaño de la instancia. Estos problemas de decisión pertenecen a la clase NP.

Claramente, $P \subseteq NP$. Sin embargo, no se sabe si esta inclusión es estricta: uno de los principales problemas abiertos en informática teórica es saber si $P \neq NP$.

Un problema de decisión pertenece a la clase Co-NP cuando cualquier instancia que produce respuesta NO posee un certificado polinomial en el tamaño de la instancia.

Sean $\pi_1(I_1, Q_1)$ y $\pi_2(I_2, Q_2)$ dos problemas de decisión. Una transformación polinomial de π_1 en π_2 es una función $f : I_1 \rightarrow I_2$ tal que se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. f puede computarse en tiempo polinomial.

2. Para toda instancia $D \in I_1$, D produce respuesta SI para π_1 si y sólo sí $f(D)$ produce respuesta SI para π_2.

Una definición esencial en la teoría de complejidad es la definición de problema NP-completo. Un problema de decisión π pertenece a la clase NP-completo cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\pi \in NP$.

- Para todo problema $\pi' \in NP$, existe una transformación polinomial de π' en π.

Un problema de decisión π pertenece a la clase NP-hard cuando se satisface la siguiente condición:

- Para todo problema $\pi' \in NP$, existe una transformación polinomial de π' en π.

La teoría de NP-completitud fue iniciada por Cook en 1971 [21]. Allí probó que el problema de satisfactibilidad de la lógica matemática es NP-completo, en un resultado que se conoce como el Teorema de Cook. Primero Karp [53], y tiempo después Garey y Johnson [30], presentaron largas listas de problemas NP-completos en el campo de la combinatoria, la lógica, la teoría de conjuntos, la teoría de grafos y otras áreas de la matemática discreta.

La técnica standard para probar que un problema π es NP-completo es la siguiente: elegir en forma apropiada un problema π' que ya sabemos que es NP-completo y luego probar que $\pi \in NP$ y que π' es transformable polinomialmente en π. Si sólo probáramos esta segunda parte, habremos probado que el problema π es NP-hard.

No se conoce ningún algoritmo polinomial para resolver un problema NP-completo. Surge de la definición de NP-completitud que si se encontrara un algoritmo polinomial para un problema en esta clase, todo problema en NP sería polinomial (y estaría probado, en consecuencia, que $P = NP$).

Como fuente de referencia en complejidad de algoritmos sugerimos consultar [30].

Capítulo 2

Grafos arco-circulares

Un grafo G es arco-circular si existe un conjunto de arcos A (que llamamos representación) alrededor de un círculo y una correspondencia 1-1 entre vértices de G y arcos de A de manera que dos vértices distintos son adyacentes si y sólo sí los arcos correspondientes se intersecan. Es decir, un grafo arco-circular es el grafo intersección de arcos alrededor de un círculo. Establecemos que los arcos deben ser abiertos. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que ningún par de arcos tiene un extremo común y que ningún arco cubre el perímetro total de la circunferencia.

El problema de caracterizar grafos arco-circulares fue planteado por primera vez en [41] y discutido con más detalle en [58]. Pero fue Alan Tucker ([85], [86], [87], [88], [89], [90]) quien aportó todo el basamento teórico inicial para esta clase de grafos, incluyendo una primer caracterización en [86]. El reconocimiento de esta clase es polinomial. Tucker [90] propuso un algoritmo de reconocimiento de complejidad $O(n^3)$, mientras que Spinrad [74] simplificó el algoritmo de Tucker para el caso de que el grafo dado pueda ser cubierto por dos cliques. Varios años después, Hsu [50] encontró un algoritmo más eficiente (complejidad $O(m.n)$). Uno de los principales problemas abiertos en esta clase es determinar si existe algún algoritmo de reconocimiento lineal en m y n. En [33], Gavril había dado algoritmos de complejidad polinomial para reconocer algunas subclases de los grafos arco-circulares.

Ha sido probado que diversos problemas NP-completos para la clase general de los grafos tienen resolución polinomial para grafos arco-circulares. Este es el caso de los problemas de conjunto independiente máximo ([36],[38], [49], [62]), clique máximo ([4], [48]), partición en cliques mínima ([38], [49]) y conjunto dominante mínimo ([13], [49]). En cambio, el problema de número cromático permanece NP-completo para grafos arco-circulares [31] y grafos arco-circular Helly [34], mientras que es polinomial para grafos arco-circular propios [66]. El problema de isomorfismo en grafos, de complejidad desconocida para el caso general, es polinomial para los arco-circulares [50]. Los grafos clique de grafos arco-circular Helly han sido estudiados y caracterizados en [25].

2.1 Aplicaciones

Los grafos arco-circulares tienen aplicaciones en genética [78], control del tránsito [79], diseño de compiladores [89], estadística [51] y problemas de almacenamiento [20].

Mostramos aquí un ejemplo de aplicación a control del tránsito: la instalación de un sistema de semáforos que controle el tráfico de vehículos en un cruce de esquinas.

Supongamos que queremos controlar con semáforos el flujo del tránsito en el cruce de esquinas graficado en la figura 2.1.

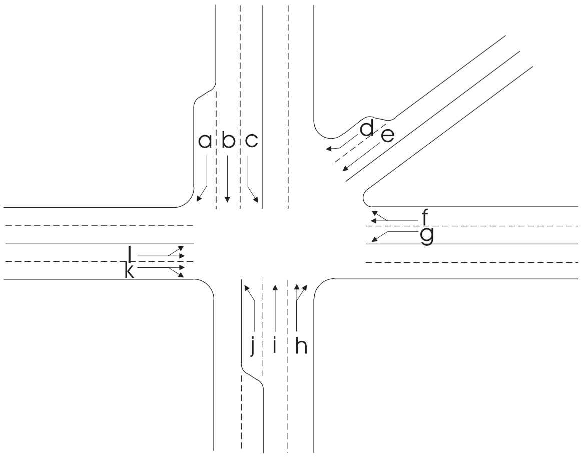

Figura 2.1: Cruce de esquinas

Ciertos carriles son compatibles entre sí, o sea, los autos que por ellos circulan pueden avanzar simultáneamente (por ejemplo, c y j o a y d), mientras que otros son incompatibles (por ejemplo, b y f o h y k). Buscamos una representación en arcos circulares que a cada carril le asigne un arco alrededor del círculo; la longitud del arco representa el intervalo de tiempo durante el cual dicho carril tiene luz verde. Obviamente, a carriles incompatibles deberán asignárseles arcos disjuntos. Puede pensarse que la totalidad de la circunferencia representa una unidad de tiempo (a definir) que será continuamente repetida.

Una asignación de arcos para nuestro ejemplo está dada en la figura 2.2.

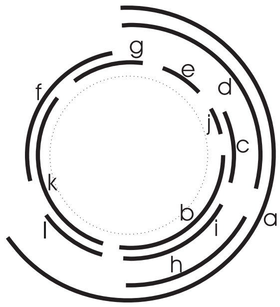

Figura 2.2

El grafo G arco-circular que se obtiene puede verse en la figura 2.3.

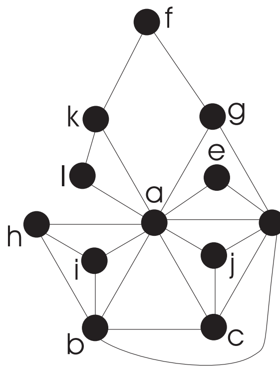

Figura 2.3

Claramente, si H es el grafo definido por la relación de compatibilidad entre pares de carriles, entonces G es un subgrafo generador de H. En nuestro caso, por ejemplo, los pares (d, k) o (h, j) están en H pero no en G.

Una solución para este problema consiste en encontrar un subgrafo generador G de H tal que G sea arco-circular. Intuitivamente, es razonable esperar que conviene maximizar el número de aristas de G para disminuir el tiempo de espera de cada carril. Aspectos adicionales de este problema, tales como elegir una asignación de arcos que minimice el tiempo de espera total del sistema, pueden ser incorporados al modelo, dificultando su resolución (ver [69], [70] y [79]).

2.2 Generalidades

Los grafos arco-circulares admiten varias subclases interesantes, trataremos aquí las siguientes:

1. Propios: un grafo G es arco-circular propio (PCA) si existe una representación arco-circular de G tal que ningún arco está contenido en forma propia en otro. Tucker [87] propuso una caracterización y un algoritmo eficiente para su reconocimiento, usando matrices de caracterización. El mismo autor también dio una caracterización para esta subclase por medio de subgrafos prohibidos [88].

2. Unitarios: un grafo G es arco-circular unitario (UCA) si existe una representación arco-circular de G tal que todos sus arcos tengan la misma longitud. Claramente, $UCA \subseteq PCA$. En [88], el autor muestra que esta inclusión es estricta y propone una caracterización para esta subclase, usando subgrafos prohibidos. Esta caracterización conduce a un algoritmo polinomial para el reconocimiento de la subclase [76]. Golumbic también muestra en [35] un grafo que pertenece a PCA pero no a UCA.

3. Helly: un grafo G es arco-circular Helly (HCA) si existe una representación arco-circular de G tal que los arcos satisfacen la propiedad de Helly. Gavril [33] dio una caracterización de esta subclase usando la matriz clique de un grafo. Esta caracterización conduce a un algoritmo eficiente para su reconocimiento.

4. Clique-Helly: un grafo G es arco-circular clique-Helly ($CHCA$) si G es arco-circular y clique-Helly. Szwarcfiter [83] describió una caracterización de grafos clique-Helly que conduce a un algoritmo polinomial de reconocimiento. Este método junto a un algoritmo para grafos arco-circulares ([90],[50]) resultan en un algoritmo eficiente para el reconocimiento de esta subclase.

Revisamos aquí teoremas de caracterización de grafos arco-circulares y sus subclases.

Teorema 2.1 ([86]) *Un grafo $G = (V(G), E(G))$ es arco-circular si y sólo sí sus vértices pueden ser circularmente indexados $(v_1, ..., v_n)$ tal que para cada $i < j$, si $(v_i, v_j) \in E(G)$ entonces $v_{i+1}, ..., v_j \in N(v_i)$ o $v_{j+1}, ..., v_n, v_1, ..., v_i \in N(v_j)$.*

Los grafos PCA pueden ser caracterizados por medio de subgrafos prohibidos. Para ello necesitamos los grafos H_1, H_2, H_3, H_4 y H_5, como en la figura 2.4, tal cual son definidos en [88].

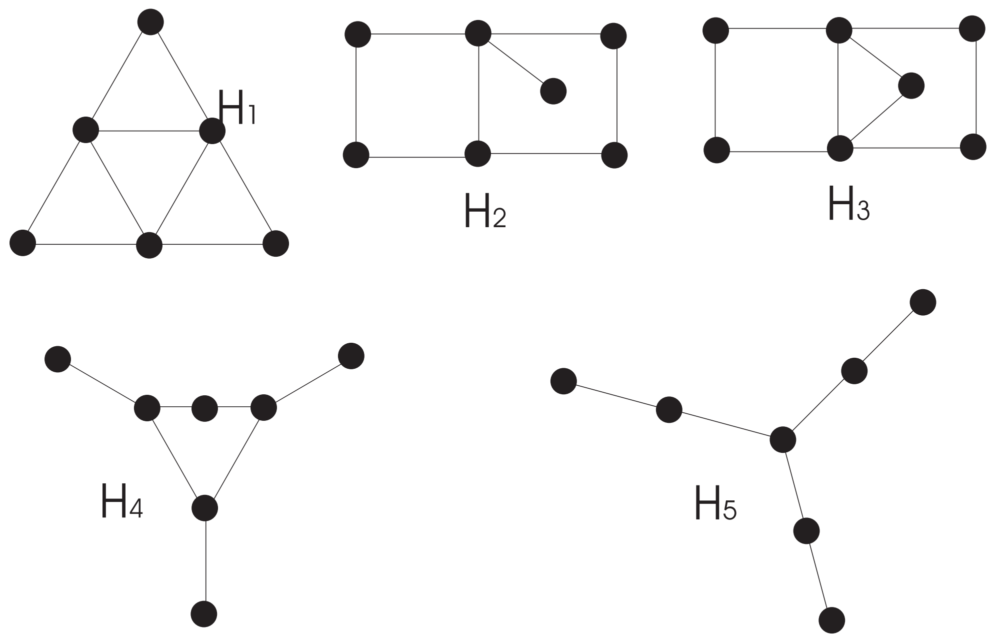

Figura 2.4

Teorema 2.2 ([88]) *Un grafo G es arco-circular propio si y sólo sí no contiene como subgrafos inducidos a ninguno de los siguientes grafos: $\overline{H_1}, \overline{H_2}, \overline{H_3}, \overline{H_4}, \overline{H_5}$ y H_1^*, ni a ningún grafo perteneciente a las siguientes familias: $\{C_n^*\}_{n\geq 4}$, $\{\overline{C_{2j}}\}_{j\geq 3}$ y $\{\overline{C_{2j+1}^*}\}_{j\geq 1}$.*

Como corolarios de este teorema de Tucker mostramos en esta tesis que se derivan nuevas caracterizaciones para grafos arco-circular propios. Para poder formularlas debemos probar dos lemas que estudian las características de los subgrafos prohibidos del Teorema 2.2.

Lema 2.1 *Los grafos* $\overline{H_1}, \overline{H_2}, \overline{H_3}, \overline{H_4}, \overline{H_5}$ *y los grafos pertenecientes a la familia* $\{\overline{C^*_{2j+1}}\}_{j\geq 1}$ *son arco-circulares.*

Demostración:

Es sencillo encontrar las representaciones arco-circulares de $\overline{H_1}, \overline{H_2}, \overline{H_3}, \overline{H_4}$ y $\overline{H_5}$. Probemos que los grafos de la familia $\{\overline{C^*_{2j+1}}\}_{j\geq 1}$ son arco-circulares. Sean $\{w_1, w_2, ..., w_{2j}, w_{2j+1}\}$ los vértices de C_{2j+1} para algún $j \geq 1$. Rotulamos los vértices de otra forma. Sean $v_1 = w_1; v_2 = w_3; v_3 = w_5; \ldots; v_{j+1} = w_{2j+1}; v_{j+2} = w_2; v_{j+3} = w_4; \ldots; v_{2j+1} = w_{2j}$ los nuevos rótulos. Ahora, las hipótesis del Teorema 2.1 son verificadas para $\overline{C_{2j+1}}$ y, en consecuencia, es un grafo arco-circular. Claramente, si agregamos un vértice universal el grafo sigue siendo arco-circular. □

Lema 2.2 *El grafo* H_1^* *y los grafos pertenecientes a las familias* $\{C_n^*\}_{n\geq 4}$ *y* $\{\overline{C_{2j}}\}_{j\geq 3}$ *no son arco-circulares.*

Demostración:

Las representaciones arco-circulares de H_1 y de los grafos pertenecientes a $\{C_n\}_{n\geq 4}$ cubren todo el arco de la circunferencia. Así, no es posible agregarle en ninguno de los dos casos un vértice aislado. Veamos que los grafos pertenecientes a la familia $\{\overline{C_{2j}}\}_{j\geq 3}$ tampoco son arco-circulares. Supongamos que sí, $\overline{C_{2j}}$ es arco-circular para algún $j \geq 3$. Por el Teorema 2.2, $\overline{C_{2j}}$ no puede ser arco-circular propio. Sean, entonces, $A_1, ..., A_n$ los arcos de una representación arco-circular de $\overline{C_{2j}}$. Deben existir dos arcos diferentes A_i y A_k (correspondientes a los vértices v_i y v_k de $\overline{C_{2j}}$) tal que A_i está incluido en A_k, por ser $\overline{C_{2j}}$ arco-circular no propio. Así, $N[v_i] \subseteq N[v_k]$. Pero es claro que no existen vértices distintos v y w en $\overline{C_{2j}}$ tal que $N[v] \subseteq N[w]$. Por lo tanto, $\overline{C_{2j}}$ no es arco-circular. □

Corolario 2.1 *Un grafo G es arco-circular propio si y sólo sí G es arco-circular y no contiene como subgrafos inducidos a* $\overline{H_1}, \overline{H_2}, \overline{H_3}, \overline{H_4}, \overline{H_5}$ *ni a ningún grafo perteneciente a la familia* $\{\overline{C^*_{2j+1}}\}_{j\geq 1}$.

Demostración:

Es una consecuencia directa del Teorema 2.2 y de los Lemas 2.1 y 2.2. □

Corolario 2.2 *Sea G un grafo cordal. G es arco-circular propio si y sólo sí G no contiene como subgrafos inducidos a ninguno de los siguientes grafos:* H_1^*, $\overline{H_1}$ *y* $\overline{C_3^*}$.

Demostración:

Es una consecuencia directa del Teorema 2.2 y del hecho de que los únicos grafos cordales de la lista de subgrafos prohibidos del Teorema 2.2 son H_1^*, $\overline{H_1}$ y $\overline{C_3^*}$. $\square$

Corolario 2.3 *Sea G un grafo cordal. G es arco-circular propio si y sólo sí G es arco-circular y no contiene como subgrafos inducidos a $\overline{H_1}$ ni a $\overline{C_3^*}$.*

Demostración:

Es una consecuencia directa del Teorema 2.2 y del hecho de que los únicos grafos cordales y arco-circulares de la lista de subgrafos prohibidos del Teorema 2.2 son $\overline{H_1}$ y $\overline{C_3^*}$. $\square$

Corolario 2.4 *Sea G un grafo sin W_4 como subgrafo inducido. G es arco-circular propio si y sólo sí G no contiene como subgrafo inducido a ninguno de los siguientes grafos: $\overline{H_1}, H_1^*, \overline{C_6}, \overline{C_3^*}$ y $\overline{C_5^*}$ ni a ningún grafo perteneciente a la familia: $\{C_n^*\}_{n\geq 4}$.*

Demostración:

Es una consecuencia directa del Teorema 2.2 y del hecho de que los únicos grafos sin W_4 como subgrafo inducido, de la lista de subgrafos prohibidos del Teorema 2.2 son $\overline{H_1}, H_1^*, \overline{C_6}, \overline{C_3^*}$ y $\overline{C_5^*}$ y los grafos pertenecientes a la familia: $\{C_n^*\}_{n\geq 4}$. $\square$

Corolario 2.5 *Sea G un grafo sin W_4 como subgrafo inducido. G es arco-circular propio si y sólo sí G es arco-circular y no contiene como subgrafo inducido a $\overline{H_1}, \overline{C_3^*}$ ni $\overline{C_5^*}$*

Demostración:

Es una consecuencia directa del Teorema 2.2 y del hecho de que los únicos grafos sin W_4 como subgrafo inducido y arco-circulares, de la lista de subgrafos prohibidos del Teorema 2.2 son $\overline{H_1}, \overline{C_3^*}$ y $\overline{C_5^*}$. $\square$

También a partir de la caracterización de Tucker para grafos PCA y de los Lemas 2.1 y 2.2, surge un resultado sobre estructuras prohibidas minimales para grafos arco-circulares.

Teorema 2.3 *Dada H una estructura prohibida minimal para grafos arco-circulares, H contiene en forma propia como subgrafo inducido a alguno de los grafos del Lema 2.1 ó H es alguno de los grafos del Lema 2.2.*

Demostración:

Es una consecuencia directa del Teorema 2.2, los Lemas 2.1 y 2.2 y el hecho de que PCA es una subclase de los grafos arco-circulares. □

Veamos una caracterización de grafos arco-circular propios conexos y cordales mostrada en [9]. Sean G_1 y G_2 los grafos de la figura 2.5.

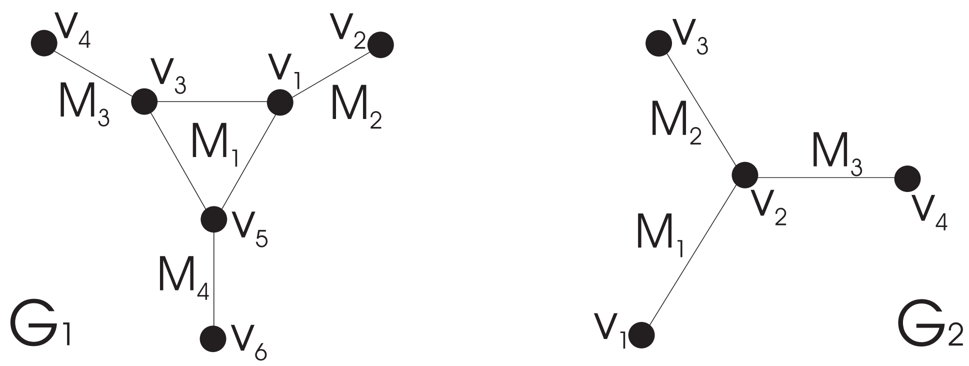

Figura 2.5

Teorema 2.4 ([9]) *Sea G un grafo conexo y cordal. G es arco-circular propio si y sólo sí no contiene ni a G_1 ni a G_2 como subgrafos inducidos.*

Para caracterizar la región $PCA \setminus UCA$, necesitamos definir la siguiente familia de grafos [88]. Sea $CI(j,k)(j > k)$ un grafo arco-circular cuya representación en arcos circulares se construye de la siguiente forma: sea ε un numero real positivo pequeño y $r = 1$ el radio de la circunferencia. Se dibujan j arcos $(A_0, A_1, ..., A_{j-1})$ de longitud $l_1 = 2\pi k/j + \varepsilon$ tal que cada arco A_i empieza en $2\pi i/j$ y termina en $2\pi(i+k)/j+\varepsilon$ $(A_i = (2\pi i/j, 2\pi(i+k)/j+\varepsilon))$. Luego, se dibujan otros j arcos $(B_0, B_1, ..., B_{j-1})$ de longitud $l_2 = 2\pi k/j - \varepsilon$, tal que cada arco B_i empieza en $(2\pi i+\pi)/j$ y termina en $(2\pi(i+k)+\pi)/j-\varepsilon$ $(B_i = ((2\pi i + \pi)/j, (2\pi(i + k) + \pi)/j - \varepsilon))$. Por ejemplo, la representación de la figura 2.6 genera el grafo $CI(4, 1)$, al que llamamos G_3.

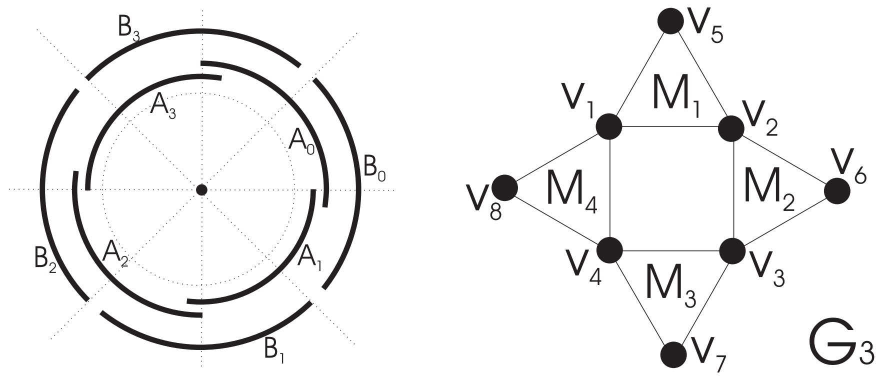

Figura 2.6: $CI(4, 1)$ y su representación arco-circular.

Por construcción, estos grafos son arco-circular propios [88].

Teorema 2.5 ([88]) *Sea G un grafo arco-circular propio. G es arco-circular unitario si y sólo sí G no contiene a $CI(j,k)$ como subgrafo inducido, para j,k coprimos y $j > 2k$.*

Daremos ahora una caracterización de grafos conexos arco-circular propios. Para ello, necesitamos introducir los conceptos de torneos locales ([23],[46], [47]) y orientaciones circulares [23].

Un torneo es una orientación de un grafo completo. Un torneo local es un grafo dirigido donde tanto el conjunto de entrada como el de salida de cada vértice induce un torneo.

Una enumeración circular de un grafo dirigido D es un orden circular $S = (v_0, ..., v_{n-1})$ de sus vértices tal que para cada i existen enteros no-negativos r_i y s_i, y el vértice v_i tiene conjunto de entrada $N^S_{in} = \{v_{i-1}, v_{i-2}, ..., v_{i-r_i}\}$ y de salida $N^S_{out} = \{v_{i+1}, v_{i+2}, ..., v_{i+s_i}\}$ (sumas y restas deben entenderse modulo n). Un grafo dirigido que admite una enumeración circular es llamado ronda. Un grafo no dirigido se dice que tiene una orientación circular si admite una orientación que lo transforma en un grafo dirigido ronda.

Teorema 2.6 ([23],[73]) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grafo conexo G:*

1. *G es orientable como un torneo local.*

2. *G tiene una orientación circular.*

3. *G es arco-circular propio.*

Una matriz tiene forma de $1's$ circulares si los $1's$ en cada columna aparecen en un orden circular consecutivo. Una matriz tiene la propiedad de $1's$ circulares si por una permutación de las filas puede ser transformada en una matriz con forma de $1's$ circulares. Sea G un grafo y $M_1, M_2, ..., M_k$ los cliques de G. Denotaremos por A_G la matriz clique de $k \times n$, es decir, la entrada (i,j) es 1 si el vértice $v_j \in M_i$ y 0, en caso contrario. Veamos la siguiente caracterización de grafos arco-circular Helly, que aparece en [33].

Teorema 2.7 ([33]) *Un grafo G es arco-circular Helly si y sólo sí A_G tiene la propiedad de 1's circulares.*

Observación: En [20], los autores trabajan con la subclase de los grafos arco-circulares constituida por aquellos grafos que tienen una representación que a la vez es propia y Helly. Se puede mostrar que esta subclase está incluida estrictamente en $PCA \cap HCA$. El grafo de la figura 2.7, conocido como el grafo pirámide, está contenido en $PCA \cap HCA$ pero no tiene ninguna representación arco-circular que sea propia y Helly a la vez.

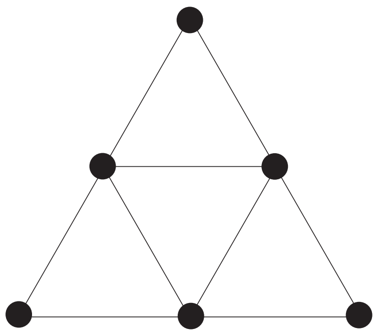

Figura 2.7: El grafo pirámide

Usamos también una caracterización de grafos clique-Helly [83]. Debemos definir el concepto de triángulo extendido. Sea G un grafo y T un triángulo de G. El triángulo extendido de G, relativo a T, es el subgrafo de G inducido por los vértices que forman un triángulo con al menos una arista de T. Un vértice v es universal en un subgrafo de G si v es adyacente a todo otro vértice del subgrafo.

Teorema 2.8 ([83]) *Un grafo G es clique-Helly si y sólo sí todos sus triángulos extendidos contienen un vértice universal.*

2.3 Intersecciones entre las subclases

Queremos analizar la existencia de grafos que pertenezcan a exactamente k de las 4 subclases de los grafos arco-circulares ya definidas ($k = 0, 1, 2, 3, 4$). La región R es definida como cualquier combinación de las 4 subclases. R es vacía si no hay grafos que pertenezcan a las k subclases que definen la región y no pertenezcan a las otras $4 - k$ subclases.

Si $k = 0$ quedan definidas 2 regiones: una dentro de CA y la otra fuera. Tenemos entonces 17 regiones. Como 4 de ellas son trivialmente vacías a causa de que UCA es una subclase de PCA, quedan 13 regiones a ser analizadas. Probaremos el sorprendente resultado que muestra que la región definida por las subclases $CHCA$ y PCA es vacía, o sea, no existe ningún grafo que pertenezca a $CHCA$ y PCA, y no pertenezca a UCA y HCA. Mostraremos luego la existencia de miembros minimales en el resto de las regiones (ver figura 2.13). La minimalidad de los ejemplos implica que cualquier subgrafo inducido propio de ellos pertenece a otra región.

Los resultados de esta sección fueron presentados en [24].

2.3.1 La región vacía

Vamos a demostrar que la región definida por $CHCA$ y PCA es vacía.

Recordemos que $CI(j, k)(j > k)$ es un grafo arco-circular cuya representación en arcos circulares se construye de la siguiente forma: sea ε un numero real positivo pequeño y $r = 1$ el radio de la circunferencia. Se dibujan j arcos $(A_0, A_1, ..., A_{j-1})$ de longitud $l_1 = 2\pi k/j + \varepsilon$ tal que cada arco A_i empieza en $2\pi i/j$ y termina en $2\pi(i + k)/j + \varepsilon$ $(A_i = (2\pi i/j, 2\pi(i + k)/j + \varepsilon)$. Luego, se dibujan otros j arcos $(B_0, B_1, ..., B_{j-1})$ de longitud $l_2 = 2\pi k/j - \varepsilon$, tal que cada arco B_i empieza en $(2\pi i + \pi k)/j$ y termina en $(2\pi(i + k) + \pi k)/j - \varepsilon$ $(B_i = ((2\pi i + \pi k)/j, (2\pi(i + k) + \pi k)/j - \varepsilon))$. Para hacer la construcción independiente del ε, podemos suponer que los arcos A_i son cerrados y los B_i son abiertos. Definimos una correspondencia 1-1 entre el arco A_i de la representación y el vértice a_i del grafo (lo mismo para el el arco B_i y el vértice b_i). Así, a_i $(i = 0, ..., j - 1)$ es adyacente a $a_{i-k}, b_{i-k}, ..., a_{i-1}, b_{i-1}, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, ..., b_{i+k-1}, a_{i+k}$ y b_i es adyacente a $a_{i-k+1}, b_{i-k+1}, ..., a_{i-1}, b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, b_{i+1}, ..., b_{i+k-1}, a_{i+k}$ (sumas y restas deben entenderse módulo j).

El siguiente lema prueba que el grafo $CI(j, k)$ (j y k coprimos con $j > 2k$) tiene sólo dos posibles orientaciones circulares.

Lema 2.3 *Sea $H = CI(j, k)$, con j y k coprimos y $j > 2k$. Entonces, H tiene sólo dos posibles orientaciones circulares, una la reversa de la otra.*

Demostración:

Decimos que v domina a w si $N[w] \subseteq N[v]$. En nuestro caso, podemos comprobar fácilmente que los únicos vértices dominados por a_i son b_i y b_{i-1} (y son dominados en forma estricta). Probaremos que hay dos órdenes circulares posibles $S = (a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_{j-1}, b_{j-1})$ y el orden exactamente inverso, y, por lo tanto, 2 posibles orientaciones: a_i tiene como conjunto de entrada $N^S_{in}(a_i) = \{a_{i-k}, b_{i-k}, ..., a_{i-1}, b_{i-1}\}$ y conjunto de salida $N^S_{out}(a_i) = \{b_i, a_{i+1}, ..., b_{i+k-1}, a_{i+k}\}$, y b_i tiene como conjunto de entrada $N^S_{in}(b_i) = \{a_{i-k+1}, b_{i-k+1}, ..., a_{i-1}, b_{i-1}, a_i\}$ y conjunto de salida $N^S_{out}(b_i) = \{a_{i+1}, b_{i+1}, a_{i+2}, ..., b_{i+k-1}, a_{i+k}\}$ para todo i; ó exactamente se da la orientación reversa.

Sea R un orden circular posible, $R = (v_0, v_1, ..., v_{2j-2}, v_{2j-1})$. Queremos ver que es el mismo orden que S ó el orden exactamente inverso. Si $v_p = a_i$ para algún p y para algún i, será suficiente con probar que $\{v_{p-1}, v_{p+1}\} = \{b_{i-1}, b_i\}$. Recordemos que $N^R_{out}(v_p) = \{v_{p+1}, v_{p+2}, ..., v_{p+s}\}$ y $N^R_{in}(v_p) = \{v_{p-r}, ..., v_{p-2}, v_{p-1}\}$ porque R es una orientación circular (ahora, sumas y restas deben entenderse módulo 2j). Supongamos que $b_i \notin \{v_{p-1}, v_{p+1}\}$. Como b_i es adyacente a a_i, $b_i \in \{v_{p+2}, ..., v_{p+s}\}$ o $b_i \in \{v_{p-r}, ..., v_{p-2}\}$. Analicemos ambas posibilidades:

1. $b_i \in \{v_{p+2}, ..., v_{p+s}\}$. Dividimos la prueba en dos casos:

   - $v_{p+1} = b_{i-1}$: como a_{i+k} es adyacente a a_i pero no es adyacente a b_{i-1}, entonces $a_{i+k} \in \{v_{p-r}, ..., v_{p-1}\}$. Pero a_{i+k} es adyacente a b_i, así $a_{i+k} \in N^R_{out}(b_i)$ con lo que a_i sería un vértice universal porque a_i domina a b_i, o $a_{i+k} \in N^R_{in}(b_i)$ con lo que a_{i+k} sería adyacente a b_{i-1}. Ambos casos nos muestran la existencia de un absurdo.

- $v_{p+1} \neq b_{i-1}$: v_{p+1} no es dominado por a_i pues éste último sólo domina a b_i y b_{i-1}. Entonces, v_{p+1} tiene un vértice adyacente w, el cual no es adyacente ni a a_i ni a b_i. Pero si $w \in N^R_{in}(v_{p+1})$ entonces w es adyacente a a_i, y si $w \in N^R_{out}(v_{p+1})$ entonces w es adyacente a b_i, absurdo en ambos casos.

2. $b_i \in \{v_{p-r}, ..., v_{p-2}\}$. La prueba es análoga a la del caso 1. Así, $b_i \in \{v_{p-1}, v_{p+1}\}$. La prueba de que $b_{i-1} \in \{v_{p-1}, v_{p+1}\}$ es similar. □

Ahora estamos en condiciones de probar uno de los principales resultados de la sección: una de las 13 regiones es vacía.

Teorema 2.9 *Sea $G \in PCA \setminus UCA$. Si $G \in CHCA$, entonces $G \in HCA$.*

Demostración:

Por el Teorema 2.5, G contiene algún $CI(j,k)$ como subgrafo inducido, donde j y k son coprimos y $j > 2k$. Analizamos dos casos diferentes. En 1., suponemos que $2k < j \leq 3k$ y probamos que G no es clique-Helly. En 2., analizamos el caso que nos queda ($j > 3k$) y probamos que G es un grafo arco-circular Helly.

1. Sea G un grafo arco-circular propio que contiene a $H = CI(j,k)$ como subgrafo inducido, con $2k < j \leq 3k$. Mostraremos que G no es clique-Helly. Dividimos esta prueba en dos:

   - Sea $G = H$. Claramente, $C_{a_i} = \{a_i, ..., a_{i+k}\} \cup \{b_i, ..., b_{i+k-1}\}$ es un clique de G para todo i. Veamos que los cliques C_{a_0}, C_{a_k} y $C_{a_{2k}}$ no verifican la propiedad de Helly:
     $C_{a_0} \cap C_{a_k} \cap C_{a_{2k}} = \emptyset$ (pues $j > 2k$ y $k \geq 1$),
     $C_{a_0} \cap C_{a_k} = \{a_k\} \neq \emptyset$,
     $C_{a_k} \cap C_{a_{2k}} = \{a_{2k}\} \neq \emptyset$ (pues $j > 2k$),
     $C_{a_{2k}} \cap C_{a_0} \neq \emptyset$ ($a_0 \in C_{a_{2k}} \cap C_{a_0}$, pues $j \leq 3k$).

   - Sea H un subgrafo inducido propio de G. Como H es un grafo PCA conexo, tiene una orientación circular (Teorema 2.6). Por el Lema 2.3, hay sólo dos posibles orientaciones circulares, cada una la reversa de la otra. Sin pérdida de generalidad, podemos usar una de ellas (figura 2.8). Por lo visto en el caso anterior, H contiene los cliques C_{a_0}, C_{a_k} y $C_{a_{2k}}$, quienes no verifican la propiedad de Helly. Extendemos los subgrafos completos de G, C_{a_0}, C_{a_k} y $C_{a_{2k}}$, a cliques en G (y los llamamos C'_{a_0}, C'_{a_k} y $C'_{a_{2k}}$).

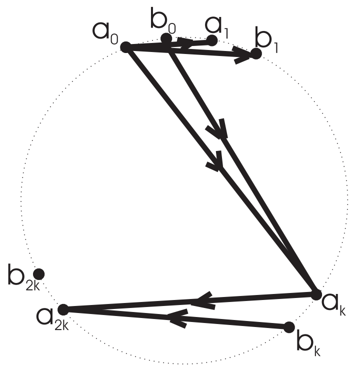

Figura 2.8

Supongamos que G es clique-Helly, entonces existe un vértice $v \in V(G) - V(H)$ tal que $v \in C'_{a_0} \cap C'_{a_k} \cap C'_{a_{2k}}$. Como C_{a_0}, C_{a_k} y $C_{a_{2k}}$ cubren todos los vértices de H, el vértice v es adyacente a w, para todo $w \in V(H)$. Sabemos por hipótesis que si agregamos el vértice v a H, el nuevo grafo sigue siendo conexo y PCA. Así, por el Teorema 2.6, hay una orientación circular del subgrafo inducido por los vértices de H y v, usamos la de la figura 2.8 y agregamos a v. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que v es agregado entre a_0 y b_0 (figura 2.9). Se ve entonces que v no puede ser adyacente a b_k, pues si lo fuera dejaría de ser una orientación circular. Esto es un absurdo porque v era adyacente a w, para todo $w \in V(H)$.

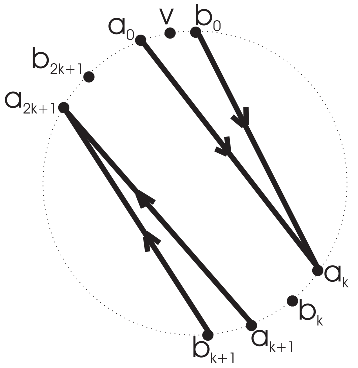

Figura 2.9

2. Sea G un grafo arco-circular propio que contiene a $H = CI(j,k)$ como subgrafo inducido, con $3k < j$. Probaremos que G es un grafo arco-circular Helly. Supongamos que $G \notin HCA$. Entonces, toda representación arco-circular de G no verifica la propiedad de Helly. Sean $v_1, ..., v_t$ un subconjunto minimal de vértices de G cuyos correspondientes arcos no son Helly en una representación dada. Cada v_i puede ó no pertenecer a H. Analizamos dos casos:

- $t = 3$: los arcos A'_1, A'_2 y A'_3 (correspondientes a los vértices v_1, v_2 y v_3) minimalmente no Helly son dibujados en la figura 2.10.

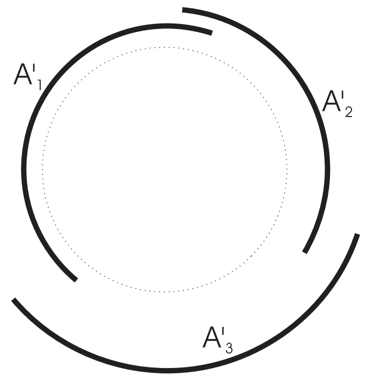

Figura 2.10

Así, v_1, v_2 y v_3 inducen un triángulo y todo vértice de G es adyacente a alguno de ellos 3. Como G es un grafo arco-circular propio conexo, el subgrafo G' inducido por los vértices de H y v_1, v_2 y v_3 también lo es. Usamos una de las 2 orientaciones circulares posibles (figura 2.8) y agregamos a v_1, v_2 y v_3 (si ellos no están en H). Como $j > 3k$ y v_1, v_2 y v_3 forman un triángulo, estos 3 vértices deben estar localizados en la orientación circular entre a_i y a_{i+k}. Suponemos, sin pérdida de generalidad que $i = 0$ (figura 2.11).

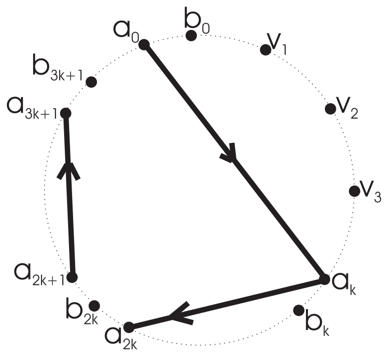

Figura 2.11

Por lo tanto, hay un vértice b_t (b_{2k}, en este caso) que no es adyacente a v_1 ni a v_2 ni a v_3, lo que es un absurdo.

- $t \geq 4$: como esos arcos son minimalmente no Helly, debe haber dos de ellos (A'_1 y A'_2, correspondientes a los vértices v_1 y v_2, respectivamente) que entre ambos cubran toda la circunferencia (figura 2.12), dado que si no los hubiera, los subconjuntos de $t-1$ arcos no podrían verificar la propiedad de Helly (y sabemos que la verifican por causa de la minimalidad). Por lo tanto, todo vértice de G es adyacente a alguno de ellos dos y v_1 es adyacente a v_2. De esta forma, llegamos al mismo absurdo que en el caso anterior. □

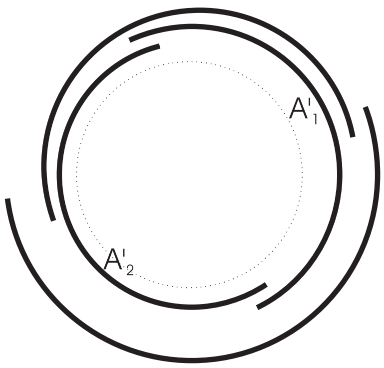

Figura 2.12

Como un corolario directo del Teorema 2.9, tenemos que la región generada por $CHCA$ y PCA es vacía.

Corolario 2.6 *La región definida por $CHCA$ y PCA es vacía.*

Demostración:

Supongamos que esta región no es vacía. Debe existir entonces un grafo G que es arco-circular propio y clique-Helly pero no es arco-circular Helly ni unitario. Pero por el Teorema 2.9, si es propio no unitario y clique-Helly, debe ser arco-circular Helly, lo que es una contradicción. □

2.3.2 Ejemplos minimales

Tenemos definidas 13 regiones al cruzar las subclases de los grafos arco-circulares. Ya hemos probado que una de ellas es vacía: la region generada por $CHCA$ y PCA.

Veamos ahora que podemos encontrar grafos pertenecientes a las otras 12 regiones. Vamos a demostrar que cada uno de los grafos de la figura 2.13 pertenece a la región respectiva y que es un miembro minimal, es decir, cualquier subgrafo inducido de ellos pertenece a otra región.

La minimalidad sólo es probada para los ejemplos de las Proposiciones 2.2, 2.5 y 2.10. En los otros casos, puede ser verificada fácilmente usando argumentos similares.

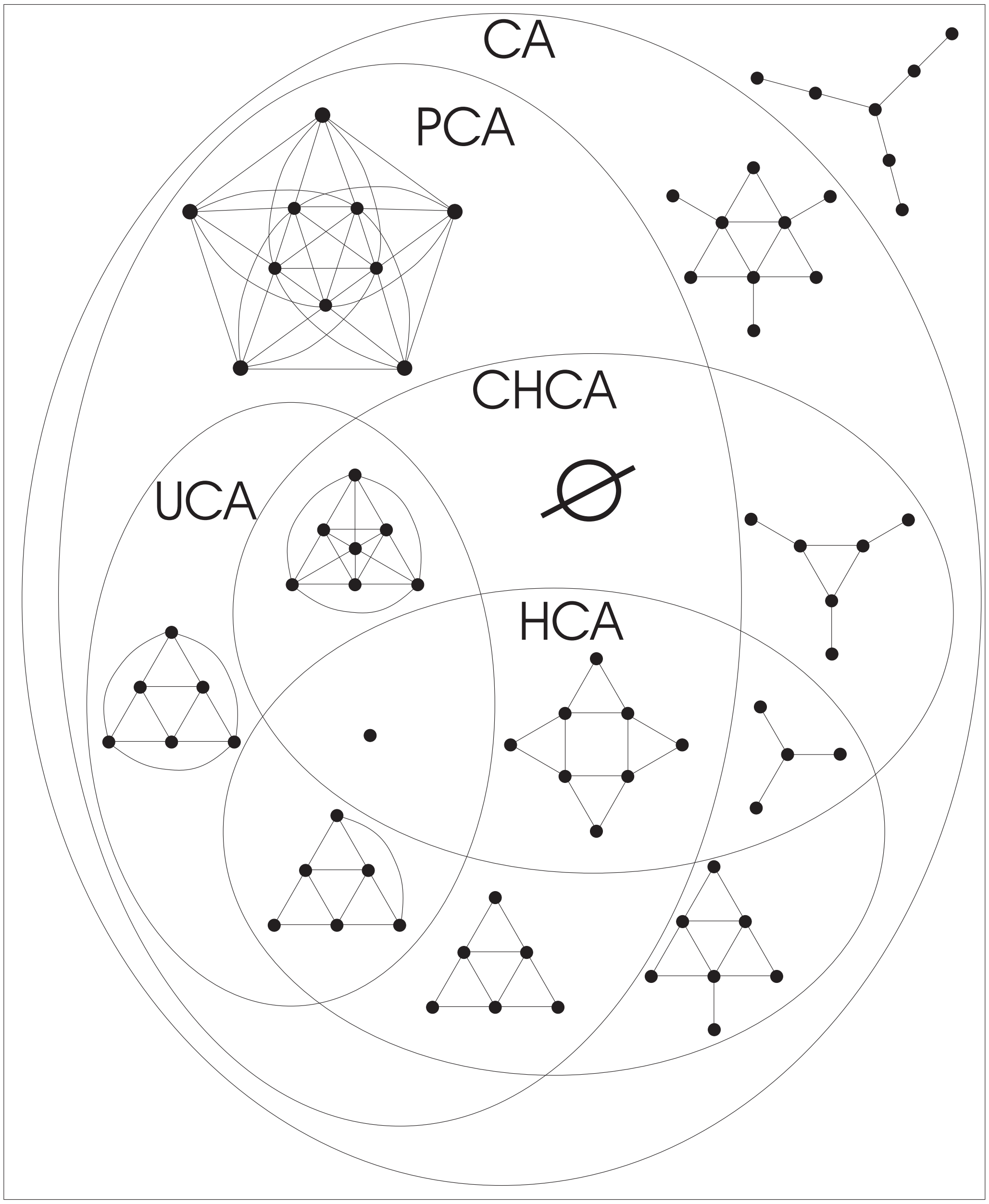

Figura 2.13: Cruce de subclases para grafos arco-circulares

Enunciamos y probamos cada una de las proposiciones que garantizan que los ejemplos de la figura 2.13 pertenecen a la región respectiva.

Proposición 2.1 *El grafo G_4 (figura 2.14) no es arco-circular.*

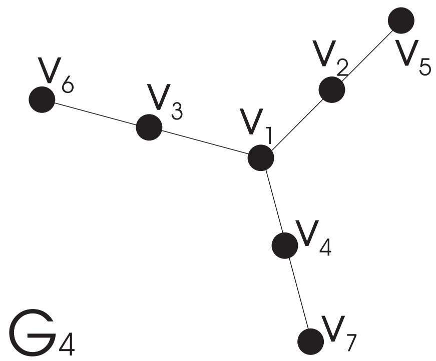

Figura 2.14

Demostración:

Tratemos de encontrar una representación arco-circular de G_4. Primero dibujamos los arcos A_2, A_3 y A_4, correspondientes a los vértices v_2, v_3 y v_4, respectivamente (figura 2.15).

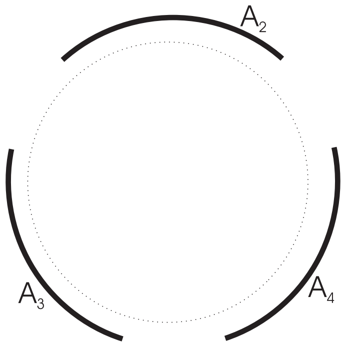

Figura 2.15

Ahora, si el arco A_1 (correspondiente al vértice v_1) es agregado, deberá contener a uno de los 3 arcos de la figura 2.15. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que A_2 está contenido en A_1. De esta manera, A_5, el arco correspondiente a v_5, no puede ser agregado tal que tenga intersección no vacía con A_2 e intersección vacía con A_1. Por lo tanto, no es posible encontrar una representación arco-circular de G_4. $\square$

Proposición 2.2 *El grafo G_5 (figura 2.16) es arco-circular pero no pertenece a ninguna de las subclases aquí definidas.*

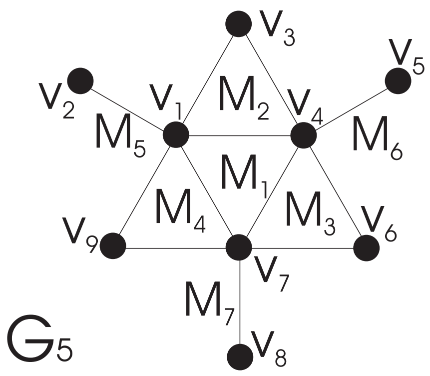

Figura 2.16

Demostración:

1. G_5 es un grafo arco-circular: las hipótesis del Teorema 2.1 son verificadas usando los rótulos de los vértices de la figura 2.16.

2. G_5 no es un grafo arco-circular clique-Helly: la subfamilia de cliques $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ no verifica la propiedad de Helly.

3. G_5 no es un grafo arco-circular Helly: alcanza con probar que G_1 (figura 2.5) no está en HCA, pues G_1 es un subgrafo inducido de G_5 y la propiedad de ser arco-circular Helly es una propiedad hereditaria. Sean $M_1 = \{v_1, v_3, v_5\}, M_2 = \{v_1, v_2\}, M_3 = \{v_3, v_4\}$ y $M_4 = \{v_5, v_6\}$ los cliques de G_1. Entonces A_G, la matriz clique, es la siguiente:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
M_1	1	0	1	0	1	0
M_2	1	1	0	0	0	0
M_3	0	0	1	1	0	0
M_4	0	0	0	0	1	1

   Es fácil verificar que no es posible permutar las filas de A_G para que la matriz tenga forma de $1's$ circulares. Por lo tanto, G_1 no es arco-circular Helly y así, G_5, tampoco.

4. G_5 no es un grafo arco-circular propio: el subgrafo inducido por los vértices v_1, v_2, v_4, v_5, v_7 y v_8 es isomorfo a G_1, uno de los subgrafos prohibidos del Teorema 2.4.

En este caso, es interesante probar la minimalidad de este ejemplo. Si el subgrafo inducido propio de G_5 que elegimos no contiene a v_1, v_3, v_4, v_6, v_7 o v_9, entonces es clique-Helly porque es fácil ver que un grafo no clique-Helly debe contener al menos cuatro cliques de tamaño ≥ 3. En cambio, si el subgrafo inducido que elegimos no contiene a v_2, v_5 o v_8, entonces es arco-circular Helly porque $G_5 - \{v_8\}$ tiene matriz clique con la propiedad de $1's$ circulares. Lo mismo vale para $G_5 - \{v_2\}$ y $G_5 - \{v_5\}$. $\square$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_9
M_1	1	0	0	1	0	0	1	0
M_4	1	0	0	0	0	0	1	1
M_5	1	1	0	0	0	0	0	0
M_2	1	0	1	1	0	0	0	0
M_6	0	0	0	1	1	0	0	0
M_3	0	0	0	1	0	1	1	0

Matriz clique de $G_5 - \{v_8\}$ con la propiedad de $1's$ circulares

Proposición 2.3 *El grafo G_1 (figura 2.5) pertenece a la región definida por CHCA.*

Demostración:

1. G_1 es un grafo arco-circular: las hipótesis del Teorema 2.1 son verificadas usando los rótulos de los vértices de la figura 2.5.

2. G_1 es un grafo arco-circular clique-Helly: tenemos que probar que G_1 es clique-Helly. El único triángulo extendido es el subgrafo de G_1 inducido por los vértices v_1, v_3 y v_5, entonces las hipótesis del Teorema 2.8 son verificadas.

3. G_1 no es un grafo arco-circular propio: trivial, por Teorema 2.4.

4. G_1 no es un grafo arco-circular Helly: resultado probado en la Proposición 2.2. □

Proposición 2.4 *El grafo G_6 (figura 2.17) pertenece a la región definida por HCA.*

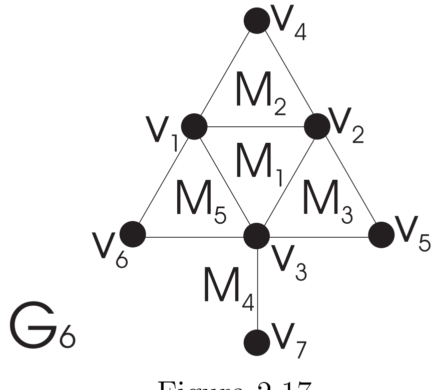

Figura 2.17

Demostración:

1. G_6 es un grafo arco-circular Helly: $M_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, M_2 = \{v_1, v_2, v_4\}$, $M_3 = \{v_2, v_3, v_5\}, M_4 = \{v_3, v_7\}$ y $M_5 = \{v_1, v_3, v_6\}$ son los cliques de G_6. Así, A_G, la matriz clique, es la siguiente, con forma de $1's$ circulares.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
M_1	1	1	1	0	0	0	0
M_2	1	1	0	1	0	0	0
M_3	0	1	1	0	1	0	0
M_4	0	0	1	0	0	0	1
M_5	1	0	1	0	0	1	0

2. G_6 no es un grafo arco-circular propio: el subgrafo inducido por los vŕtices v_3, v_5, v_6 y v_7 es isomorfo a G_2, uno de los subgrafos prohibidos en la caracterización del Teorema 2.4.

3. G_6 no es un grafo arco-circular clique-Helly: la subfamilia de cliques $\{M_1, M_2, M_3, M_5\}$ no verifica la propiedad de Helly. $\square$

Proposición 2.5 *El grafo G_7 (isomorfo a $CI(5,2)$, figura 2.18) pertenece a la región definida por PCA.*

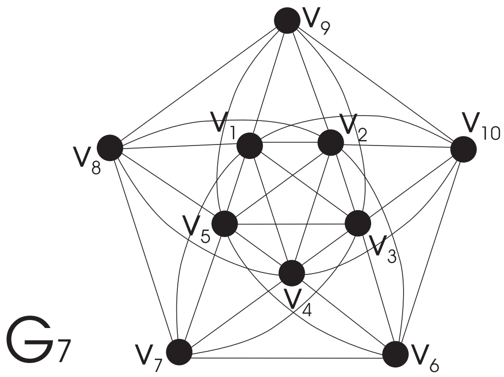

Figura 2.18

Demostración:

1. G_7 es un grafo arco-circular propio pero no unitario: por [88], $CI(5,2) \in PCA \setminus UCA$.

2. G_7 no es un grafo arco-circular clique-Helly: la subfamilia de cliques $M_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $M_2 = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7\}$, $M_3 = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_8\}$, $M_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_9\}$, $M_5 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_{10}\}$ no verifica la propiedad de Helly.

3. G_7 no es un grafo arco-circular Helly: supongamos que sí. Para dibujar una representación arco-circular del ciclo inducido C formado por los vértices v_6, v_7, v_8, v_9 y v_{10} necesitamos cubrir toda la circunferencia (figura 2.19). Además, los arcos que representan a los vértices de cada clique deben tener una intersección común pues estamos suponiendo que el grafo es arco-circular Helly. Ambas afirmaciones implican que cada clique contiene al menos un vértice de C. Absurdo, por la existencia del clique K_5, inducido por el conjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

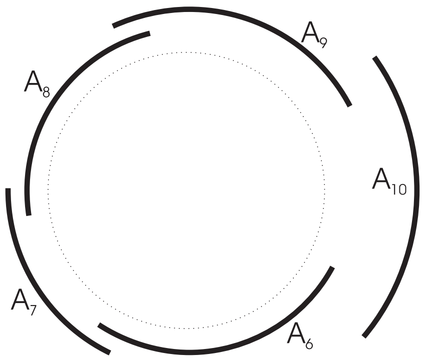

Figura 2.19

Para verificar la minimalidad, probamos que cualquier subgrafo inducido propio H de G_7 es arco-circular unitario. Para ello usamos el Teorema 2.5: mostramos que H no contiene a $CI(j,k)$ como subgrafo inducido, donde j y k son coprimos con $j > 2k$. Es suficiente probar este hecho para $CI(4,1)$ y $CI(3,1)$ pues son los únicos grafos de esta familia con a lo sumo 9 vértices. Pero H tiene conjunto independiente máximo de tamaño a lo sumo 2 y estos dos grafos tienen conjunto independiente máximo de tamaño 3 y 4, respectivamente. Queda así probado que cualquier subgrafo inducido propio H de G_7 es arco-circular unitario. □

Proposición 2.6 *El grafo G_2 (figura 2.5) pertenece a la región definida por $CHCA$ y HCA.*

Demostración:

1. G_2 es un grafo arco-circular: las hipótesis del Teorema 2.1 son verificadas usando los rótulos de los vértices de la figura 2.5.

2. G_2 es un grafo arco-circular clique-Helly: tenemos que probar que G_2 es clique-Helly. No hay triángulos extendidos en G_2, por lo que las hipótesis del Teorema 2.8 son verificadas.

3. G_2 es un grafo arco-circular Helly: sean $M_1 = \{v_1, v_2\}, M_2 = \{v_2, v_3\}$ y $M_3 = \{v_2, v_4\}$ los cliques de G_2. Entonces, A_G, la matriz clique, es la siguiente, la cual tiene forma de $1's$ circulares:

	v_1	v_2	v_3	v_4
M_1	1	1	0	0
M_2	0	1	1	0
M_3	0	1	0	1

4. G_2 no es un grafo arco-circular propio: trivial, por el Teorema 2.4. □

Proposición 2.7 *El grafo G_8 (isomorfo a $CI(3,1)$, figura 2.20) pertenece a la región definida por HCA y PCA.*

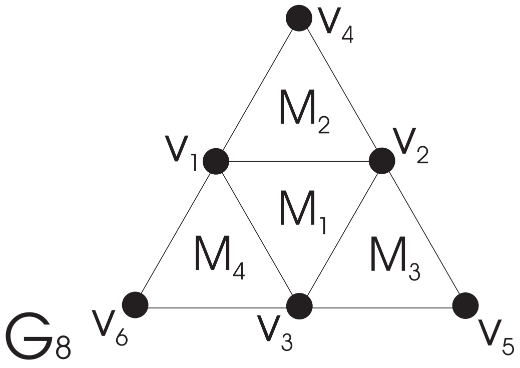

Figura 2.20

Demostración:

1. G_8 es un grafo arco-circular propio pero no unitario: por [88], $CI(3,1) \in PCA \setminus UCA$.

2. G_8 es un grafo arco-circular Helly: $M_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $M_2 = \{v_1, v_2, v_4\}$, $M_3 = \{v_2, v_3, v_5\}$ y $M_4 = \{v_1, v_3, v_6\}$ son los cliques de G_8. Entonces, A_G, la matriz clique, es la siguiente, la cual tiene forma de $1's$ circulares:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
M_1	1	1	1	0	0	0
M_2	1	1	0	1	0	0
M_3	0	1	1	0	1	0
M_4	1	0	1	0	0	1

3. G_8 no es un grafo arco-circular clique-Helly: este grafo es el más pequeño (en número de vértices) no clique-Helly [42]. □

Proposición 2.8 *El grafo G_9 (figura 2.21) pertenece a la región definida por PCA y UCA.*

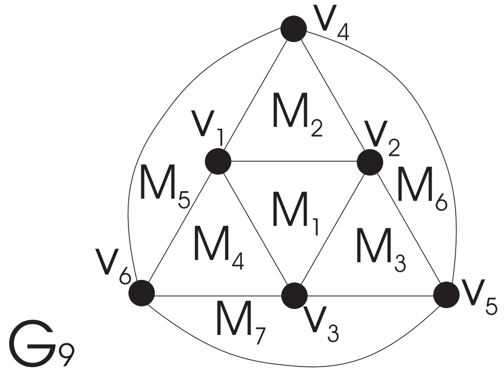

Figura 2.21

Demostración:

1. G_9 es un grafo arco-circular unitario: sea $r = 1$ el radio de la circunferencia y $l = (3/4)\pi$ la longitud común de cada arco correspondiente a cada vértice del grafo. La figura 2.22 muestra una representación arco-circular unitaria de G_9.

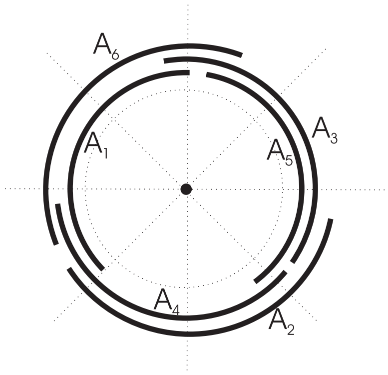

Figura 2.22

2. G_9 no es un grafo arco-circular Helly: supongamos que sí. Como v_1, v_2, v_5 y v_6 inducen un ciclo C_4, los arcos respectivos en la representación arco-circular deben estar dibujados como en la figura 2.23. Además, el vértice v_3 es adyacente a todos ellos. Así, en cualquier representación Helly, A_3 (el arco correspondiente a v_3) debe intersectar a $A_1 \cap A_2, A_2 \cap A_5, A_5 \cap A_6$ y $A_6 \cap A_1$. Este hecho asegura que A_3 contiene al menos a uno de estos arcos. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que A_3 contiene a A_5 (figura 2.23). No es posible entonces que A_4 (el arco correspondiente a v_4) sea agregado a la representación arco-circular Helly de manera que tenga intersección no vacía con A_5 e intersección vacía con A_3.

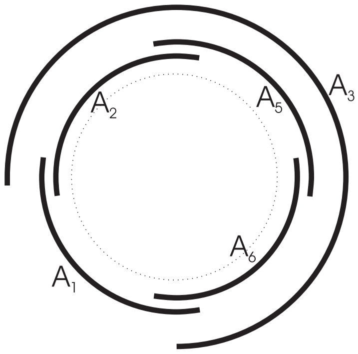

Figura 2.23

3. G_9 no es un grafo arco-circular clique-Helly: la subfamilia de cliques $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ no verifica la propiedad de Helly. □

Proposición 2.9 *El grafo G_3 (isomorfo a $CI(4,1)$, ver figura 2.6) pertenece a la región definida por $CHCA, HCA$ y PCA.*

Demostración:

1. G_3 es un grafo arco-circular propio pero no unitario: por [88], $CI(4,1) \in PCA \setminus UCA$.

2. G_3 es un grafo arco-circular Helly: sean M_1, M_2, M_3 y M_4 los cliques de G_3 tal cual se definen en la figura 2.6. Entonces, A_G, la matriz clique, es la siguiente, la cual tiene forma de $1's$ circulares:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
M_1	1	1	0	0	1	0	0	0
M_2	0	1	1	0	0	1	0	0
M_3	0	0	1	1	0	0	1	0
M_4	1	0	0	1	0	0	0	1

3. G_3 es un grafo arco-circular clique-Helly: veamos que G_3 es clique-Helly. $M_1 = \{v_1, v_2, v_5\}, M_2 = \{v_2, v_3, v_6\}, M_3 = \{v_3, v_4, v_7\}$ y $M_4 = \{v_1, v_4, v_8\}$ son los triángulos extendidos de G_3 y todos tienen vértices universales, por lo que las hipótesis del Teorema 2.8 son verificadas. □

Proposición 2.10 *El grafo G_{10} (figura 2.24) pertenece a la región definida por $CHCA, PCA$ y UCA.*

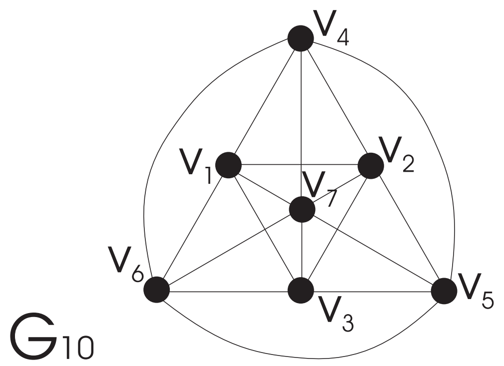

Figura 2.24

Demostración:

1. G_{10} es un grafo arco-circular unitario: sea $r = 1$ el radio de la circunferencia y $l = (3/4)\pi$ la longitud común de cada arco, correspondiente a cada vértice del grafo. La figura 2.25 muestra una representación arco-circular unitaria de G_{10}.

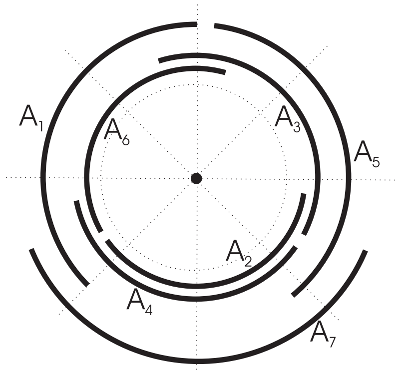

Figura 2.25

2. G_{10} es un grafo arco-circular clique-Helly: G_{10} contiene un vértice universal (v_7). Por lo tanto, podemos afirmar que es clique-Helly, cualquier clique tiene que contener a v_7.

3. G_{10} no es un grafo arco-circular Helly: probamos en la Proposición 2.8 que G_9 no es un grafo HCA. Como G_9 es un subgrafo inducido de G_{10} y la propiedad de estar en HCA es hereditaria, entonces G_{10} tampoco puede ser arco-circular Helly (el mismo argumento que usamos en la Proposición 2.2).

Analicemos la minimalidad de G_{10}. Si un subgrafo inducido propio H de G_{10} no contiene a v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 o v_6, una matriz clique con la propiedad de los $1's$ circulares puede ser fácilmente encontrada, por lo que H está en HCA. Por otro lado, el único subgrafo inducido propio que contiene a estos 6 vértices es G_9, que pertenece a otra región (Proposición 2.8). □

Proposición 2.11 *El grafo G_{11} (figura 2.26) pertenece a la región definida por HCA, PCA y UCA.*

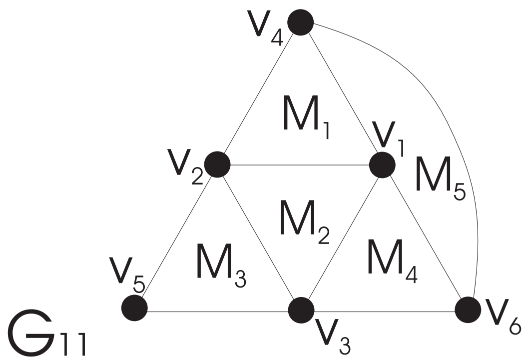

Figura 2.26

Demostración:

1. G_{11} es un grafo arco-circular Helly: sean $M_1 = \{v_1, v_2, v_4\}, M_2 = \{v_1, v_2, v_3\}, M_3 = \{v_2, v_3, v_5\}, M_4 = \{v_1, v_3, v_6\}$ y $M_5 = \{v_1, v_4, v_6\}$, los cliques de G_{11}. Así, A_G, la matriz clique, es la siguiente, la cual tiene forma de $1's$ circulares.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
M_1	1	1	0	1	0	0
M_2	1	1	1	0	0	0
M_3	0	1	1	0	1	0
M_4	1	0	1	0	0	1
M_5	1	0	0	1	0	1

2. G_{11} es un grafo arco-circular unitario: sea $r = 1$ el radio de la circunferencia y $l = (3/4)\pi$ la longitud común de cada arco, correspondiente a cada vértice del grafo. La figura 2.27 muestra una representación arco-circular unitaria de G_{11}.

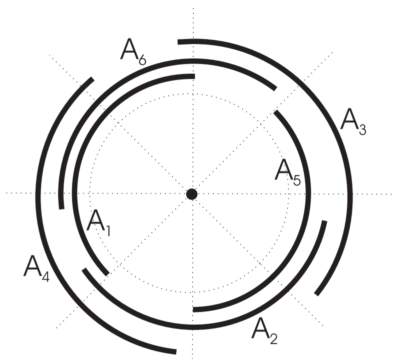

Figura 2.27

3. G_{11} no es un grafo arco-circular clique-Helly: nuevamente, la subfamilia de cliques $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ no verifica la propiedad de Helly. □

Proposición 2.12 *El grafo G_{12} (figura 2.28) pertenece a la región definida por las cuatro subclases.*

Figura 2.28

Demostración: trivial. □

Capítulo 3

Grafos circulares

Un grafo G es circular si existe un conjunto de cuerdas L (que llamamos modelo) dentro de un círculo y una correspondencia 1-1 entre vértices de G y cuerdas de L de manera que dos vértices distintos son adyacentes si y sólo sí las cuerdas correspondientes se intersecan. Es decir, un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que ningún par de cuerdas tiene un extremo común. La figura 3.1 muestra un grafo circular G y un modelo L para él.

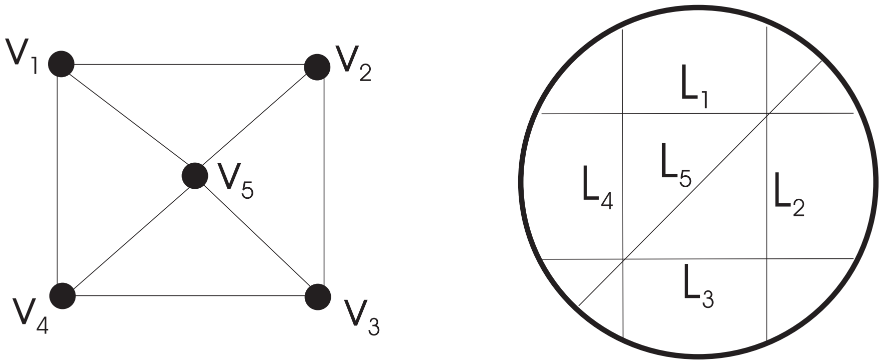

Figura 3.1: Ejemplo de grafo circular y su modelo de cuerdas.

Esta clase de grafos fue introducida en [27], donde se muestra una aplicación para resolver un problema de reordenamiento de vagones de un tren propuesto por Knuth [59], usando pilas y colas. Se pueden encontrar algoritmos de tiempo polinomial para reconocer grafos en esta clase en ([15], [29], [65], [75]). Los problemas de clique máximo y conjunto independiente máximo en grafos circulares pueden ser resueltos en tiempo polinomial ([32],[48], [63], [72]), pero el problema de coloreo se mantiene NP-Hard [31].

Los grafos circulares son equivalentes a los grafos overlap de intervalos (conocidos en la literatura como grafos overlap). Un grafo G es overlap de intervalos si sus vértices pueden ser puestos en correspondencia 1-1 con una familia de intervalos en una recta de manera que dos vértices son adyacentes en G si y sólo sí sus correspondientes intervalos se superponen (tienen intersección no vacía pero ninguno está propiamente contenido en el otro). La prueba de la equivalencia entre ambas clases puede encontrarse en [32].

Otra clase equivalente a los grafos circulares es la clase de los grafos de alternancia. Consideremos una palabra p tal que cada letra que se encuentra en p está exactamente dos veces. Una alternancia de p es un par vw de letras distintas tal que encontramos alternativamente $...v...w...v...w...$ cuando leemos p. El grafo de alternancia $A(p)$ es el grafo cuyos vértices son las letras de p y cuyas aristas son las alternancias de p. Los grafos de alternancia fueron usados [14] para encontrar una solución algorítmica para un problema de curvas del plano que se auto-intersectan formulado por Gauss. Claramente, los grafos de alternancia también son equivalentes a los circulares.

3.1 Un ejemplo de aplicación

Sea $\pi = [\pi_1, ..., \pi_n]$ una permutación de los números $\{1, ..., n\}$. Supongamos que tenemos los elementos $\pi_1, ..., \pi_n$ en una cola de entrada A y queremos transferirlos a una cola de salida B en su orden natural, usando un sistema de pilas tal como se muestra en la figura 3.2.

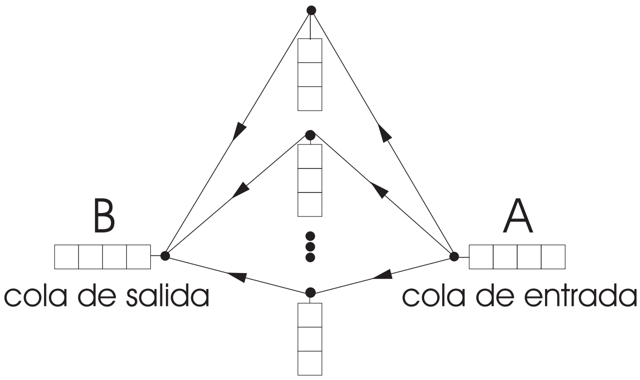

Figura 3.2

Se permiten dos tipos de movimientos:

- Mover el número de la cabeza de la cola de entrada al tope de una de las pilas.
- Mover un número del tope de una pila al final de la cola de salida.

Queremos saber cuál es la menor cantidad de pilas s que hace falta para ordenar los elementos. Para ello, convertimos este problema de ordenamiento en un problema de coloreo de grafos.

Sea $H[\pi]$ el grafo con vértices $\{1, ..., n\}$ y los vértices j y k son adyacentes si y sólo sí existe un i tal que $i < j < k$ y $\pi_j^{-1} < \pi_k^{-1} < \pi_i^{-1}$, donde π_j^{-1} es la posición de j en π.

Por ejemplo, $H[3, 5, 4, 1, 6, 2]$ es el grafo de la figura 3.3.

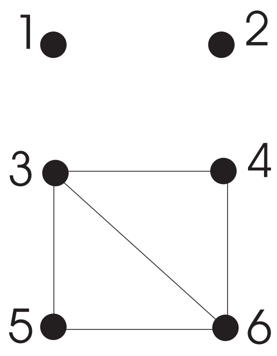

Figura 3.3

Even e Itai [27] probaron dos interesantes resultados: s es el menor número de pilas que hace falta para ordenar los elementos si y sólo sí el número cromático de $H[\pi]$ es s y la clase de grafos $H[\pi]$, para alguna permutación π, es "casi" equivalente a la clase de los grafos circulares. Esto último se deduce del siguiente teorema.

Teorema 3.1 ([27]) *Un grafo G es circular si y sólo sí G - {vértices aislados} es isomorfo a $H[\pi]$ - {vértices aislados}, para alguna permutación π.*

Nota: La extracción de vértices aislados es necesaria. K_2 es un grafo circular pero cualquier grafo $H[\pi]$ con una arista tiene al menos 3 vértices. De todos modos, problemas algorítmicos como coloreo, clique máximo o conjunto independiente máximo no ven afectada su complejidad al retirar o agregar vértices aislados.

Esta técnica puede ser aplicada para resolver el problema ya mencionado de reordenamiento de vagones de un tren propuesto por Knuth en [59]. Las colas representan los ordenamientos inicial y final de los vagones, y la cantidad de pilas representa el número de vías auxiliares necesarias para la operación de reordenamiento.

También fue probado en [59] que si exigimos que la cola de entrada esté vacía para empezar a vaciar las pilas, o si reemplazamos pilas por colas, el problema se transforma en colorear un grafo de permutación (en vez de un grafo circular).

3.2 Generalidades

Es interesante analizar la relación que existe entre los grafos circulares y los grafos arco-circulares. Los siguientes grafos nos muestran que dichas clases no son comparables. El grafo de la figura 3.4 no es arco-circular pero sí es circular.

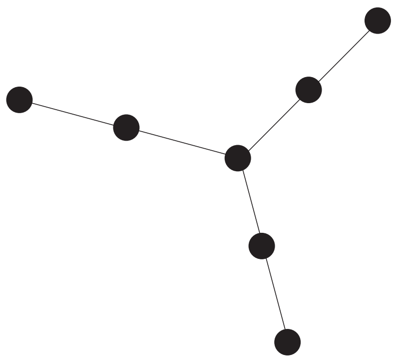

Figura 3.4: Grafo en $C \setminus CA$.

Mientras tanto, el grafo de la figura 3.5 es arco-circular pero no es circular (lo mismo ocurre con toda rueda W_j, si $j \geq 5$).

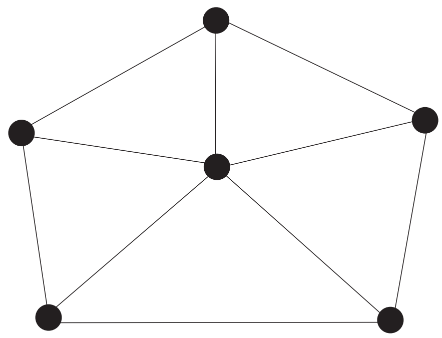

Figura 3.5: Grafo en $CA \setminus C$.

Grafos completos, ciclos inducidos, grafos arco-circular propios son algunas familias o clases de grafos que pertenecen a la intersección de ambas clases.

Podemos definir también aquí diferentes subclases de los grafos circulares:

1. Helly: un grafo G es circular Helly (HC) si existe un modelo L de cuerdas para G de manera que el conjunto de cuerdas satisfaga la propiedad de Helly. No se conoce la complejidad de reconocer un grafo en esta subclase aunque en este mismo trabajo conjeturamos una caracterización que conduce a un reconocimiento polinomial.

2. Clique-Helly: un grafo G es circular clique-Helly (CHC) si G es circular y clique-Helly. El algoritmo polinomial para reconocimiento de grafos clique-Helly [83] sumado a un buen algoritmo para reconocer grafos circulares ([15], [29], [65], [75]), nos da un algoritmo eficiente para esta subclase.

3. Unitarios: un grafo G es circular unitario (UC) si existe un modelo L de cuerdas para G de manera que todas las cuerdas tengan la misma longitud. Veremos luego que esta subclase es equivalente a la de los grafos arco-circular unitarios. Recordemos que esta clase ha sido caracterizada por medio de subgrafos prohibidos [88], caracterización que conduce a un algoritmo polinomial para el reconocimiento [76].

4. Arco-circular propios: podemos probar fácilmente que la representación en arcos de un grafo PCA puede ser transformada en el modelo de cuerdas de un grafo circular. Sólo debemos usar un teorema probado en [35] que dice que todo grafo PCA tiene una representación arco-circular propia donde no hay dos arcos que cubran todo el círculo. Hecha esta observación, el punto inicial y final de cada arco en una representación PCA pasa a ser el punto inicial y final de cada cuerda, con lo que obtenemos un modelo circular.

Probamos en esta tesis algunas propiedades de estas subclases:

Teorema 3.2 *Sea G un grafo circular Helly, entonces G es circular y no contiene como subgrafo inducido ningún diamante.*

Demostración:

Sea G un grafo circular Helly y supongamos que contiene un diamante (figura 3.6) como subgrafo inducido.

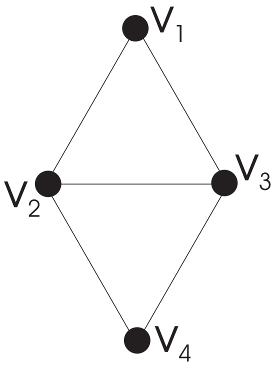

Figura 3.6: Un diamante

Como tenemos un modelo de cuerdas para G que verifica la propiedad de Helly, L_1, L_2 y L_3, las cuerdas correspondientes a v_1, v_2 y v_3, respectivamente, deben tener un punto en común (figura 3.7).

Para que valga la propiedad de Helly, L_4, la cuerda correspondiente a v_4, no puede intersectar a L_2 y L_3 sin intersectar a L_1, lo que nos lleva a una contradicción. □

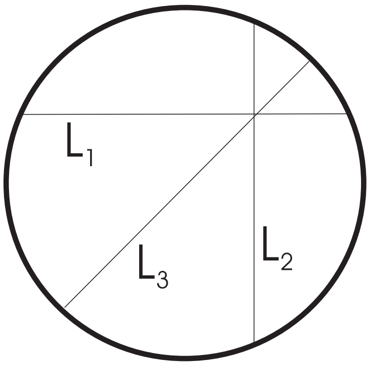

Figura 3.7

Conjeturamos que esta condición también es suficiente para que un grafo sea circular Helly.

Conjetura 3.1 *Sea G un grafo circular sin diamantes. Entonces G es circular Helly.*

Observación: Es importante destacar que si la Conjetura 3.1 fuera correcta, tendríamos un reconocimiento polinomial de esta subclase ya que hay formas eficientes de saber si un grafo dado contiene un diamante como subgrafo inducido (analizando, por ejemplo, todos los subgrafos inducidos de 4 nodos).

Veamos ahora que la subclase de los grafos circular Helly está incluida en la subclase de los circular clique-Helly.

Teorema 3.3 *Sea G un grafo circular Helly, entonces G es circular clique-Helly.*

Demostración:

Probamos en el teorema anterior que si G es circular Helly, entonces no contiene ningún diamante como subgrafo inducido. tenemos que ver ahora que G es clique-Helly. Supongamos que no, sean $M_1, M_2, \ldots, M_t$ un conjunto de cliques de G minimalmente no Helly, claramente $t \geq 3$. La minimalidad nos garantiza que existen t vértices distintos $v_1, v_2, \ldots, v_t$ tal que $v_j \in \cap_{i \neq j} M_i$ y $v_j \notin M_j$. Así, los vértices v_1, v_2 y v_3 inducen un K_3 que no está contenido en ningún M_i. Como M_1 es subgrafo completo maximal, debe existir un vértice v_4 en él, adyacente a v_2 y v_3 y no adyacente a v_1. Pero entonces, v_1, v_2, v_3 y v_4 inducen un diamante, absurdo. $\square$

Por último, vamos a probar la equivalencia entre grafos circular unitarios y grafos arco-circular unitarios.

Teorema 3.4 *Un grafo G es circular unitario si y sólo sí G es arco-circular unitario.*

Demostración:

Sea G un grafo circular unitario y tomemos el modelo L de G de cuerdas de igual longitud, en un círculo de radio $r = 1$. Transformamos cada cuerda de L en un arco alrededor del círculo utilizando los mismos puntos inicial y final, y trazando el arco de longitud $\leq \pi$ que queda definido. Claramente, el grafo arco-circular que construimos es unitario e isomorfo a G.

Recíprocamente, sea G un grafo arco-circular unitario. Tenemos una representación de G en arcos de igual longitud alrededor del círculo. Si asumimos nuevamente que $r = 1$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la longitud común de cada arco es $\leq \pi$ (si no lo fuera, el grafo G es completo y podemos encontarle una representación unitaria que verifique lo pedido). Transformamos entonces cada arco en una cuerda dentro del círculo utilizando los mismos puntos inicial y final. El grafo circular que así se construye es unitario e isomorfo a G. $\square$

Un corolario directo de este teorema, y del hecho de que $UCA \subseteq PCA$, es el siguiente.

Corolario 3.1 *Sea G un grafo circular unitario. Entonces, G es arco-circular propio.*

3.3 Estructuras prohibidas minimales

No se conoce una caracterización para grafos circulares por medio de estructuras prohibidas. Bouchet [16] formuló una caracterización que puede aportar en este sentido, utilizando la definición ya dada aquí de grafos localmente equivalentes.

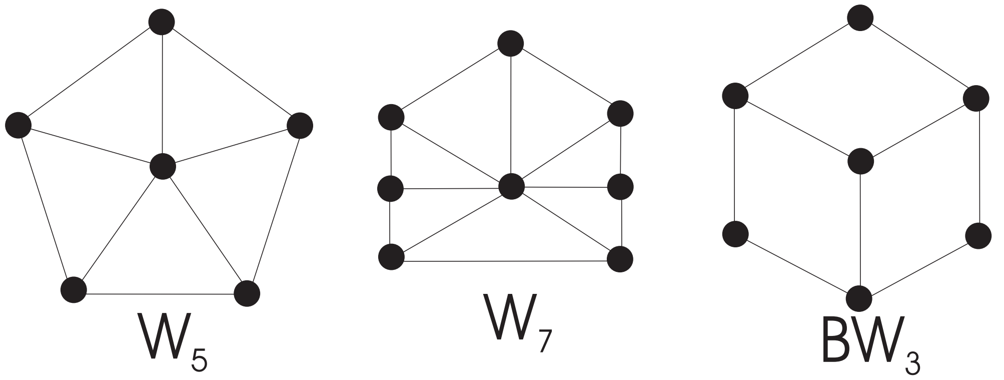

Figura 3.8: Grafos de Bouchet (W_5, W_7, BW_3)

Teorema 3.5 ([16]) *Un grafo G es circular si y sólo sí ningún grafo localmente equivalente a G tiene como subgrafo inducido a alguno de los grafos de la figura 3.8.*

Una forma de probar que un grafo no es circular surge del siguiente corolario del Teorema 3.5.

Corolario 3.2 *Sea H un grafo no circular. Si el grafo G es localmente equivalente a H, entonces G tampoco es circular.*

Demostración:

Sabemos que G es localmente equivalente a H. Como H no es circular, por el Teorema 3.5 H es localmente equivalente a H', un grafo que contiene como subgrafo inducido a alguno de los grafos prohibidos de Bouchet. Así, por la transitividad de la equivalencia local, G es localmente equivalente a H', lo que muestra que no es circular. □

Buscamos estructuras prohibidas minimales para los grafos circulares usando este Teorema de Bouchet y la caracterización que vimos en el Teorema 2.2 para grafos arco-circular propios por subgrafos prohibidos (recordemos que los grafos PCA constituyen una subclase de los grafos circulares).

Analizaremos primero cuáles de los subgrafos prohibidos del Teorema 2.2 son circulares y cuáles no.

Lema 3.1 *Los grafos $\overline{H_1}, \overline{H_3}, \overline{H_4}, H_1^*$, $\overline{C_3^*}$ y $\{C_n^*\}_{n\geq 4}$ son circulares.*

Demostración:

Es sencillo encontrar modelos circulares para todos ellos. Veámoslo sólo para $\overline{H_3}$.

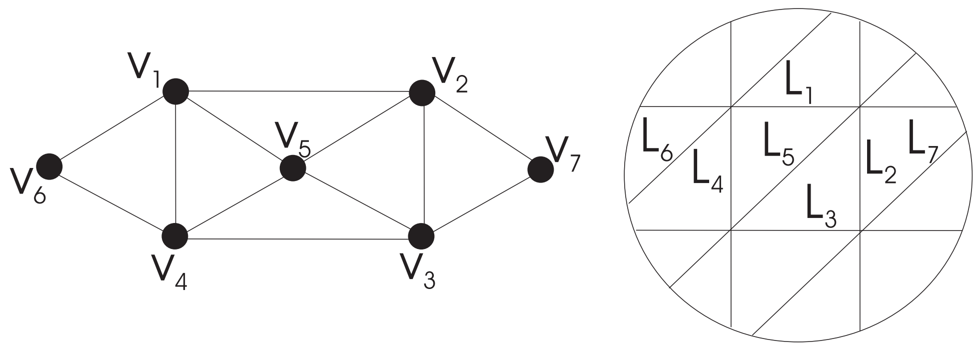

Figura 3.9: Grafo $\overline{H_3}$ y su modelo circular.

Lema 3.2 *Los grafos $\overline{H_2}, \overline{H_5}$, $\{\overline{C_{2j}}\}_{j\geq 3}$ y $\{\overline{C_{2j+1}^*}\}_{j\geq 2}$ no son circulares.*

Demostración:

- $\overline{H_2}$ (figura 3.10) no es un grafo circular. Aplicamos complementación local primero sobre v_4 y luego sobre v_1, y obtenemos BW_3.

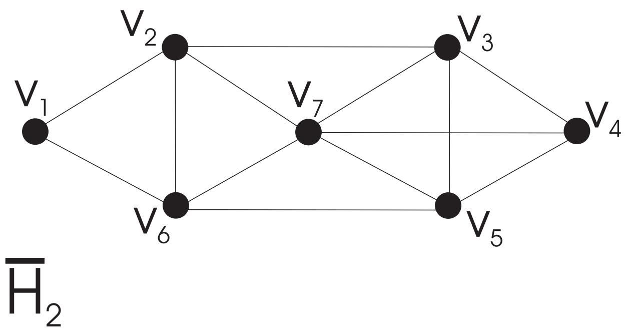

Figura 3.10

- $\overline{H_5}$ (figura 3.11) no es un grafo circular. Si usamos los rótulos de los vértices de la figura 3.11 y aplicamos la operación de complementación local primero sobre v_5 y luego sucesivamente sobre v_3 y v_7, obtenemos nuevamente BW_3.

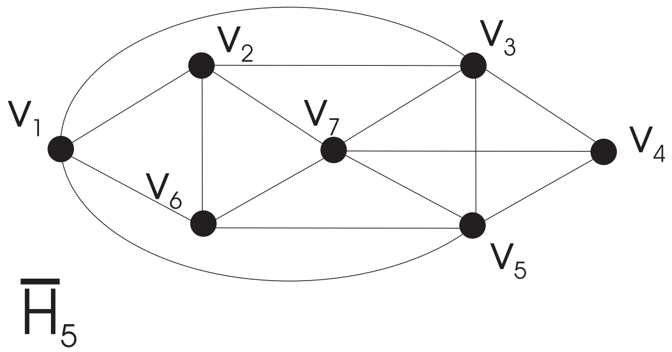

Figura 3.11

- Los grafos de la familia $\{\overline{C^*_{2j+1}}\}_{j\geq 2}$ no son circulares. Si aplicamos la operación de complementación local sobre el vértice universal obtenemos la rueda W_{2j+1} y ya sabemos que estos grafos no son circulares.

- $\overline{C_6}$ no es un grafo circular. Si aplicamos la operación de complementación local sobre cualquier vértice obtenemos W_5.

- Los grafos de la familia $\{\overline{C_{2j}}\}_{j\geq 4}$ no son circulares. Fijemos un entero $j \geq 4$ y sean $v_1, v_2, \ldots, v_{2j-1}, v_{2j}$ los vértices del ciclo inducido C_{2j}. Si aplicamos la operación de complementación local sobre v_1 para $\overline{C_{2j}}$, obtenemos un nuevo grafo que llamamos H_{2j} (figura 3.12).

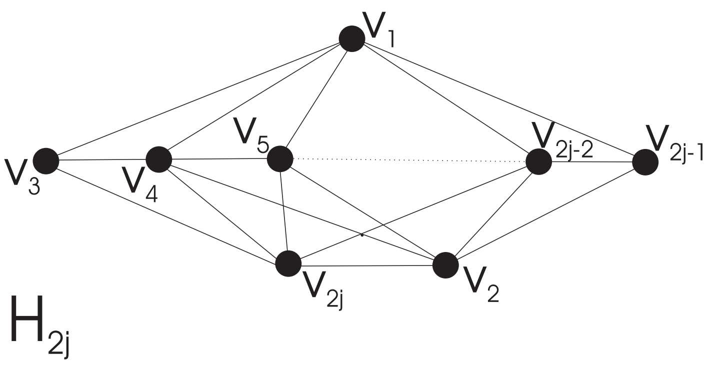

Figura 3.12

Por el Corolario 3.2, alcanza con probar que estos grafos no son circulares. Lo vemos para $j = 4$ (sale de la demostración que la misma idea se generaliza para cualquier j). Sea H_8 el grafo de la figura 3.13.

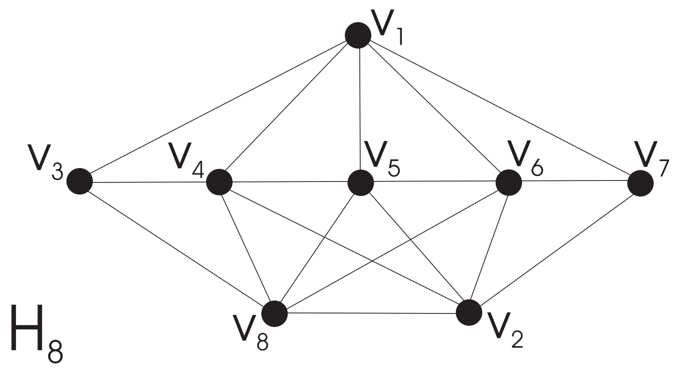

Figura 3.13

Buscamos un modelo circular para este grafo. Dibujamos las cuerdas L_4, L_5 y L_6 correspondientes a v_4, v_5 y v_6. Esto puede hacerse de manera única (salvo simetrías). Quedan luego, dos formas diferentes de agregar L_1, la cuerda correspondiente al vértice v_1 (figura 3.14).

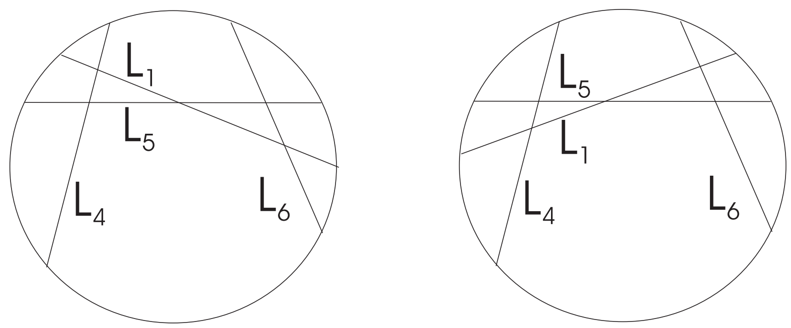

Figura 3.14

Como estas dos formas son esencialmente simétricas, sin pérdida de generalidad podemos trabajar con sólo una de ellas, por ejemplo la primera. La manera de agregar ahora las cuerdas correspondientes a v_3 y v_7 es única (figura 3.15). Para $j \geq 5$, estos dos vértices aún no son los extremos del camino inducido (sí lo son para $j = 4$). Pero el agregado de las cuerdas correspondientes a los vértices que completan el camino inducido puede hacerse de manera única y eso nos conduce a la misma contradicción a la que arribamos en el caso $j = 4$.

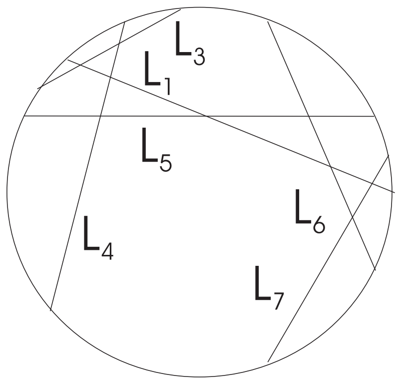

Figura 3.15

Veamos la contradicción para este caso. Faltan incorporar las cuerdas correspondientes a v_2 y v_8. En la figura 3.16 observamos las zonas Z_{I2} y Z_{F2} y Z_{I8} y Z_{F8}, donde deben empezar y terminar las cuerdas correspondientes a v_2 y v_8, respectivamente, para respetar las adyacencias con el resto del grafo. Claramente, estas dos cuerdas no pueden intersectarse por lo que no existe un modelo circular para este grafo.□

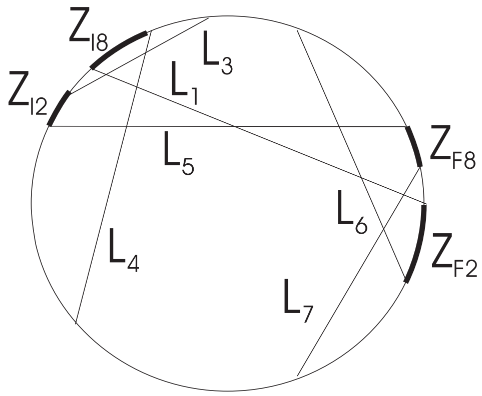

Figura 3.16

La minimalidad de las estructuras prohibidas para grafos circulares del Lema 3.2 está garantizada por su minimalidad para grafos PCA [88].

Como una consecuencia directa del Teorema 2.2, los Lemas 3.1 y 3.2 y el hecho de que PCA es una subclase de los grafos circulares, tenemos:

Teorema 3.6 *Dada H una estructura prohibida minimal para grafos circulares, H contiene en forma propia a alguno de los grafos del Lema 3.1 ó H es alguno de los grafos del Lema 3.2.*

3.4 Intersecciones entre las subclases

Analizaremos la existencia de grafos que pertenezcan a exactamente k de las 4 subclases de los grafos circulares definidas ($k = 0, 1, 2, 3, 4$).

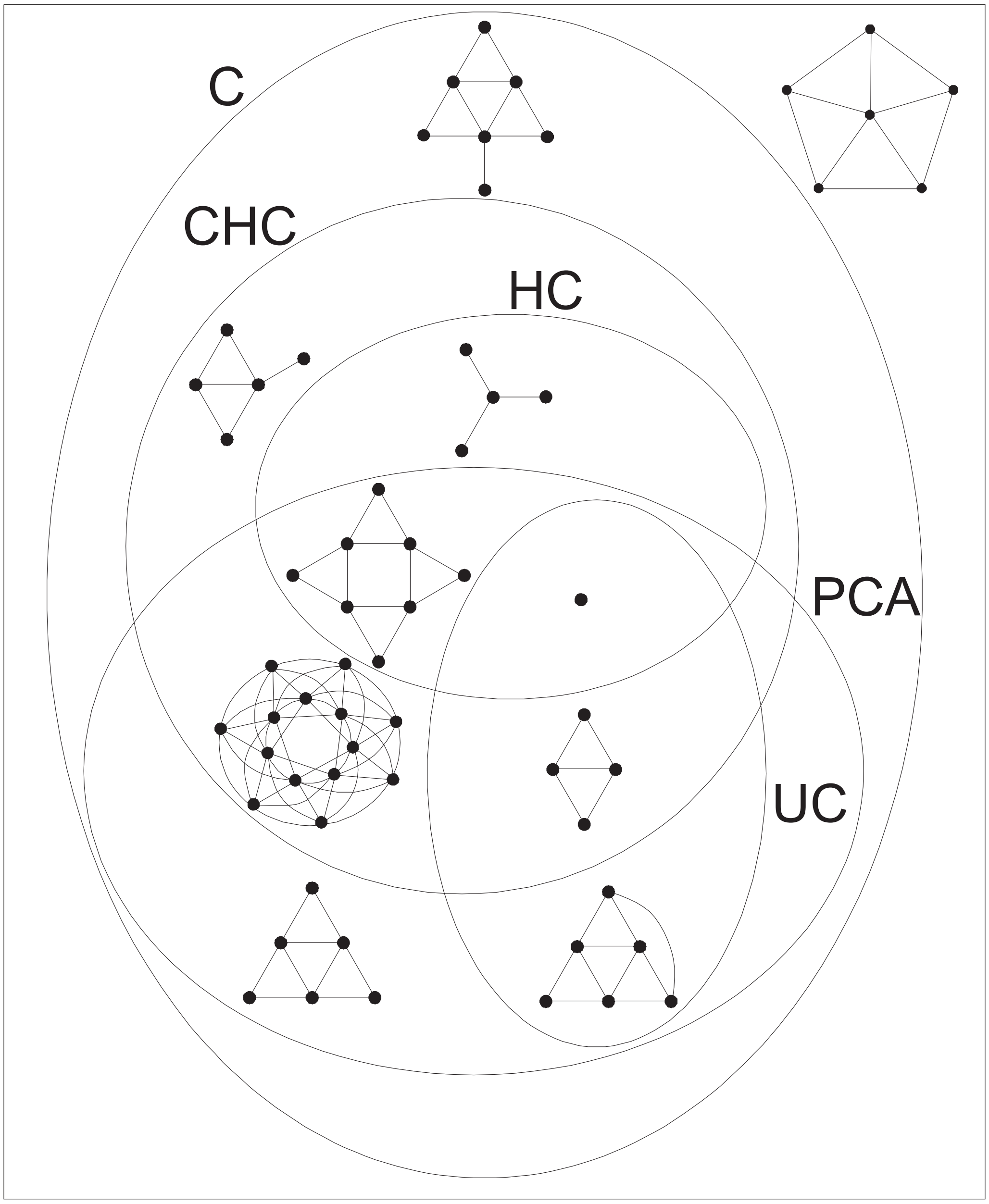

Figura 3.17: Cruce de subclases para grafos circulares

Nuevamente, la región R es definida como cualquier combinación de las 4 subclases. R es vacía si no hay grafos que pertenezcan a las k subclases que definen la región y no pertenezcan a las otras $4-k$ subclases.

Si $k = 0$ quedan definidas 2 regiones: una dentro y otra fuera de los grafos circulares. Las relaciones de inclusión de la sección 3.2 nos llevan a la existencia de 10 regiones. Mostraremos la existencia de miembros minimales en cada una de ellas (ver figura 3.17). La minimalidad de los ejemplos implica que cualquier subgrafo inducido propio de ellos pertenece a otra región.

3.4.1 Ejemplos minimales

Vamos a demostrar ahora que cada uno de los grafos de la figura 3.17 pertenece a la región respectiva y verificaremos la minimalidad.

Enunciamos y probamos las proposiciones correspondientes a cada una de las 10 regiones.

Proposición 3.1 *El grafo G_{13} (figura 3.18) no es circular.*

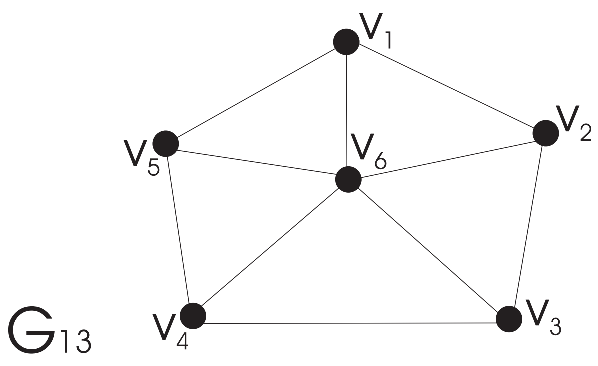

Figura 3.18

Demostración: trivial, por Teorema 3.5.

Proposición 3.2 *El grafo G_{14} (figura 3.19) es circular pero no pertenece a ninguna de las subclases aquí definidas.*

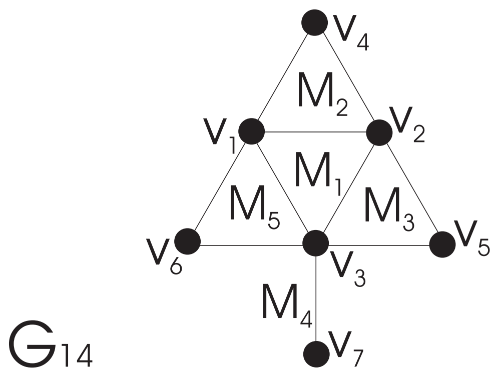

Figura 3.19

Demostración:

1. G_{14} es un grafo circular: la figura 3.20 muestra un modelo de cuerdas L para G_{14}.

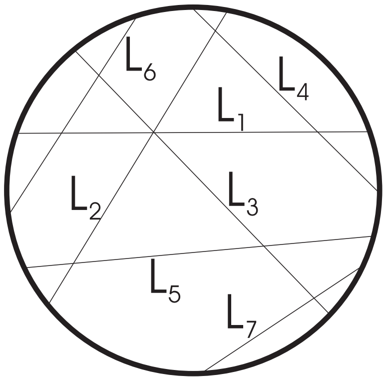

Figura 3.20

2. G_{14} no es un grafo circular clique-Helly: $\{M_1, M_2, M_3, M_5\}$, subfamilia de cliques del grafo, no verifica la propiedad de Helly.

3. G_{14} no es un grafo arco-circular propio: el subgrafo inducido por los vértices v_3, v_5, v_6 and v_7 es isomorfo a G_2, uno de los subgrafos prohibidos del Teorema 2.4.

Analicemos la minimalidad. Si el subgrafo inducido propio seleccionado no contiene al vértice v_7, entonces será arco-circular propio. En cualquier otro caso, será clique-Helly. O sea que, en cualquier caso, pertenecerá a otra región. □

Proposición 3.3 *El grafo G_{15} (isomorfo a $CI(3,1)$, figura 3.21) pertenece a la región definida por PCA.*

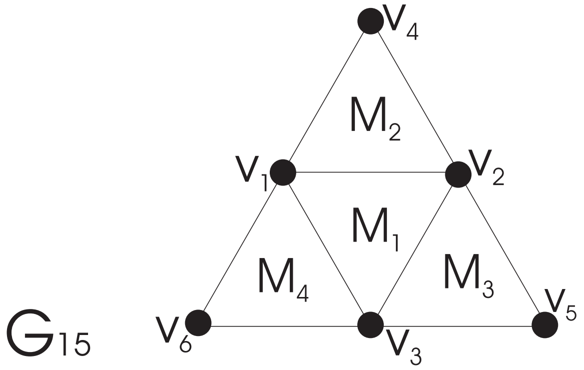

Figura 3.21

Demostración:

1. G_{15} es arco-circular propio pero no es circular unitario: recordemos que UC y UCA son clases equivalentes. Así, alcanza con saber que $CI(3,1) \in PCA \setminus UCA$ [88].

2. G_{15} no es un grafo circular clique-Helly: nuevamente, la subfamilia de cliques $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ no verifica la propiedad de Helly.

La minimalidad es satisfecha porque cualquier subgrafo inducido propio es clique-Helly, ya que G_{15} es el grafo de menor cantidad de vértices no clique-Helly. $\square$

Proposición 3.4 *El grafo G_{16} (figura 3.22) pertenece a la región definida por CHC.*

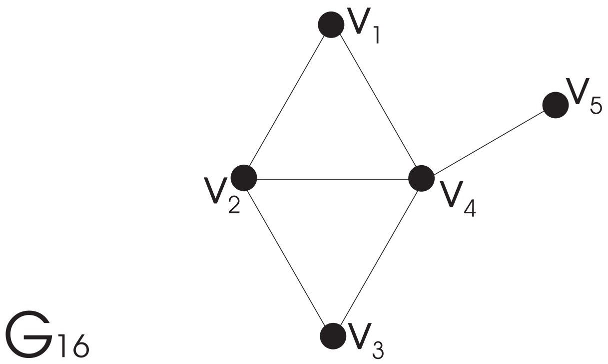

Figura 3.22

Demostración:

1. G_{16} es un grafo circular clique-Helly: dibujamos un modelo L de cuerdas para G (figura 3.23). El grafo es clique-Helly porque sus tres cliques tienen un vértice en común.

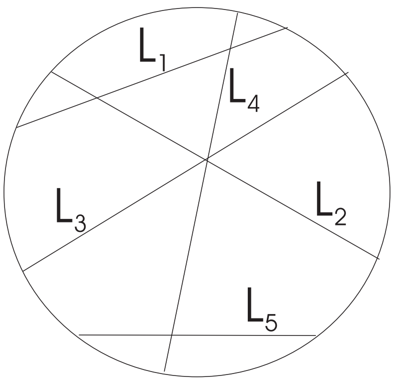

Figura 3.23

2. G_{16} no es un grafo circular Helly: G_{16} contiene un diamante como subgrafo inducido. Así, por el Teorema 3.2, no es circular Helly.

3. G_{16} no es un grafo arco-circular propio: el subgrafo inducido por los vértices v_1, v_3, v_4 y v_5 es isomorfo a G_2, uno de los subgrafos prohibidos del Teorema 2.4.

Si el subgrafo inducido propio de G_{16} seleccionado no contiene a v_5, entonces es arco-circular propio. Si contiene a v_5, es circular Helly. La minimalidad queda entonces garantizada. □

Proposición 3.5 *El grafo G_{17} (isomorfo a $CI(7,2)$, figura 3.24) pertenece a la región definida por CHC y PCA.*

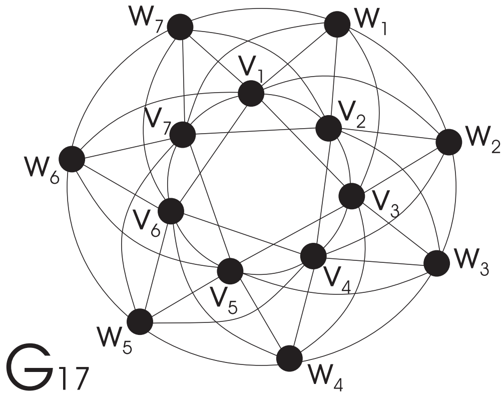

Figura 3.24

Demostración:

1. G_{17} es un grafo arco-circular propio pero no es circular unitario: por [88], $CI(7,2) \in PCA \setminus UCA$.

2. G_{17} es un grafo circular clique-Helly: si inspeccionamos todos los triángulos extendidos de G_{17} podemos verificar que siempre contienen un vértice universal. Así, por el Teorema 2.8, G_{17} es clique-Helly.

3. G_{17} no es un grafo circular Helly: el subgrafo inducido por los vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 es un diamante.

Para verificar la minimalidad, probaremos que cualquier subgrafo inducido propio H de G_{17} es UCA. Para ello, mostraremos que H no contiene $CI(j,k)$ como subgrafo inducido, donde j y k son coprimos y $j > 2k$. Es suficiente probar este resultado para $CI(3,1), CI(4,1), CI(5,1), CI(6,1)$ y $CI(5,2)$, únicos grafos de esta familia con menos que 14 vértices.

Como H tiene conjunto independiente máximo de tamaño ≤ 3, no puede contener como subgrafos inducidos a $CI(4,1), CI(5,1)$ ni $CI(6,1)$, quienes tienen máximo conjunto independiente de tamaños 4, 5 y 6, respectivamente.

Supongamos que H contiene a $CI(3,1)$ como subgrafo inducido. Por la simetría de $CI(7,2)$, podemos asumir la situación de la figura 3.25.

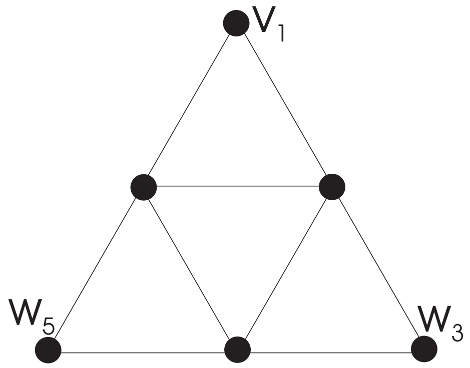

Figura 3.25

Los vértices adyacentes a v_1 y w_5 simultáneamente son v_6, v_7 y w_6; a v_1 y w_3, son v_2, v_3 y w_2; y a w_3 y w_5, son v_4, v_5 y w_4. De esta manera, podemos verificar fácilmente que no podemos elegir 3 de estos vértices de forma tal que induzcan un triángulo, como requiere la figura 3.28. Entonces, H no puede contener a $CI(3,1)$ como subgrafo inducido.

Finalmente, supongamos que H contiene a $CI(5,2)$ como subgrafo inducido. Así, H debe contener como subgrafo inducido al grafo de la figura 3.26, ya que éste es, a su vez, subgrafo inducido de $CI(5,2)$ (más detalle sobre este último grafo puede encontrarse en la Proposición 2.5).

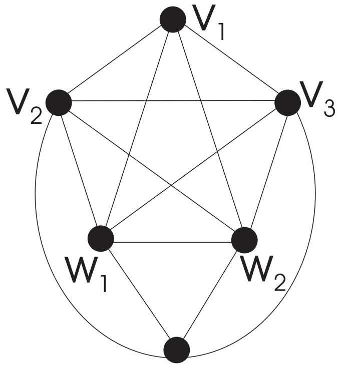

Figura 3.26

Por la simetría de $CI(7,2)$, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que uno de los dos K_5 de la figura 3.29 está inducido por los vértices v_1, v_2, v_3, w_1 y w_2. Pero ahora, no queda ningún vértice en $CI(7,2)$ adyacente a exactamente 4 de estos vértices, como requiere la figura 3.26. Entonces, H no puede contener a $CI(5,2)$ como subgrafo inducido. $\square$

Proposición 3.6 *El grafo G_{18} (figura 3.27) pertenece a la región definida por PCA y UC.*

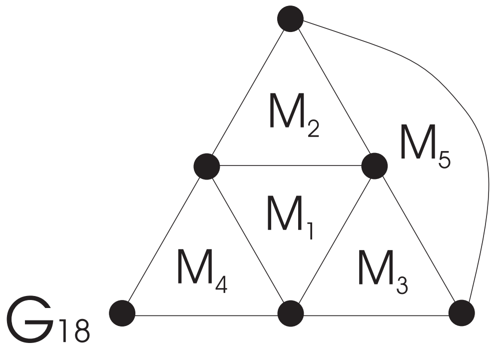

Figura 3.27

Demostración:

1. G_{18} es arco-circular propio: es conexo, cordal y no contiene ni a G_1 ni a G_2 como subgrafos inducidos. Aplicamos entonces el Teorema 2.4.

2. G_{18} es circular unitario: es arco-circular propio y no contiene a $CI(3,1)$ como subgrafo inducido (por la cantidad de vértices que tiene es el único $CI(j,k)$ en las condiciones del Teorema 2.5). Así, dicho teorema asegura que G_{18} es arco-circular unitario (clase equivalente a circular unitario).

3. G_{18} no es un grafo circular clique-Helly: $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, subfamilia de cliques, no verifica la propiedad de Helly.

La minimalidad se deduce del hecho de que cualquier subgrafo inducido de G_{18} es clique-Helly. □

Proposición 3.7 *El grafo G_{19} (figura 3.28) pertenece a la región definida por CHC, PCA y UC.*

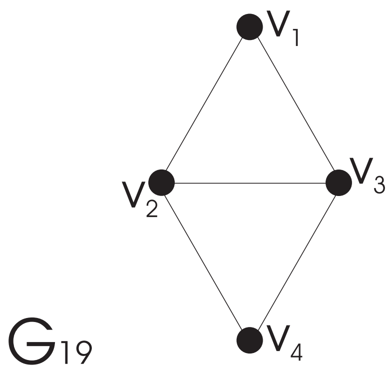

Figura 3.28

Demostración:

1. G_{19} es arco-circular propio: este grafo es conexo, cordal y no contiene ni a G_1 ni a G_2 como subgrafos inducidos. Entonces, por el Teorema 2.4, G_{19} es arco-circular propio.

2. G_{19} es circular unitario: es arco-circular propio y no contiene a ningún $CI(j,k)$ como subgrafo inducido, con j y k coprimos y $j > 2k$. Así, por el Teorema 2.5, G_{19} es arco-circular unitario (clase equivalente a circular unitario).

3. G_{19} es circular clique-Helly: ya sabemos que es circular y además tiene sólo 2 cliques. Por lo tanto, es clique-Helly.

4. G_{19} no es circular Helly: vimos en el Teorema 3.2 que los diamantes no son circular Helly.

Claramente, cualquier subgrafo inducido propio de G_{19} es circular Helly.□

Proposición 3.8 *El grafo G_{20} (figura 3.29) pertenece a la región definida por CHC y HC.*

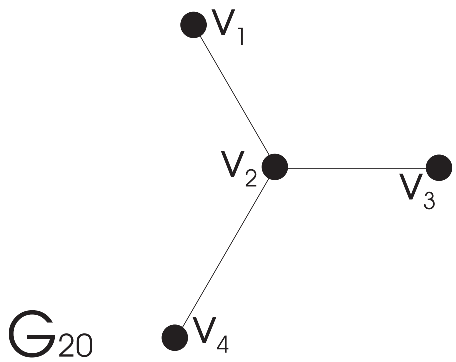

Figura 3.29

Demostración:

1. G_{20} es circular Helly: dibujemos un modelo circular Helly de G_{20}.

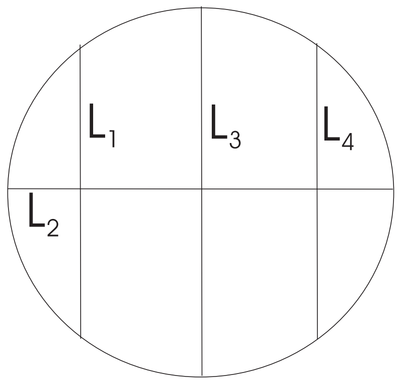

Figura 3.30

2. G_{20} no es arco-circular propio: trivial, por Teorema 2.4.

Es muy sencillo comprobar que cualquier subgrafo inducido propio de G_{20} es arco-circular propio. □

Proposición 3.9 *El grafo G_{21} (isomorfo a $CI(4,1)$, figura 3.31) pertenece a la región definida por CHC y PCA.*

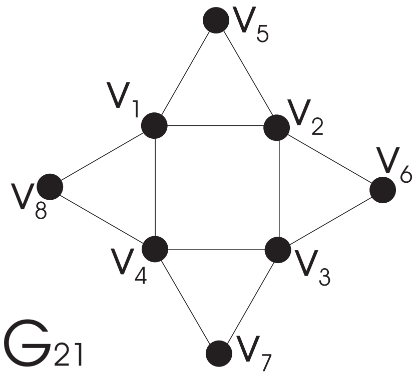

Figura 3.31

Demostración:

1. G_{21} es circular Helly: dibujemos un modelo circular Helly de G_{21} (figura 3.32).

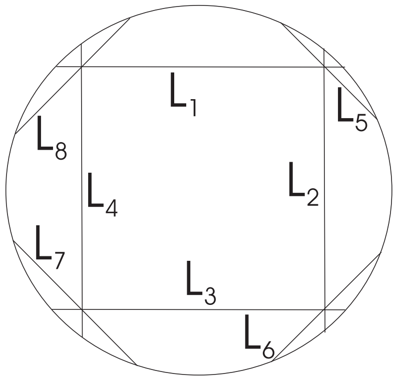

Figura 3.32

2. G_{21} es un grafo arco-circular propio pero no es circular unitario: por [88], $CI(4,1) \in PCA \setminus UCA$.

Claramente, cualquier subgrafo inducido propio de G_{21} está en UC. □

Proposición 3.10 *El grafo trivial (un solo vértice) pertenece a la región definida por las 4 subclases.*

Demostración: trivial. □

3.5 Grafos overlap de arco-circulares

Los grafos overlap de arcos alrededor de un círculo (CAO) no han sido prácticamente estudiados en la literatura. Existe un trabajo [54] que describe algoritmos para encontrar un conjunto independiente máximo en un grafo CAO de complejidad $O(n^2)$ y para encontrar un clique máximo de complejidad $O(n^5)$. Claramente, cualquier grafo G circular es un grafo CAO, ya que la representación de G en overlap de intervalos sirve como overlap de arco-circulares. La recíproca no es cierta. El grafo de la figura 3.33 no es circular pero podemos encontrar (tal cual se ve en la misma figura) una representación de él en overlap de arco-circulares.

Tal cual hicimos con los grafos arco-circulares, podemos suponer sin perder generalidad que no hay dos arcos que tengan un extremo común y que ningún arco cubre todo el círculo.

No se conoce ni una caracterización ni un algoritmo eficiente de reconocimiento para esta clase de grafos.

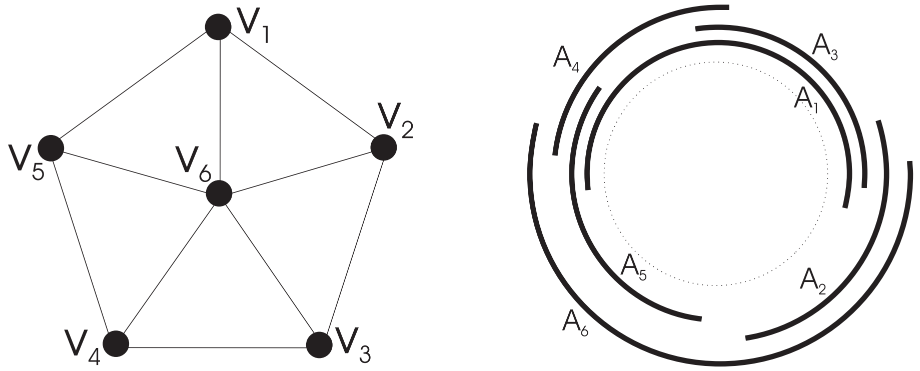

Figura 3.33: Grafo perteneciente a CAO no circular.

El siguiente resultado que caracteriza a los grafos CAO no circulares aparece mencionado en [54].

Proposición 3.11 *Sea G un grafo CAO. G es circular si y sólo sí G tiene una representación en overlap de arcos circulares tal que no existen dos arcos que cubran todo el círculo.*

Demostración:

Si G es circular, existe una representación de G en overlap de intervalos. Si transformamos trivialmente los intervalos en arcos alrededor del círculo, tenemos una representación en overlap de arcos circulares que no llega a cubrir todo el círculo, con lo cual no puede haber dos arcos que lo hagan. Por otra parte, supongamos ahora que tenemos una representación en overlap de arcos circulares de G tal que no existen dos arcos que cubran todo el círculo. Para cada arco, dibujamos la cuerda con puntos de inicio y fin en los extremos del arco. Como no hay dos arcos que cubran todo el círculo, dos arcos se superponen si y sólo sí las respectivas cuerdas se intersectan. Obtenemos entonces un modelo circular para G. □

Como corolarios surgen algunas propiedades que relacionan grafos CAO con grafos de intervalos, grafos circulares y grafos arco-circulares.

Corolario 3.3 *Sea G un grafo CAO no circular y H un nuevo grafo constituido por dos copias de G. Entonces H no es un grafo CAO.*

Demostración:

Por la proposición anterior, cualquier representación en overlap de arcos circulares de G contiene dos arcos, A_i y A_j, que cubren todo el círculo. Lo mismo sucede en una copia de G con los arcos A_k y A_l (no necesariamente los correspondientes a los mismos vértices). Por lo tanto, no es posible que A_k o A_l no se superpongan con A_i o A_j, que es lo que necesitaríamos para encontrar una representación en overlap de arcos circulares de H. □

Corolario 3.4 *Sea G un grafo CAO no circular y de intervalos, y H un nuevo grafo constituido por dos copias de G. Entonces H es un grafo arco-circular que no pertenece a CAO.*

Demostración:

Sabemos por el corolario anterior que H no pertenece a CAO. Pero por hipótesis ahora G es de intervalos. Así, podemos repetir la representación en intervalos de G en otro sector de la recta y tenemos una representación de intervalos de H, lo que implica que este nuevo grafo es arco-circular. □

Observación: Estas propiedades pueden ser usadas para encontrar grafos en cada una de las regiones que se generan si intersectamos los grafos circulares, con los arco-circulares y los overlap de arco-circulares.

Por último, vamos a dar una condición necesaria para que un grafo pertenezca a la clase CAO.

Teorema 3.7 *Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo CAO. Entonces el conjunto de las aristas de $\overline{G}$ se puede particionar en dos conjuntos $C(\overline{G})$ y $A(\overline{G})$ de modo que el grafo $C = (V(G), C(\overline{G}))$ es un grafo de comparabilidad y el grafo $A = (V(G), A(\overline{G}))$ es el complemento de un grafo arco-circular.*

Demostración:

Consideremos la representación en overlap de arcos circulares de G. Dos vértices son adyacentes en G si y sólo sí sus respectivos arcos tienen intersección común pero ninguno de ellos está incluido en el otro. En $\overline{G}$, entonces, dos vértices serán adyacentes si y sólo sí sus respectivos arcos verifican que uno está incluido en el otro ó no se intersecan entre sí.

Sea $C(\overline{G})$ el conjunto de aristas de $\overline{G}$ formado por los pares (v, w) tal que el arco correspondiente a v, A_v, está incluido o incluye a A_w, el arco correspondiente a w. Veamos que $C = (V(G), C(\overline{G}))$ es de comparabilidad. Orientamos toda arista de v a w si A_v está incluido en A_w. Ahora si tenemos una arista orientada de u a v y otra de v a w, esto quiere decir que A_u está incluido en A_v y, a su vez, A_v está incluido en A_w. Por lo tanto, A_u está incluido en A_w por lo que existirá la arista orientada de u a w. Esto prueba que el grafo C es de comparabilidad.

Sea $A(\overline{G})$ el conjunto de aristas de $\overline{G}$ formado por los pares (v, w) tal que el arco correspondiente a v, A_v, no se interseca con A_w, el arco correspondiente a w. Veamos que $A = (V(G), A(\overline{G}))$ es el complemento de un grafo arco-circular. Como estamos uniendo en A a los vértices correspondientes a arcos que no se intersecan, esta misma representación nos sirve para verificar que $\overline{A}$ es un grafo arco-circular, ya que ahora uniremos los arcos que se intersecan entre sí.

Además, obtuvimos una partición de las aristas de $\overline{G}$ en dos conjuntos ya que es claro que $C(\overline{G}) \cup A(\overline{G}) = E(\overline{G})$ y $C(\overline{G}) \cap A(\overline{G}) = \emptyset$. □

Observación: Diremos entonces que el Teorema 3.7 prueba que el complemento de un grafo CAO es la unión disjunta en las aristas de un grafo de comparabilidad y el complemento de un grafo arco-circular. Este resultado generaliza un teorema de [68], donde se prueba que el complemento de un grafo circular (overlap de intervalos) es la unión disjunta en las aristas de un grafo de permutación (subclase de comparabilidad) y el complemento de un grafo de intervalos (subclase de arco-circulares).

Capítulo 4

Problemas algorítmicos

Diversos problemas algorítmicos con importancia desde el punto de vista teórico y con una gran cantidad de aplicaciones han sido estudiados en la literatura para la clase general de los grafos y para muchas de sus subclases. Los problemas de conjunto independiente máximo, número e índice cromático, clique máximo, conjunto dominante mínimo, circuito hamiltoniano, isomorfismo, son algunos de los más conocidos. Enfocaremos nuestra atención en este trabajo sobre dos de ellos: partición mínima en cliques y cubrimiento mínimo de cliques por vértices.

El problema de la partición mínima en cliques de un grafo G consiste en encontrar una partición de cardinalidad mínima de los vértices de G en subconjuntos disjuntos de modo que cada subconjunto induzca un subgrafo completo.

El problema del cubrimiento mínimo de cliques por vértices en un grafo G consiste en encontrar un conjunto de cardinalidad mínima de vértices del grafo que cubra todos los cliques de G, es decir, tal que todo clique del grafo tenga a algún vértice en el conjunto.

4.1 Partición mínima en cliques

Este problema es NP-completo para la clase general de los grafos [53] y para grafos de líneas [30], grafos sin $K_{3,3}$ como subgrafo inducido [11] y grafos sin $K_{1,3}$ como subgrafo inducido [30]. En cambio, puede ser resuelto en tiempo polinomial para grafos perfectos [37] y para grafos arco-circulares [38], mientras que su complejidad aparece como un problema abierto para grafos circulares en [52].

Probaremos aquí la polinomialidad de este problema para la subclase formada por los grafos que no contienen como subgrafo inducido ni a F_4 (un abanico de 5 vértices) ni a W_4 (una rueda de 5 vértices) (figura 4.1), y donde todo ciclo impar de longitud mayor ó igual que 5 tiene una cuerda corta. Llamaremos $\mathcal{G}$ a esta subclase de los grafos. Los grafos con cuerdas cortas han sido considerados en el contexto de grafos perfectos [60], [80].

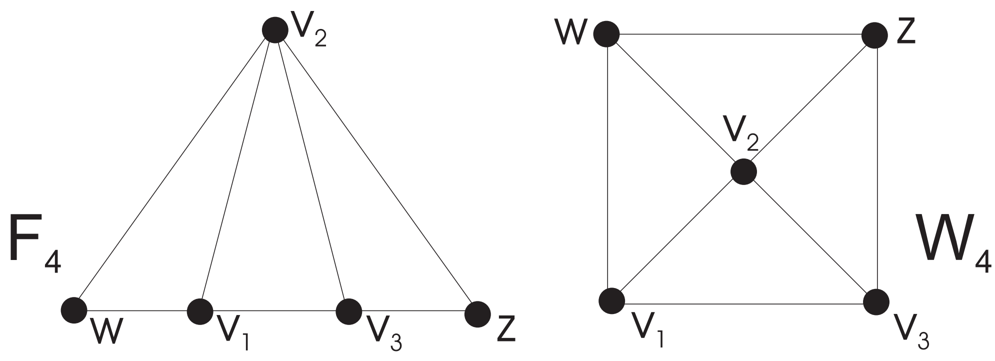

Figura 4.1: Grafos F_4 y W_4.

Veamos que los grafos en $\mathcal{G}$ son grafos Berge, por lo que surge como una conjetura natural que la clase $\mathcal{G}$ es perfecta.

Teorema 4.1 *Sea G un grafo en $\mathcal{G}$. Entonces G es un grafo Berge.*

Demostración:

Por hipótesis G no tiene agujeros impares ≥ 5 como subgrafos inducidos (dado que todo ciclo impar de longitud mayor ó igual que 5 tiene una cuerda corta). Por lo tanto, sólo falta ver que G tampoco contiene el complemento de agujeros impares ≥ 5. Supongamos que G contiene a $\overline{C_{2j+1}}$ como subgrafo inucido, para $j \geq 3$ ($\overline{C_5}$ no necesita ser analizado porque es isomorfo a C_5). Sea $v_1, v_2, \ldots, v_{2j+1}$ el orden de los vértices en C_{2j+1}. Analicemos el subgrafo inducido por v_1, v_2, v_4, v_6 y v_7 en $\overline{C_{2j+1}}$. Si $j = 3$, esos vértices inducen F_4, ya que en este caso v_1 será no adyacente a v_7. Si $j \geq 4$, el subgrafo inducido que nos queda es W_4, ya que ahora v_1 será adyacente a v_7. En ambos casos, llegamos a una contradicción, lo que nos permite afirmar que G no contiene el complemento de agujeros impares ≥ 5. Queda probado entonces que G es un grafo Berge. $\square$

Conjetura 4.1 *La clase $\mathcal{G}$ es perfecta.*

Definimos como pK_2 el grafo compuesto por p aristas disjuntas. Necesitaremos el siguiente resultado, probado en forma independiente en [7] y en [67].

Teorema 4.2 ([7], [67]) *Sea G un grafo que no contiene a $\overline{pK_2}$ como subgrafo inducido para algun entero p. Entonces el numero de cliques de G está acotado superiormente por $n^{2(p-1)}$.*

Este teorema nos permite afirmar que los grafos en $\mathcal{G}$ tienen una cantidad polinomial de cliques.

Corolario 4.1 *Sea G un grafo en $\mathcal{G}$. El número de cliques de G está acotado superiormente por n^4.*

Demostración:

Es fácil ver que el complemento de $3K_2$ contiene a W_4 como subgrafo inducido. Así, el grafo G no puede contener a $\overline{3K_2}$ como subgrafo inducido, por la definición de $\mathcal{G}$. Entonces, podemos aplicar el Teorema 4.1 con $p = 3$, con lo que surge la cota de n^4. □

Sea $A_G \in R^{k\times n}$ la matriz clique del grafo que consiste en colocar los k cliques del grafo en las filas y los n vértices en las columnas, definiendo $a_{ij} = 1$ si el vértice j pertenece al clique i y $a_{ij} = 0$, en caso contrario. Notar que el tamaño de la matriz es polinomial para los grafos en $\mathcal{G}$ porque la cantidad de cliques es, por el Corolario 4.1, polinomial. También A_G puede ser generada en tiempo polinomial pues la complejidad de generar todos los cliques del grafo es $O(m.n.k)$, donde k es el número total de cliques [84].

Definimos $e_j = (1, 1, \ldots, 1, 1)$ como el vector con j $1's$.

Podemos entonces formular el problema de partición mínima en cliques como un problema de programación lineal entera $0 - 1$:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & \sum_{i=1}^{k} x_i & & \\ \text{s.a.} & xA_G & \geq & e_n \\ & x_j & = & 0 \text{ ó } 1 \quad \forall\, j = 1, \ldots, k \end{array}$$

Observación: Los cliques que forman parte de la solución son aquellos en los que su correspondiente variable x_i es igual a 1. Claramente, la solución óptima puede ser transformada en una partición en subconjuntos disjuntos transformando algunos de los cliques en subgrafos completos no maximales de modo de asegurar que cada vértice pertenezca a un único subgrafo completo. Este procedimiento no puede reducir el número de subgrafos completos obtenidos al resolver el problema de programación entera porque sino la solución obtenida no sería mínima.

Para avanzar en el estudio de la complejidad del problema necesitamos algunas definiciones más.

Sea $N_j, j \geq 3$, la familia de matrices de $j \times j$ con $0's$ y $1's$, en las cuales la suma de las filas y de las columnas es igual a 2 y no contienen la submatriz de 2×2 con 1's en sus 4 posiciones (en términos de grafos podemos pensarla como la matriz de incidencia vértice-arista de un ciclo). Diremos que una matriz es balanceada si no contiene una submatriz en N_j, para ningún $j \geq 3$, con j impar.

El siguiente teorema muestra las características del poliedro en el problema de programación entera cuando la matriz en cuestión es balanceada.

Teorema 4.3 ([28]) *Si A es una matriz balanceada, entonces el poliedro $Q(A) = \{x/Ax \geq e_k, x \geq 0\}$ tiene sólo extremos enteros.*

Claramente, A balanceada implica A^t balanceada, por lo que se deduce el siguiente corolario.

Corolario 4.2 *Si A es una matriz balanceada, entonces el poliedro $P(A) = \{x/xA \geq e_n, x \geq 0\}$ tiene sólo extremos enteros.*

Recordemos que el problema de programación lineal es polinomial [56], mientras que el problema de programación lineal entera es NP-completo (ver, por ejemplo, [30]). Así, el Teorema 4.3 nos muestra que el hecho de que la matriz sea balanceada es clave a los efectos de mostrar la polinomialidad del problema, ya que nos permite resolverlo como un problema de programación lineal, olvidándonos de la restricción de integralidad de las variables (esto es porque siempre existe algún extremo del poliedro que da el óptimo de la función objetivo).

Probaremos entonces que la matriz clique de nuestro problema es balanceada.

Teorema 4.4 *Sea G un grafo en $\mathcal{G}$. Entonces, la matriz de clique A_G es balanceada.*

Demostración:

Dividimos la prueba en dos:

1. A_G no puede contener una submatriz en N_3. Supongamos que sí y sean M_1, M_2 y M_3 los cliques y v_1, v_2 y v_3 los vértices que componen esta submatriz. Tendremos, por ejemplo, la siguiente submatriz en A_G (si no es ella, será alguna obtenida a partir de una permutación de sus filas):

	v_1	v_2	v_3
M_1	1	1	0
M_2	0	1	1
M_3	1	0	1

   Esto asegura que estos tres vértices son adyacentes entre sí, o sea, forman un K_3. Como M_1 es un clique, debe existir un vértice w en M_1 adyacente a v_1 y v_2, y no adyacente a v_3. Con el mismo argumento, también existe un vértice z, adyacente a v_2 y v_3 y no adyacente a v_1. Si tomamos ahora w, z, v_1, v_2 y v_3 podemos ver que inducen F_4, si w y z no son adyacentes, o W_4, si w y z son adyacentes, lo que es un absurdo para cualquiera de los dos casos.

2. Supongamos que A_G contiene una submatriz en N_j, con j impar mayor ó igual que 5. Como, por hipótesis, G está en $\mathcal{G}$, el ciclo impar generado por N_j debe contener una cuerda corta. Sean $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_j$ los vértices del ciclo impar generado por N_j y supongamos sin pérdida de generalidad que la cuerda corta une a v_1 con v_3, por lo que v_1, v_2 y v_3 inducen un K_3. Además, v_1 y v_3 forman parte de un nuevo clique, M_{j+1}, que puede o no contener a v_2. En cualquiera de los dos casos, deben existir nuevos vértices w y z que verifican: w está en el clique que aparecía en N_j conteniendo a v_1 y v_2, y es adyacente a estos dos vértices y no adyacente a v_3; mientras que z está en el clique que aparecía en N_j conteniendo a v_2 y v_3, y es adyacente a estos dos vértices y no adyacente a v_1. Nuevamente, w, z, v_1, v_2 y v_3 inducen un F_4 ó un W_4, lo que es un absurdo.

De todo lo probado en esta sección, se deduce el siguiente teorema.

Teorema 4.5 *El problema de la partición mínima en cliques es polinomial para la clase de grafos $\mathcal{G}$.*

4.2 Cubrimiento de cliques por vértices

Analicemos ahora el problema que nos queda si realizamos una leve variante en la formulación con programación lineal entera del problema de partición mínima en cliques:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Min} & \sum_{i=1}^{n} x_i & & \\ \text{s.a.} & A_G x & \geq & e_k \\ & x_j & = & 0 \text{ ó } 1 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Lo que buscamos ahora es un conjunto mínimo de vértices que cubra a todos los cliques, es decir, tal que todo clique del grafo tenga a algún vértice en el conjunto. Diremos que un conjunto de vértices con estas características es un transversal de los cliques mínimo. A este problema se lo conoce como cubrimiento de cliques por vértices y ha sido mucho menos estudiado en la literatura que el problema de partición en cliques. En [26], se prueba que el problema es NP-completo para la clase de grafos sin triángulos, mientras que en ese mismo trabajo, como en [1], [2], [3] y [92], se dan cotas superiores para el cardinal de un transversal de los cliques mínimo en diferentes clases de grafos. Algoritmos polinomiales para resolver este problema han sido presentados para grafos de comparabilidad [8], grafos fuertemente cordales [22] y grafos arco-circular Helly [39].

Observación: El problema de decisión para cubrimiento de cliques por vértices queda formulado de la sguiente manera: " dado un grafo G y un entero k, ¿ existe un conjunto de vértices de G de cardinalidad $\leq k$ que cubra a todos los cliques del grafo ?". No parece sencillo probar la pertenencia de este problema a NP para la clase general de los grafos, ya que el número de cliques de un grafo cualquiera puede ser exponencial. La pregunta a responder sería entonces: ¿ existe algún algoritmo polinomial que dado un conjunto de vértices de un grafo detecte si están cubiertos todos sus cliques ? La respuesta es trivial si el número de cliques es polinomial pero adquiere interés para los casos en que la cantidad de cliques es exponencial en el tamaño del grafo.

Esta observación nos lleva a formular un nuevo problema de decisión: dado un grafo G y un conjunto de vértices S, ¿ cubre S todos los cliques de G ?

Podemos afirmar que este nuevo problema de decisión pertenece a Co-NP: dado un grafo G, un clique de G con intersección vacía con el conjunto de vértices S dado, sirve como certificado polinomial para mostrar que no están cubiertos todos los cliques.

Con un razonamiento análogo al que hicimos para partición en cliques, los resultados alcanzados nos permiten asegurar la polinomialidad de este problema para los grafos que están en $\mathcal{G}$.

Teorema 4.6 *El problema de cubrimiento mínimo de cliques por vértices es polinomial para la clase de grafos $\mathcal{G}$.*

4.2.1 Aplicación a una subclase de los circulares

Diremos que un grafo es circular $H-CC$ si es circular Helly y todo ciclo impar de longitud mayor ó igual a 5 contiene una cuerda corta. Veamos que un grafo G en esta subclase pertenece a la clase $\mathcal{G}$.

Teorema 4.7 *Sea G un grafo circular $H-CC$. Entonces, G no contiene como subgrafo inducido ni a F_4 ni a W_4, y todo ciclo impar de longitud mayor ó igual a 5 contiene una cuerda corta.*

Demostración:

1. Por definición de grafo circular $H-CC$, en G todo ciclo impar de longitud mayor ó igual a 5 contiene una cuerda corta.

2. Por ser G circular Helly, no contiene diamantes como subgrafos inducidos (Teorema 3.2). Así, G no puede contener ni a F_4 ni a W_4 como subgrafo inducido. □

Notar que en este caso la cota superior para el número de cliques del grafo es menor que en el caso general de la clase $\mathcal{G}$. Dado un modelo circular

Helly, la cantidad de cliques está acotada superiormente por el total de intersecciones de las cuerdas, número equivalente a la cantidad de aristas del grafo.

Como corolario de los Teoremas 4.5, 4.6 y 4.7, podemos afirmar lo siguiente:

Corolario 4.3 *Los problemas de cubrimiento mínimo de cliques por vértices y de partición mínima de cliques son polinomiales para la clase de grafos circulares $H - CC$.*

Observación: En el caso de partición mínima de cliques este resultado no es novedoso ya que podía deducirse de lo siguiente. Sabemos que los grafos circulares $H - CC$ son Berge. Como además no contienen diamantes como subgrafos inducidos podemos afirmar por [91] que vale la conjetura fuerte de los grafos perfectos. Esto implica que los grafos circulares $H - CC$ son perfectos. Pero como ya dijimos, el problema de partición mínima en cliques es polinomial para grafos perfectos [37].

4.2.2 Cubrimiento de cliques para grafos arco-circular Helly

Los grafos arco-circular Helly (HCA) fueron caracterizados y reconocidos en [33]. Allí se propone un algoritmo de complejidad $O(n^3)$ que decide si un grafo dado pertenece a esta clase y en caso de que sí, construye la representación en arcos que verifica la propiedad de Helly. A partir de esta construcción es sencillo encontrar todos los cliques del grafo, que se identifican con puntos de intersección entre los arcos (a los que llamamos p_i) sobre la circunferencia. También se probó en [33] que el número de cliques esta acotado superiormente por n.

En [39] se propone un algoritmo polinomial que encuentra un cubrimiento mínimo de cliques por vértices en un grafo arco-circular Helly. Una vez que se tiene construida la representación en arcos circulares que verifican la propiedad de Helly, el algoritmo de [39] corre en tiempo $O(n^2)$.

Proponemos aquí un algoritmo de formulación mucho más sencilla, goloso, para resover este problema. Nuestro algoritmo también puede implementarse en tiempo $O(n^2)$, si tomamos como dato de entrada la representación Helly en arcos circulares (aunque creemos que optimizando la implementación se puede reducir su tiempo de ejecución a $O(n\ log_2 n)$).

Decimos que un arco es dominado en una representación dada, si dicho arco está estrictamente contenido en otro arco de la representación. Un arco es dominante, si no es dominado. Llamamos extremo izquierdo al primer extremo de cada arco en el sentido horario y extremo derecho, al otro extremo.

Dado un grafo G arco-circular Helly, sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ los arcos correspondientes a los vértices de G en la representación encontrada, y $p_1, p_2, \ldots, p_k$

los puntos de intersección correspondientes a los k cliques M_i de G (sabemos que en este caso $k \leq n$). Los arcos los ordenamos en el sentido horario colocando primero los j dominantes y dejando para el final a los arcos dominados (claramente, no perdemos generalidad si nuestro algoritmo trabaja sólo con los j arcos dominantes). Los puntos también los ordenamos en sentido horario, podemos suponer que p_1 es el primer punto que aparece si recorremos el arco de la circunferencia a partir del extremo izquierdo de A_1, en sentido horario.

Funcionamiento del algoritmo:

Construimos j cubrimientos S_i $(i = 1, \ldots, j)$ de la siguiente manera: para cada i, colocamos primero en el conjunto el vértice correspondiente al arco A_i y verificamos la cantidad de puntos de intersección que son cubiertos. Supongamos que el último punto cubierto, en sentido horario, es p_t. El segundo vértice a elegir para ese conjunto será aquel cuyo arco correspondiente cubra a p_{t+1} y tenga el extremo derecho más alejado en sentido horario. Así seguimos hasta cubrir todos los puntos. Una vez que tenemos construidos los j conjuntos S_i, nos quedamos con cualquiera de los de cardinalidad menor.

Teorema 4.8 *El algoritmo encuentra en tiempo polinomial un cubrimiento mínimo de los cliques por vértices para un grafo G arco-circular Helly.*

Demostración:

Por construcción, el algoritmo genera un cubrimiento de los cliques por vértices. Veamos en una forma bastante sencilla que encuentra el mínimo.

Sea $S = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_q}\}$ un cubrimiento mínimo, donde los arcos están ordenados en sentido horario tal cual hemos definido anteriormente. Nuevamente podemos suponer que sólo consideramos arcos dominantes. Queremos probar que el cubrimiento construido por el algoritmo a partir de A_{j_1} tiene cardinalidad q (no puede ser menor ya que S es óptimo). Es claro que con esto nos alcanza para ver que el algoritmo goloso propuesto encuentra el mínimo.

Comenzamos a correr el algoritmo a partir de A_{j_1}. El siguiente arco que se elige cubrirá al menos los mismos puntos de intersección que cubre A_{j_2}, por la forma en que trabaja el algoritmo (ya que nos quedamos con aquel que tenga el extremo derecho mas alejado). Así, podemos poner en S el arco elegido por el algoritmo y retirar a A_{j_2}. Si seguimos iterando análogamente, concluimos que el algoritmo construye un conjunto S' de cardinalidad menor o igual que el óptimo, que es lo que queríamos ver.

Claramente, la complejidad del algoritmo es polinomial. Veamos que si se da como dato de entrada la representación Helly de los arcos, el algoritmo puede ser fácilmente implementado en tiempo $O(n^2)$. Encontrar los k puntos de intersección puede hacerse en $O(n^2)$ (recordemos que los puntos de intersección representan los cliques del grafo y sabemos que este número está acotado por n). Luego tenemos a lo sumo n iteraciones, correspondientes a cada arco de la representación, con tiempo de ejecución del algoritmo $O(n)$ para cada una. $\square$

Observación: Dado que los grafos de intervalos son una subclase de HCA, el algoritmo propuesto encuentra un cubrimiento mínimo de los cliques por vértices también para esta clase. Más aún, es claro que en este caso alcanza con correr el algoritmo una vez sola a partir del intervalo que cubre al primer punto de intersección y tiene su extremo derecho más alejado.

Capítulo 5

Conclusiones y problemas abiertos

Hemos presentado en esta tesis una serie de nuevos resultados relacionados con dos conocidas clases de grafos de intersección: los grafos arco-circulares y los grafos circulares. Analizamos sus subclases más importantes, encontramos nuevas caracterizaciones y estructuras prohibidas e investigamos la complejidad, por un lado, de ciertos problemas algorítmicos aplicados a estas subclases y, por el otro, del reconocimiento de la pertenencia de un grafo dado a alguna de ellas. Las figuras 2.13 y 3.20, donde se muestran las relaciones de inclusión y los ejemplos minimales pertenecientes a las regiones formadas al hacer el cruce entre las subclases analizadas, podrán ser de interés para aquellos investigadores que trabajan sobre alguna de estas dos clases de los grafos de intersección.

Como líneas futuras de investigación en estos tópicos quedan pendientes diversos problemas abiertos, algunos de los cuales serán reseñados en esta sección.

En grafos arco-circulares, uno de los principales resultados abiertos es determinar si existe un algoritmo de reconocimiento lineal en m y n. Hasta el momento, el algoritmo más eficiente se debe a Hsu [50] y tiene complejidad $O(m.n)$.

Tampoco se conoce una caracterización de grafos arco-circulares por medio de subgrafos prohibidos, como sí existe para grafos arco-circular propios [88]. El Teorema 2.2 de Tucker, más los Lemas 2.1 y 2.2 demostrados aquí, deberían servir como punto de partida en la búsqueda de una caracterización de la totalidad de la clase por subgrafos prohibidos.

En grafos circulares, la única subclase aquí tratada para la cual no se conoce algoritmo polinomial de reconocimiento es la de los circular Helly. Hemos demostrado que es condición necesaria para pertenecer a esta última subclase ser circular y sin diamantes como subgrafos inducidos (Teorema 3.2). La Conjetura 3.1 arriesga que esta condición también es suficiente, en uno de los problemás abiertos más bonitos e interesantes que surgen a partir de esta tesis. Especialistas en el campo de la teoría de grafos como Jerry

Spinrad [77] y Frédéric Maffray [61] han sugerido la validez de la conjetura (que permitiría un reconocimiento polinomial para la subclase), por lo que nos encontramos actualmente trabajando en algunas de las ideas discutidas a fin de avanzar sobre una posible prueba.

La sección 3.3 avanza sobre estructuras prohibidas minimales para grafos circulares. Tal cual expresamos en los grafos arco-circulares, los resultados aquí mostrados, unidos al Teorema 3.9 de Bouchet [16], podrían ser útiles a los efectos de encontrar una caracterización para la clase por medio de subgrafos prohibidos, caracterización no conocida hasta el momento.

Presentamos en la sección 3.5 algunos nuevos resultados sobre grafos overlap de arco-circulares, una superclase de los circulares. Lo más importante que queda abierto es encontrar una caracterización de la clase y estudiar la complejidad del reconocimiento. La caracterización para circulares (overlap de intervalos) mostrada por Szwarcfiter en [82] debería servir como idea para avanzar sobre una caracterización de los grafos CAO. De todos modos, aún encontrando una caracterización parece difícil estudiar el problema de reconocimiento. Otra línea de investigación futura en esta clase sería el estudiar problemas algorítmicos aplicados a ella, sobre todo, aquellos problemas de complejidad desconocida para los circulares (como partición en cliques, cubrimiento de cliques por vértices o conjunto dominante) o de complejidad polinomial para los circulares (como circuito hamiltoniano). También se podrían buscar algoritmos más eficientes que los encontrados en [54] para los problemas de conjunto independiente máximo y clique máximo.

El Capítulo 4 enfoca dos problemas algorítmicos: partición en cliques y cubrimiento de cliques por vértices, ambos NP-Hard para la clase general de los grafos.

La complejidad del problema de partición en cliques para grafos circulares es mencionada como abierta en [52]. Tenemos algunas ideas que relacionan este problema con variantes del problema de flujo en redes con productos múltiples (*multicommodity flows*) que podrían resolver la cuestión de su complejidad.

Hemos demostrado que estos dos problemas algorítmicos son polinomiales para grafos que no contienen como subgrafo inducido ni una rueda con 5 vértices ni un abanico con 5 vértices, y donde todo ciclo impar de longitud mayor ó igual que 5 contiene una cuerda corta. El problema de cubrimiento de cliques por vértices ha sido muy poco estudiado en la literatura. Creemos que se puede analizar si utilizando alguna técnica diferente para la prueba (en vez de resultados de teoría poliedral en programación lineal entera) se puede ampliar aún más la clase estudiada en esta tesis o encontrar otras clases donde el problema siga siendo polinomial, tal cual hemos visto aquí para grafos arco-circular Helly.

El algoritmo goloso propuesto para resolver este problema para la clase HCA puede ser implementado fácilmente en tiempo $O(n^2)$. Consideramos que puede estudiarse una optimización de la implementación a fin de llevar el tiempo de corrida a $O(n\ log_2 n)$.

Con respecto a la clase $\mathcal{G}$, hemos visto que está incluída en la clase de los grafos Berge y hemos conjeturado que es una clase perfecta. Creemos que los resultados de teoría poliedral mencionados en este trabajo nos podrían permitir avanzar en la demostración de esta conjetura.

Resulta interesante también estudiar la pertenencia a NP del problema de decisión de cubrimiento de cliques por vértices para la clase general de los grafos. Es decir, buscar un algoritmo que en tiempo polinomial detecte si un conjunto de vértices dado cubre a todos los cliques de un grafo cualquiera. Es claro que la dificultad pasa por las instancias con una cantidad de cliques no polinomial. Al analizar esta cuestión queda formulado entonces un nuevo problema de decisión: "dado un grafo G y un conjunto de vértices S, ¿ cubre S todos los cliques de G ?". Sólo hemos probado en esta tesis la pertenencia a Co-NP de este nuevo problema, por lo que sigue abierto el estudio acerca de su complejidad.

Bibliografía

[1] T. Andreae, On the clique-transversal number of chordal graphs, Discrete Mathematic 191 (1998), 3-11.

[2] T. Andreae and C. Flotow, On covering all cliques of a chordal graph, Discrete Mathematic 149 (1996), 299-302.

[3] T. Andreae, M. Schughart and Z. Tuza, Clique-transversal sets of line graphs and complements of line graphs, Discrete Mathematics 88 (1991), 11-20.

[4] A. Apostolico and S. Hambrusch, Finding maximum cliques on circular-arc graphs, Information Processing Letters 26 N. 4 (1987), 209-215.

[5] K. Appel and W. Haken, Every planar map is four colorable. Part I. Discharging, Illinois J. Math. 21 (1977), 429-490.

[6] K. Appel, W. Haken and J. Koch, Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility, Illinois J. Math. 21 (1977), 491-567.

[7] E. Balas and C. Yu, On graphs with polynomially solvable maximum-weight clique problem, Networks 19 (1989), 247-253.

[8] V. Balachandhran, P. Nagavamsi and C. Pandu Ragan, Clique-transversal and clique-independence on comparability graphs, Information Processing Letters 58 (1996), 181-184.

[9] J. Bang-Jensen and P. Hell, A note on chordal proper circular-arc graphs, Discrete Mathematic 128 (1994), 395-398.

[10] C. Berge, Graphs (North-Holland, 1985).

[11] F. Berman, D. Johnson, F. Leighton, P. Shor and L. Snyder, Generalized planar matching, manuscript (1985).

[12] N. Biggs, E. Keith Lloyd and R. Wilson, Graph Theory 1736-1976 (Clarendon Press, 1978).

[13] M. Bonuccelli, Dominating sets and domatic number of circular-arc graphs, Report S80-18, Dipartamento di Informatica, Universita di Pisa, Italy (1980).

[14] A. Bouchet, Caracterisation des symboles croises de genre nul, C. R. Acad. Sci. Paris, 274 (1972), 724-727.

[15] A. Bouchet, Reducing prime graphs and recognizing circle graphs, Combinatorica 7, 3 (1987), 243-254.

[16] A. Bouchet, Circle graph obstructions, Journal of Combinatorial Theory B 60 (1994), 107-144.

[17] A. Brandstadt, V. Le and J. Spinrad, Graph Classes: A Survey, (SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999).

[18] A. Cayley, On the theory of the analytical forms called trees, Philosophical Magazine (4) 13 (1857), 172-176.

[19] A. Cayley, On the mathematical theory of isomers, Philosophical Magazine (4) 47 (1874), 444-446.

[20] G. Confessore, P. Dell'Olmo and S. Giordani, An approximation result for a periodic allocation problem, Discrete Applied Mathematic, en prensa.

[21] S. Cook, The complexity of theorem-proving procedures, Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing Machinery, New York (1971), 151-158.

[22] G. Chang, M. Farber and Z. Tuza, Algorithmic aspects of neighbourhood numbers, SIAM J. on Discrete Mathematics 6 (1993), 24-29.

[23] X. Deng, P. Hell and J. Huang, Linear time representation algorithms for proper circular-arc graphs and proper interval graphs, SIAM Journal of Computing, 25 (1996), 390-403.

[24] G. Durán and M. Lin, On some subclasses of circular-arc graphs, presentado en la 31th. SE International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Florida Atlantic University (2000), y sometido para su publicación en Congressus Numerantium.

[25] G. Durán and M. Lin, Clique graphs of Helly circular-arc graphs, Ars Combinatoria, en prensa.

[26] P. Erdos, T. Gallai and Z. Tuza, Covering the cliques of a graph with vertices, Discrete Mathematics 108 (1992), 279-289.

[27] S. Even and A. Itai, Queues, stacks and graphs, in Theory of Machines and Computations, Academic Press, New York (1971), 71-86.

[28] D. Fulkerson, A. Hoffman and R. Oppenheim, On balanced matrices, Math. Programming 1 (1974), 120-132.

[29] C. Gabor, K. Supowit and W. Hsu, Recognizing circle graphs in polynomial time, Journal of the ACM, Vol. 36, 3 (1989), 435-473.

[30] M. Garey and D. Jonhson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness (Freeman and Company, San Francisco, 1979).

[31] M. Garey, D. Johnson, G. Miller and C. Papadimitriou, The complexity of coloring circular arcs and chords, SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 1 (1980), 216-227.

[32] F. Gavril, Algorithms for a maximum clique and a maximum independent set of a circle graph, Networks 3 (1973), 261-273.

[33] F. Gavril, Algorithms on circular-arc graphs, Networks 4 (1974), 357-369.

[34] F. Gavril, Intersection graphs of Helly families of subtrees, Discrete Applied Mathematics 66 (1996), 45-56.

[35] M. Golumbic, Algorithm Graph Theory and Perfect Graphs (Academic Press, New York, 1980).

[36] M. Golumbic and P. Hammer, Stability in circular-arc graphs, Journal of Algorithms 9 (1988), 314-320.

[37] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization, Combinatorica 1 (1981), 169-197.

[38] U. Gupta, D. Lee and J. Leung, Efficient algorithms for interval graphs and circular-arc graphs, Networks 12 (1982), 459-467.

[39] V. Guruswami and C. Pandu Rangan, Algorithmic aspects of clique-transversal and clique-independent sets, Discrete Applied Mathematics 100 (2000), 183-202.

[40] F. Guthrie, Note on the colouring of maps, Proc. Roy. Soc. Edinb. 10 (1880), 727-728.

[41] H. Hadwiger, Debrunner and V. Klee, Combinatorial Geometry in the Plane, New York: Holt Rinehardt and Winston (1964), 54.

[42] R. Hamelink, A partial characterization of clique graphs, Journal of Combinatorial Theory B 5 (1968) 192-197.

[43] W. Hamilton, Account of the icosian calculus, Proc. Roy. Irish Acad. 6 (1858), 415-416.

[44] F. Harary, Graph Theory (Addison-Wesley, 1969).

[45] P. Heawood, Map-colour theorem, Quart. J. Pure Appl. Math. 24 (1890), 332-338.

[46] P. Hell, J. Bang-Jensen and J. Huang, Local tournaments and proper circular-arc graphs, Algorithms, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 450 (Springer-Verlag, 1990), 101-109.

[47] P. Hell and J. Huang, Lexicographic orientation and representation algorithms for comparability graphs, proper circular-arc graphs and proper interval graphs, Journal of Graph Theory 20 (1995), 361-374.

[48] W. Hsu, Maximum weight clique algorithms for circular-arc graphs and circle graphs, SIAM J. Comput. 14 (1985), 224-231.

[49] W. Hsu and K. Tsai, Linear time algorithms on circular-arc graphs, Information Processing Letters 40 N. 3 (1991), 123-129.

[50] W. Hsu, $O(m.n)$ algorithms for the recognition and isomorphism problems on circular-arc graphs, SIAM J. Comput. 24 (1995), 411-439.

[51] L. Hubert, Some applications of graph theory and related non-metric techniques to problems of approximate seriation: the case of symmetry proximity measures, British J. Math. Statist Psychology 27 (1974), 133-153.

[52] D. Johnson, The NP-completeness column: an ongoing guide, Journal of Algorithms 6 (1985), 434-451.

[53] R. Karp, Reducibility among combinatorial problems, en R. Miller y J. Thatcher (eds.), Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York (1972), 85-103.

[54] T. Kashiwabara, S. Masuda, K. Nakajima and T. Fujisawa, Polynomial Time Algorithms on Circular-Arc Overlap Graphs, Networks 21 (1991), 195-203.

[55] A. Kempe, On the geographical problem of the four colours, Amer. J. Math. 2 (1879), 193-200.

[56] L. Khachian, A polynomial algorithm in linear programming, Soviet Math. Dokl. 20 (1979), 191-194.

[57] G. Kirchhoff, On the solution of the equations obtained from the investigation of the linear distribution of galvanic currents, Ann. Phys. Chem. 72 (1847), 497-508.

[58] V. Klee, What are the intersection graphs of arcs in a circle ?, Amer. Math. Monthly 76 (1969), N.7, 810-813.

[59] D. Knuth, The Art of Computer Programming, Vol. 1, Addison-Wesley (1969).

[60] A. Lubiw, Short-chorded and perfect graphs, Journal of Combinatorial Theory B 51 (1991), 24-33.

[61] F. Maffray, Personal communication, 1999.

[62] S. Massuda and K. Nakajima, An optimal algorithm for finding a maximum independent set of a circular-arc graph, SIAM J. Comput. 17 (1988), 41-52.

[63] S. Massuda, K. Nakajima, T. Kashiwabara and T. Fujisawa, Efficient algorithms for finding maximum cliques of an overlap graph, Networks 20 (1990), 157-171.

[64] T. McKee and F. McMorris, Topics in Intersection Graph Theory (SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999).

[65] W. Naji, Reconnaissance des graphes de cordes, Discrete Math. 54 (1985), 329-337.

[66] J. Orlin, M. Bonuccelli and D. Bovet, An $O(n^2)$ algorithm for coloring proper circular-arc graphs, SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 2 (1981), 88-93.

[67] E. Prisner, Graphs with few cliques, In Y. Alavi and A. Schwenk (eds.), Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proceedings of the 7th. Quadrennial International Conference on the Theory and Applications (John Wiley and Sons, 1995), 945-956.

[68] R. Read, D. Rotem and J. Urrutia, Orientations of circle graphs, Journal of Graph Theory 6 (1982), 325-341.

[69] F. Roberts, Discrete Mathematical Models, with Applications to Social, Biological, and Enviromental Problems, (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976).

[70] F. Roberts, Graph Theory and its Applications to Problems of Society, NFS-CBMS Monograph N 29, (SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1978).

[71] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, The Four Color Theorem, J. of Comb. Theory Serie B 70 (1997), 2-44.

[72] D. Rotem and J. Urrutia, Finding maximum cliques in circle graphs, Networks 11 (1981), 269-278.

[73] D. Skrien, A relationship between triangulated graphs, comparability graphs, proper interval graphs, proper circular-arc graphs and nested interval graphs, Journal of Graph Theory 6 (1982), 309-316.

[74] J. Spinrad, Circular-arc graphs with clique cover number two, Journal of Comb. Theory B 44, (1988), 300-306.

[75] J. Spinrad, Recognition of circle graphs, Journal of Algorithms, 16 (2), (1994), 264-282.

[76] J. Spinrad, Representations of graphs, book manuscript (1997).

[77] J. Spinrad, Personal communication, 1998.

[78] F. Stahl, Circular genetic maps, J. Cell Physiol. 70 (Suppl. 1) (1967), 1-12.

[79] K. Stouffers, Scheduling of traffic lights - A new approach, Transportation Res. 2 (1968), 199-234.

[80] L. Sun, Two classes of perfect graphs, Journal of Combinatorial Theory B 53 (1991), 273-291.

[81] J.J. Sylvester, Chemistry and algebra, Nature 17 (1877-8), 284, Math. Papers Vol. 3, 103-104.

[82] J. Szwarcfiter, On edge transitivity of directed graphs, Discrete Mathematics 141 (1995), 227-235.

[83] J. Szwarcfiter, Recognizing clique-Helly graphs, Ars Combinatoria 45 (1997), 29-32.

[84] S. Tsukiyama, M. Idle, H. Ariyoshi and Y. Shirakawa, A new algorithm for generating all the maximal independent sets, SIAM Journal on Computing, Vol. 6. N. 3 (1977), 505-517.

[85] A. Tucker, Two characterizations of proper circular-arc graphs, Doctoral dissertation, Stanford Operations Research Department, (1969).

[86] A. Tucker, Characterizing circular-arc graphs, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 1257-1260.

[87] A. Tucker, Matrix characterizations of circular-arc graphs, Pacific J. Math. 38 (1971), 535-545.

[88] A. Tucker, Structure theorems for some circular-arc graphs, Discrete Mathematics 7 (1974), 167-195.

[89] A.Tucker, Coloring a family of circular-arc graphs, SIAM J. Appl. Math. 29 (1975), 493-502.

[90] A. Tucker, An efficient test for circular-arc graphs, SIAM J. Comput. 9 (1980), 1-24.

[91] A. Tucker, Coloring Perfect $(K_4 - e)$-free graphs, Journal of Combinatorial Theory B 42 (1987), 313-318.

[92] Z. Tuza, Covering all cliques of a graph, Discrete Mathematics 86 (1990), 117-126.

[93] O. Veblen, Linear Graphs, Analysis Situs (American Mathematical Society Colloquium Lectures 1916), New York (1922).