

TESIS DE LICENCIATURA

COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL EN
PROBLEMAS DE MODIFICACIÓN
DE ARISTAS EN GRAFOS

Pablo Burzyn
pburzyn@dc.uba.ar

Director: Dr. Guillermo A. Durán

Co-Directora: Lic. Flavia Bonomo

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Resumen

Los problemas de modificación de aristas se refieren a la realización de pequeños cambios (en lo posible mínimos) en el conjunto de aristas de un grafo con el objetivo de obtener un nuevo grafo con una propiedad deseada. Los cambios se pueden lograr agregando nuevas aristas al grafo (problema conocido como *agregado*), eliminando aristas existentes (*eliminación*) o una combinación de ambas acciones (*edición*).

Los problemas de modificación de aristas en grafos son de interés en la teoría de grafos, con aplicaciones en varios campos, incluyendo la biología molecular y el álgebra numérica.

La complejidad computacional de una gran variedad de problemas de modificación de aristas fue estudiada por distintos autores. La mayoría de los problemas resultaron ser NP-hard.

En esta tesis se presentan nuevos resultados de complejidad para problemas de modificación de aristas en clases conocidas de grafos que aún no habían sido estudiados. Estas clases incluyen, entre otros, a los grafos permutación, a los grafos circulares y a los grafos débilmente cordales.

A mi familia

Agradecimientos

A Willy, porque me confirmó que es un tipo de primera, que se toma el trabajo en serio y no deja nada librado al azar. Fue una muy buena decisión haberlo elegido como director de esta tesis.

A Flavia, por toda su colaboración, por sus correcciones pertinentes y su claridad para ayudarme a escribir esas demostraciones interminables.

A Martín, Alejo, Javier, Dani T., Mecha, Dani B., Esteban, Mario, Matías, Leo, Diego, Analía, Gabriel y el Pelado (más todos los que me estoy olvidando), por compartir conmigo estos años de carrera, incluyendo esas largas y divertidas jornadas en la biblioteca del pabellón 2, y hacerme disfrutar con amigos mi paso como alumno por esta facultad.

A toda la gente de Algoritmos 2, alumnos y docentes, porque junto a ellos aprendí que la docencia forma una parte importante de mi vida.

A la gente del trabajo, con la que comparto gran parte de mi tiempo, por aguantarme hablando de teoremas raros y dibujando grafos, más raros aún, en horario laboral.

A Nico, Noches, Apo y el Negro, por ser los amigos que siempre están.

A mis hermanos Dalia y Ale, porque siempre están cuando los necesito, siempre tienen la palabra justa, la sonrisa o la mirada compinche que sólo un hermano te puede dar.

A mi mamá Mirta y a mi papá Enrique, porque son lo más grande que hay. No tengo palabras para expresar todo lo que los quiero y admiro, y si me recibo es gracias a la educación y al amor que me brindaron y me siguen brindando día a día.

Y finalmente a Lu, esa persona hermosa que un día descubrí y que me cambió la vida. Le agradezco por ser mi compañera, mi confidente, por jugarse por mí todos los días, por darle alegría a mi vida y no dejarme bajar nunca los brazos.

Índice

1	Introducción	1
1.1	Definiciones básicas y notación	1
1.2	Clases de grafos	5
1.3	Complejidad algorítmica	8
2	Problemas de modificación de aristas en grafos	10
2.1	Definición de los problemas	10
2.2	Motivación	12
2.3	Un poco de historia	14
2.4	Búsqueda de buenas soluciones	17
2.4.1	Complejidad parametrizada	17
2.4.2	Grafos con grado acotado	19
2.5	Resultados básicos	20
2.6	Resumen de los problemas resueltos	21
3	Nuevos Resultados	22
3.1	Eliminación de aristas para grafos permutación	24
3.2	Edición de aristas para grafos de intervalos	28
3.3	Edición de aristas para grafos permutación	35
3.4	Eliminación de aristas para grafos puente	46
3.5	Eliminación de aristas para grafos débilmente cordales	49
3.6	Resultados generales	52
3.6.1	Problemas de modificación de aristas para grafos clique- Helly II	52
3.6.2	Resultados para grafos bipartitos	54
4	Conclusiones y trabajo futuro	57

Capítulo 1

Introducción

1.1 Definiciones básicas y notación

Denotamos un grafo G por un par $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ representa un conjunto finito de vértices (o nodos), y $E(G)$, un conjunto de pares no ordenados de vértices de G , llamados aristas. Definimos $n = |V(G)|$ y $m = |E(G)|$, donde $|C|$ indica la cantidad de elementos del conjunto C . Muchas veces nos referiremos a $V(G)$ y a $E(G)$ como V y E respectivamente.

Un vértice v es adyacente a otro vértice w en G si $(v, w) \in E(G)$. Decimos que v y w son los extremos de la arista. El vecindario abierto de un vértice v es el conjunto $N(v)$ que consiste de todos los vértices adyacentes a v . El vecindario cerrado $N[v]$ de un vértice v es el vecindario abierto al que se le agrega el nodo v .

Un vértice v es universal cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$. Un vértice v es aislado cuando $N(v) = \emptyset$. El grado de un vértice v es la cardinalidad del conjunto $N(v)$. El grado máximo de un grafo $G = (V, E)$ (o, directamente, grado de un grafo) es el máximo grado de un vértice $v \in V$.

Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito si V puede partitionarse en 2 subconjuntos P y Q tales que toda arista perteneciente a E tiene un extremo en P y otro en Q . La notación utilizada para referirse a un grafo bipartito es $G = (P, Q, E)$.

El complemento de un grafo G , denotado por \overline{G} , es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices de G y tal que dos vértices distintos son adyacentes en \overline{G} si y sólo si no son adyacentes en G . Si $G = (U, V, E)$ es bipartito, entonces su complemento bipartito es el grafo $\overline{G} = (U, V, \overline{E})$, donde $\overline{E} = (U \times V) \setminus E$.

Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq$

$E(G) \cap (V(H) \times V(H))$. Si $V(H) = V(G)$, decimos que H es un subgrafo generador de G . Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de G inducido por X es el subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en X .

Un grafo H es un supergrafo de un grafo G si $V(G) \subseteq V(H)$ y $E(G) \subseteq E(H) \cap (V(G) \times V(G))$. Si $V(H) = V(G)$, decimos que H es un supergrafo generado por G .

Dos grafos G y H son isomorfos si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que conserva las adyacencias. En este caso, notamos $G = H$.

Decimos que un camino en un grafo G es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, \dots, v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, para $1 \leq i \leq k - 1$. Una cuerda en P es una arista que une dos vértices no consecutivos de P . Llamamos P_k al camino sin cuerdas inducido por k vértices.

Un circuito en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, \dots, v_k$, no necesariamente distintos, donde $v_1 = v_k$, y además $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, para $1 \leq i \leq k - 1$.

Un ciclo en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$, donde v_1, \dots, v_k es un camino, v_1 es adyacente a v_k , $v_1 = v_{k+1}$ y $k \geq 3$. Una cuerda en C es cualquier cuerda del camino v_1, \dots, v_k . Si los vértices que une la cuerda en C están a distancia 2, decimos que la cuerda es corta. Un ciclo es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos C_k al ciclo inducido por k vértices (C_3 es también llamado triángulo).

Dado un grafo G , un puente de un ciclo C es un camino en G que une dos vértices no consecutivos de C , y que es más corto que los otros dos caminos de C que unen esos vértices.

Un grafo G es conexo si para todo par de vértices distintos v y w de G , existe un camino de v a w .

Un grafo G es completo si cualquier par de vértices distintos de G son adyacentes. Llamamos K_n al grafo completo con n vértices.

Un conjunto independiente de un grafo G es un conjunto $I \subseteq V$ tal que para ningún par de vértices $x, y \in I$ ocurre que x e y son adyacentes en G .

Un conjunto de vértices M de un grafo G es un subgrafo completo si el subgrafo inducido por M es completo. Una clique es un subgrafo completo maximal de G . Una biclique B de un grafo $G = (V, E)$ es un par de subconjuntos independientes (B_1, B_2) de V , tal que la arista $\{a, b\} \in E \forall a \in B_1$ y

$\forall b \in B_2$. O sea, una biclique es un subgrafo inducido bipartito completo.

Se define $\omega(G)$ como el tamaño de la clique máxima de G , y $\chi(G)$ (el número cromático de G) como la mínima cantidad de colores necesaria para colorear los vértices de G de modo que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color.

Un grafo G es un diamante si es isomorfo a $K_4 - e$, para e cualquier arista de K_4 . Un grafo es una rueda W_j si es isomorfo a un ciclo inducido C_j al que se le agrega un vértice universal. Un grafo es un abanico F_j si es isomorfo a un camino inducido P_j al que se le agrega un vértice universal.

Para cualquier grafo H , denotamos con $G \cup H$ la unión de los grafos disjuntos G y H , donde ninguna arista conecta un vértice de G con uno de H . Análogamente, denotamos con $G + H$ al grafo obtenido a partir de la unión de G y H y conectando cada vértice de G con todos los vértices de H .

Dado un grafo $G = (V, E)$, se dice que una arista $e = (u, v) \in E$ está subdividida si es eliminada y reemplazada por 2 nuevas aristas (u, w) y (w, v) incidentes a un nuevo nodo w . Se dice que un grafo G_1 es homeomorfo a otro grafo G_2 si existe un grafo G_3 tal que tanto G_1 como G_2 pueden obtenerse de G_3 a partir de una secuencia (posiblemente vacía) de subdivisiones de sus aristas.

Dado un grafo $G = (V, E)$, se define la contracción de una arista $(v, w) \in E$ como el reemplazo de los vértices v y w por un vértice x que es adyacente a todos los vecinos de v y de w . Si existía en V un vértice y tal que $(v, y) \in E$ y $(w, y) \in E$, en el nuevo grafo queda definida una única arista (x, y) .

Un grafo G es un *minor* de un grafo H si G se puede obtener de H a partir de cero o más eliminaciones de vértices, eliminaciones de aristas y/o contracciones de aristas.

Un subconjunto $V' \subseteq V$ es un conjunto de corte de un grafo conexo G si el subgrafo de G inducido por $(V \setminus V')$ no es conexo (donde “ \setminus ” representa a la diferencia de conjuntos). Un vértice x es un punto de corte de G si $\{x\}$ es un conjunto de corte de G . Un grafo G es 2-conectado si no tiene puntos de corte.

Un par no ordenado $\{u, v\}$ de nodos distintos en G es un par de separación si existen 2 subgrafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ que satisfacen estas tres condiciones:

- $V(G) = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \{u, v\}$
- $E(G) = E_1 \cup E_2, |E_1| \geq 2, |E_2| \geq 2$

- Existe un ciclo $C(e_1, e_2)$ en G que contiene alguna $e_1 \in E_1$ y alguna $e_2 \in E_2$ (contiene necesariamente a los nodos u y v)

Un grafo 3-conectado es un grafo 2-conectado que no tiene ningun par de separación. Las componentes 3-conectadas de un grafo G son los *minors* maximales 3-conectados de G .

Una familia de subconjuntos S satisface la propiedad de Helly cuando toda subfamilia de S consistente en subconjuntos que se intersecan de a pares tiene intersección no vacía.

Una propiedad Π en grafos es hereditaria cuando se verifica que si un grafo tiene la propiedad, entonces cualquier subgrafo inducido de él también la tiene. Se dice que Π es hereditaria en subgrafos si ocurre que si G satisface Π , entonces todo subgrafo de G también la satisface. Se dice que Π es ancestral si ocurre que si G satisface Π , entonces todo supergrafo de G también la satisface.

Para un propiedad de grafos Π , se define la propiedad complementaria $\bar{\Pi}$ de la siguiente manera: Para todo grafo G , G satisface $\bar{\Pi}$ si y sólo si \bar{G} satisface Π . Ejemplos de propiedades complementarias son co-comparabilidad y co-cordalidad.

Se dice que una propiedad Π es trivial si la satisfacen absolutamente todos los grafos. Análogamente, una propiedad Π es no trivial si existe algún grafo que no la satisface.

Una propiedad Π es determinada por las componentes 3-conectadas cuando un grafo G satisface Π si y solo si G_i satisface Π para toda componente 3-conectada G_i de G .

Definiciones no dadas aquí pueden encontrarse en [16], [26] o [33].

1.2 Clases de grafos

En esta sección se presenta un resumen de las clases de grafos que aparecen referenciadas a lo largo del trabajo.

Un grafo G es perfecto si para todo subgrafo inducido H de G , se cumple que $\chi(H) = \omega(H)$.

Un grafo de comparabilidad es un grafo cuyas aristas pueden ser transitivamente orientadas, es decir, existe una orientación F de sus aristas para la cual si $(a, b), (b, c) \in F$ implica que $(a, c) \in F$.

Consideremos una familia finita de conjuntos no vacíos. El grafo intersección de esta familia es obtenido representando cada conjunto por un vértice, conectando dos vértices por un arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan. Es sencillo probar que todo grafo es un grafo intersección de alguna familia. El grafo *overlap* de esta familia se obtiene representando cada conjunto por un vértice, conectando dos vértices por una arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan pero ninguno de los dos está incluido en el otro (diremos en este caso que los conjuntos se superponen). Es fácil también demostrar que todo grafo es un grafo *overlap* de alguna familia.

Los grafos intersección han recibido mucha atención en el estudio de teoría algorítmica de grafos y sus aplicaciones (por ej. ver [26]). Algunas clases muy estudiadas de grafos intersección son los grafos de intervalos, los arco-circulares, los circulares, los de permutación, y los grafos clique.

Un grafo arco-circular es el grafo intersección de arcos alrededor de un círculo. Un grafo G es arco-circular propio si existe una representación arco-circular de G , tal que ningún arco esté contenido en forma propia en otro. Un grafo G es arco-circular unitario si existe una representación arco-circular de G , tal que todos sus arcos tengan la misma longitud. Un grafo G es arco-circular Helly si existe una representación arco-circular de G , tal que los arcos satisfagan la propiedad de Helly.

Un grafo es clique-Helly si sus cliques satisfacen la propiedad de Helly.

Un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo. Un grafo G es circular Helly si existe un modelo de cuerdas para G , de manera que las cuerdas satisfagan la propiedad de Helly. Un grafo G es circular clique-Helly si G es circular y clique-Helly. Un grafo G es circular unitario si existe un modelo de cuerdas para G , de manera que todas las cuerdas tengan la misma longitud.

Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dos rectas paralelas en el plano, tales que hay n puntos etiquetados con $1, 2, \dots, n$ tanto en \mathcal{L}_1 como en \mathcal{L}_2 . Los segmentos L_i conectan el punto i de \mathcal{L}_1 con el punto i de \mathcal{L}_2 . Sea $G_{\mathcal{L}} = (\{1, 2, \dots, n\}, E_{\mathcal{L}})$ con $(i, j) \in E_{\mathcal{L}}$ si L_i y L_j se intersectan (es decir, si se cruzan). Decimos que un grafo G es un grafo permutación si hay un modelo de intersecciones \mathcal{L} tal que $G = G_{\mathcal{L}}$.

Un grafo de intervalos es el grafo intersección de intervalos en la recta real. Un grafo G es de intervalos unitario si existe una representación de intervalos de G , tal que todos los intervalos tengan la misma longitud. Un grafo G es de intervalos propio si existe una representación de intervalos de G en la recta real, tal que ningún intervalo esté contenido en otro. Roberts demostró en [50] que un grafo G es de intervalos unitario si y sólo si es de intervalos propio.

Un grafo G es *containment* de intervalos si existe una representación de intervalos en la recta real de G , tal que hay 2 nodos adyacentes en G si y sólo si el intervalo correspondiente a uno de esos nodos está incluido dentro del intervalo correspondiente al otro nodo. Dushnik y Miller demostraron en [15] que los grafos *containment* de intervalos son equivalentes a los grafos permutación.

Un grafo *overlap* de intervalos (conocidos en la literatura como grafos overlap) es el grafo *overlap* de intervalos en la recta real. Gavril demostró en [24] que son equivalentes a los grafos circulares.

Un grafo G es cordal (o triangulado) si G no contiene al ciclo inducido C_k como subgrafo inducido, para $k \geq 4$. Un grafo G es débilmente cordal (o débilmente triangulado) si tanto G como \overline{G} no contienen al ciclo inducido C_k como subgrafo inducido, para $k \geq 5$.

Un grafo G es un grafo *cluster* si toda componente conexa de G es un grafo completo.

Un grafo G es cúbico si todos sus nodos tienen grado 3.

Un grafo *split* es un grafo cuyos vértices pueden ser particionados en dos subconjuntos, de manera tal que uno de ellos induzca una clique y el otro induzca un conjunto independiente.

Un grafo bipartito $G = (P, Q, E)$ es un grafo cadena si existe un ordenamiento π de P , $\pi : P \rightarrow \{1, \dots, |P|\}$, tal que $N(\pi^{-1}(1)) \subseteq N(\pi^{-1}(2)) \subseteq \dots \subseteq N(\pi^{-1}(|P|))$.

Un grafo $G = (V, E)$ es *threshold* si existe una partición (K, I) de V tal que K induce una clique, I induce un conjunto independiente, y el grafo

bipartito $(K, I, E \cap (K \times I))$ es un grafo cadena.

Una tripla asteroidal es un conjunto de tres vértices independientes (o sea, no adyacentes si los tomamos de a pares) tales que hay un camino entre dos cualesquiera de ellos que evita el vecindario cerrado del tercer vértice. Un grafo es libre de triplas asteroidales (AT-free) si no contiene ninguna de estas triplas. Muchas clases de grafos son AT-free, entre ellas se encuentran los grafos de intervalos y los de co-comparabilidad [9].

Un grafo se llama cografo si no contiene a P_4 como subgrafo inducido. Un grafo es trivialmente perfecto si es un cografo y no contiene como subgrafo inducido a C_4 .

Un grafo puente es aquél que para todo ciclo C de longitud al menos 4 contiene dos vértices conectados por un puente.

Una completa recopilación sobre clases de grafos aparece en [9].

1.3 Complejidad algorítmica

Un problema algorítmico $\pi(I, Q)$ consta de un conjunto I de todas las posibles entradas para el problema, llamado el conjunto de instancias, y de una pregunta Q sobre esas instancias. Resolver uno de estos problemas consiste en desarrollar un algoritmo cuya entrada es una instancia del problema y cuya salida es una respuesta a la pregunta del problema.

Decimos que un problema es de decisión cuando las posibles respuestas a la pregunta son SI ó NO. Por ejemplo, π podría ser el siguiente problema: “dado un grafo G , ¿es de intervalos?”. El conjunto de instancias es el conjunto de todos los grafos y la pregunta es saber si el grafo dado es o no de intervalos. El problema dado no sólo es de decisión sino que, en particular, es un problema de reconocimiento. Es de sumo interés tanto desde el punto de vista teórico como de las aplicaciones estudiar problemas de reconocimiento para las diferentes clases de grafos.

Un problema es de optimización cuando lo que se busca a través de la pregunta es la solución óptima para el problema formulado. Por ejemplo, “dado un grafo G , ¿cuánto vale $\chi(G)$?”

Usualmente, los problemas de optimización tienen su variante de decisión. En el caso del coloreo será: “dado un grafo G y un entero k positivo, ¿existe un coloreo de G con menos de k colores?”

Un problema es de enumeración cuando lo que se busca no es la existencia de una solución o la solución óptima sino la cantidad de soluciones para el problema formulado. Por ejemplo, “dado un grafo G y un entero k positivo, ¿de cuántas formas distintas es posible colorear G con k colores?”

Diremos que un algoritmo es polinomial cuando el número de operaciones que efectúa está acotado por una función polinomial en el tamaño de su entrada. Si el tamaño de la entrada es n y la función polinomial es $f(n)$, decimos que el algoritmo tiene complejidad $O(f(n))$. Los problemas de decisión para los que existen algoritmos polinomiales constituyen la clase P y son llamados polinomiales.

Un problema de decisión es no-determinístico polinomial cuando cualquier instancia que produce respuesta SI posee una comprobación de correctitud (también llamada certificado) verificable en tiempo polinomial en el tamaño de la instancia. Estos problemas de decisión pertenecen a la clase NP.

Claramente, $P \subseteq NP$. Sin embargo, no se sabe si esta inclusión es estricta: uno de los principales problemas abiertos en informática teórica es saber si $P \neq NP$.

Un problema de decisión pertenece a la clase co-NP cuando cualquier instancia que produce respuesta NO posee un certificado polinomial en el tamaño de la instancia.

Sean $\pi_1(I_1, Q_1)$ y $\pi_2(I_2, Q_2)$ dos problemas de decisión. Una transformación polinomial de π_1 en π_2 es una función $f : I_1 \rightarrow I_2$ que satisface las siguientes dos condiciones:

1. f puede computarse en tiempo polinomial.
2. Para toda instancia $D \in I_1$, D produce respuesta SI para π_1 si y sólo si $f(D)$ produce respuesta SI para π_2 .

Una definición esencial en la teoría de complejidad es la definición de problema NP-completo. Un problema de decisión π pertenece a la clase NP-completo (NPC) cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\pi \in \text{NP}$.
- Para todo problema $\pi' \in \text{NP}$, existe una transformación polinomial de π' en π .

el problema de decisión π es NP-hard cuando se satisface la segunda condición:

- Para todo problema $\pi' \in \text{NP}$, existe una transformación polinomial de π' en π .

La teoría de NP-completitud fue iniciada por Cook en 1971 [12]. Allí probó que el problema de satisfactibilidad de la lógica matemática es NP-completo, en un resultado que se conoce como el Teorema de Cook. Primero Karp [36], y tiempo después Garey y Johnson [22], presentaron largas listas de problemas NP-completos en el campo de la combinatoria, la lógica, la teoría de conjuntos, la teoría de grafos y otras áreas de la matemática discreta.

La técnica standard para probar que un problema π es NP-completo es la siguiente: elegir en forma apropiada un problema π' que ya sabemos que es NP-completo y luego probar que $\pi \in \text{NP}$ y que π' es transformable polinomialmente en π . Si sólo probáramos esta segunda parte, habríamos probado que el problema π es NP-hard.

No se conoce ningún algoritmo polinomial para resolver un problema NP-completo. Surge de la definición de NP-completitud que si se encontrara un algoritmo polinomial para un problema en esta clase, todo problema en NP sería polinomial (y estaría probado, en consecuencia, que $P = \text{NP}$).

Capítulo 2

Problemas de modificación de aristas en grafos

2.1 Definición de los problemas

Los problemas de modificación de aristas se refieren a la realización de pequeños cambios (en lo posible mínimos) en el conjunto de aristas de un grafo determinado con el objetivo de obtener un nuevo grafo con una propiedad deseada. Estos problemas son agregado, eliminación y edición de aristas (conocidos en la bibliografía como Completion, Deletion y Editing, respectivamente).

Sea Π una propiedad de grafos. En el problema de Π -edición la entrada es un grafo $G = (V, E)$, y el objetivo es encontrar un conjunto mínimo $F \subseteq V \times V$ tal que $G' = (V, E \Delta F)$ satisfaga Π , donde $E \Delta F$ denota la diferencia simétrica entre E y F . En el problema de Π -eliminación solamente se permite eliminar aristas, es decir, $F \subseteq E$. Este problema es equivalente a encontrar un subgrafo generador máximo de G que cumpla con la propiedad Π . En el problema de Π -agregado solamente se permite agregar aristas, es decir, $F \cap E = \emptyset$. Este problema es equivalente a encontrar un supergrafo generado mínimo de G que cumpla con la propiedad Π .

Si F es un conjunto de aristas tal que $G' = (V, E \cup F) \in \Pi$ y $|F| \leq k$, entonces decimos que F es un conjunto de k -agregado con respecto a Π . De la misma manera se pueden definir los conjuntos de k -eliminación y de k -edición.

Dado un grafo $G = (V, E)$, la versión parametrizada del problema de Π -agregado denotada por Π -agregado(k) pregunta si existe un conjunto de aristas A de manera tal que $|A| \leq k$ y $G' = (V, E \cup A)$ cumple con la propiedad Π . De la misma manera se puede definir la versión parametrizada de los problemas de Π -eliminación y Π -edición.

Se pueden definir los problemas de modificación de aristas para grafos bipartitos de manera análoga. Sea Π una propiedad de grafos bipartitos. En el problema de Π -edición bipartita la entrada es un grafo $G = (V_1, V_2, E)$, y el objetivo es encontrar un conjunto mínimo $F \subseteq V_1 \times V_2$ tal que $G' = (V_1, V_2, E \Delta F)$ satisfaga Π . En el problema de Π -eliminación bipartita solamente se permite eliminar aristas, es decir, $F \subseteq E$. Este problema es equivalente al problema de Π -eliminación. En el problema de Π -agregado bipartito solamente se permite agregar aristas, es decir, $F \cap E = \emptyset$.

Dado que satisfacer una propiedad Π determina una clase de grafos, a lo largo de esta tesis se utilizarán indistintamente los términos Π -eliminación y “eliminación de aristas para grafos Π ” (lo mismo ocurre para Π -agregado y Π -edición). Por ejemplo, si la propiedad Π es “ser un grafo permutación”, nos referiremos al problema de Π -eliminación como el problema de eliminación de aristas para grafos permutación, es decir, eliminar la menor cantidad posible de aristas de un grafo determinado para que el grafo resultante sea permutación.

2.2 Motivación

Los problemas de modificación de vértices y aristas en grafos son de gran interés en la teoría de grafos. Ya en 1979, Garey y Johnson mencionan 18 problemas diferentes de modificación de aristas y vértices [22]. Los problemas de modificación de aristas tienen aplicaciones en varios campos, incluyendo la biología molecular y el álgebra numérica.

Los problemas de modificación de aristas para grafos de intervalos tienen importantes aplicaciones en biología molecular [3, 25, 27]. Para replicar y estudiar un determinado tramo contiguo de ADN (un cromosoma o parte de él), usando técnicas mecánicas o encimáticas se cortan copias del ADN base en segmentos más pequeños, los cuáles pueden ser insertados en la molécula de ADN de otro organismo huésped. El huésped preserva, replica y reproduce el fragmento del ADN base como si fuera parte de su propio genoma. En particular, numerosas copias del fragmento pueden ser generadas utilizando el sistema de reproducción del huésped, logrando que todas ellas sean idénticas al fragmento original. Este proceso es llamado *clonación*, y los fragmentos preservados son llamados *clones*. En el proceso de *clonación* se pierde toda la información de la ubicación relativa de los clones en relación al genoma base. Por otro lado, como el procedimiento es aplicado a muchos fragmentos del genoma base, dichos fragmentos pueden superponerse. El problema de reconstruir la posición relativa de los *clones* a lo largo del tramo original de ADN, basado en la redundancia que aparece en la superposición, se conoce como *Mapeo Físico*. La clave para la construcción de este mapeo es determinar la superposición (intersección) entre pares de *clones*. Existen varias técnicas biológicas para determinar si dos *clones* se superponen. Todas esas técnicas involucran la obtención de cierta información parcial de los contenidos de un *clon*, que se conoce como la *huella digital* del *clon*. Intuitivamente, dos *clones* se deberían intersecar si sus *huellas digitales* son lo suficientemente similares. El problema resultante se puede modelar de la siguiente manera: construir un grafo G cuyos vértices correspondan a los fragmentos y existe una arista entre dos vértices si y sólo si existe alguna superposición entre los fragmentos correspondientes. Idealmente, G debería ser un grafo de intervalos, y el problema de reconstrucción se trasladaría a encontrar una representación para G . Sin embargo, los datos experimentales son propensos a errores, y G sólo está “cerca” de ser un grafo de intervalos. Dependiendo de la tecnología usada y el tipo de errores experimentales obtenidos, nos encontramos frente a los problemas de eliminación, agregado y edición de aristas tanto para grafos de intervalos como para grafos de intervalos unitarios.

El agregado de aristas para grafos cordales (problema también conocido como *minimum fill-in*), es útil para resolver la eliminación Gaussiana en matrices esparsas, simétricas y definidas positivas [51]. Como el tiempo de

computación y las necesidades de almacenamiento dependen de cuán esparsa sea la matriz, es deseable encontrar un orden de eliminación tal que se introduzcan en la matriz el mínimo número de elementos nuevos distintos de cero. Rose mostró [51] que este problema es equivalente al *minimum fill-in*.

El problema de eliminación de aristas para grafos cordales fue propuesto para resolver el problema de encontrar la clique máxima. Algunas heurísticas para encontrar la clique máxima [56] apuntan a encontrar un subgrafo máximo del grafo de entrada que sea cordal. En dicho grafo la clique máxima puede encontrarse en tiempo polinomial.

El problema de *clustering* es un problema central de optimización con aplicaciones en numerosos campos, incluyendo la biología computacional, el procesamiento de imágenes, el diseño VLSI y muchos más. La entrada del problema es típicamente un conjunto de elementos y valores de similitud entre ellos tomándolos de a pares. El objetivo es particionar estos elementos en subconjuntos, que son llamados *clusters*, de manera tal que se satisfagan estos dos meta-criterios: *Homogeneidad* - los elementos que se encuentran en un mismo *cluster* son muy similares entre sí; y *Separación* - los elementos que pertenecen a distintos *clusters* son muy poco similares entre sí. De aquí surge el interés por los problemas de eliminación y edición de aristas para grafos *cluster*.

El problema de encontrar el subgrafo máximo que sea planar tiene aplicaciones en el trazado de circuitos electrónicos, distribución de instalaciones y herramientas para dibujar grafos.

Los problemas de modificación de aristas para grafos arco-circulares tienen aplicaciones en control del tránsito vehicular y diseño de semáforos [16, 26].

Finalmente, los resultados de complejidad de los problemas de modificación de aristas pueden ser muy importantes para hallar nuevos resultados de complejidad para otros problemas. Muchos de los problemas de grafos más conocidos y estudiados, tanto polinomiales (conectividad de grafos) como NP-completos (simple max-cut [22]), pueden formularse en forma de problemas de modificación de aristas, especificando apropiadamente la propiedad Π que se quiere obtener. Además, es importante conocer la complejidad computacional de los problemas a la hora de resolverlos en la práctica.

2.3 Un poco de historia

Se conocen fuertes resultados para problemas de eliminación de vértices: Lewis y Yannakakis [39] mostraron que para toda propiedad Π no trivial y hereditaria y un grafo G , el problema de encontrar el subgrafo máximo inducido de G que cumpla la propiedad Π es NP-hard.

No se conocen resultados tan generales para problemas de modificación de aristas, aunque se han logrado algunos resultados más particulares restringiéndose a algunas propiedades específicas de grafos.

El-Mallah y Colbourn [18] mostraron que el problema de eliminación de aristas correspondiente a cualquier clase H de grafos en cada uno de los siguientes casos es NP-hard:

1. H se puede definir a partir de un conjunto de subgrafos prohibidos, homeomorfos o *minors*, en donde cada elemento es un grafo 2-conectado con grado mínimo 3.
2. H se puede definir a partir de $K_4 - e$ (diamante) como subgrafo prohibido, homeomorfo o *minor*.
3. H se puede definir a partir de P_l , $l \geq 3$, el camino simple de l nodos, como subgrafo inducido prohibido.

Asano e Hirata [2] demostraron que los problemas de eliminación de aristas para obtener un subgrafo con la propiedad π son NP-hard si π es hereditaria en subgrafos y es determinada por las componentes 3-conectadas.

En [53] Sharan demuestra que el problema de Π -eliminación es NP-hard con respecto a cualquier propiedad Π que pueda ser caracterizada por un conjunto de subgrafos prohibidos inducidos conexos, libres de triángulos, y donde uno de los más pequeños (en función del número de vértices) posea una *cola*, es decir, un par de vértices adyacentes, uno de ellos con grado uno y el otro con grado dos.

Yannakakis [59] fue uno de los primeros en estudiar los problemas de eliminación de aristas. Demostró que los problemas de eliminación de aristas son NP-completos para las siguientes clases de grafos: (1) grafos sin ciclos de longitud específica l o de cualquier longitud $\leq l$, (2) grafos con grado máximo $r \geq 2$ y conexos, (3) grafos planares, (4) grafos de comparabilidad, (5) grafos bipartitos (problema del corte máximo), (6) digrafos transitivos.

En 1979, Garey y Johnson [22] declamaron que la complejidad del problema de agregado de aristas para grafos cordales (*minimum fill-in*) era uno de

los mayores problemas abiertos que había en ese momento. Más tarde Yannakakis probó que el agregado de aristas para grafos cadena (*chain graphs*) es NP-completo y redujo este problema al de agregado de aristas para grafos cordales, probando su NP-completitud [57]. Como se ve en [25], la NP-completitud del agregado de aristas para grafos de intervalos y de intervalos unitarios también aparece demostrada en [57]. La complejidad de una gran variedad de problemas de modificación de aristas fue estudiada por distintos autores. La mayoría de los problemas resultaron ser NP-hard.

Natanzon, Shamir y Sharan [45] analizaron la complejidad de los problemas de modificación de aristas para algunas de las clases de grafos más estudiadas. Muestran, entre otros resultados, que los problemas de eliminación de aristas son NP-hard para grafos perfectos, son NP-completos para grafos cadena, cordales, *split*, arco-circulares, arco-circulares propios, arco-circulares unitarios y AT-free; que los problemas de agregado de aristas son NP-hard para grafos perfectos, son NP-completos para grafos cadena, *split*, arco-circulares, arco-circulares propios y arco-circulares unitarios; y que los problemas de edición de aristas son NP-hard para grafos perfectos y de comparabilidad, aunque la complejidad computacional de los problemas de modificación de aristas en grafos perfectos pasa a ser NPC a partir de que se conocen algoritmos polinomiales para reconocer dicha clase [11, 13]. También demuestran que es NP-hard aproximar los problemas de modificación de aristas para grafos de comparabilidad con un factor de $\frac{18}{17}$. Por otro lado, en [45] demuestran una serie de resultados generales para relacionar entre sí distintos problemas de modificación de aristas. Estos resultados se presentan en la sección 2.5.

También se demostró la NP-completitud de algunas variantes al problema de agregado de aristas, en donde el grafo de entrada es pre-coloreado y el objetivo es encontrar un supergrafo que satisfaga una propiedad especificada, de manera tal que se pueda colorear adecuadamente con el coloreo de entrada. Goldberg [25] probó que el problema de agregado de aristas para grafos coloreados de intervalos unitarios es NP-completo. Golumbic [27] y Fellows [21] probaron que el problema de agregado de aristas para grafos coloreados de intervalos es NP-completo. Bodlaender y de Fluiter [3] fortalecieron este resultado mostrando que este último problema es NP-completo aún si el número de colores es a lo sumo 4. También dan un algoritmo cuadrático (en el número de vértices) para resolver el problema de agregado de aristas en grafos 3-coloreados. Bodlaender [4] además probó la NP-completitud del problema de agregado de aristas para grafos coloreados cordales. McMorris [43] mostró que este problema es polinomial cuando el número de colores está fijo.

Una generalización de los problemas de agregado de aristas para grafos coloreados es encontrar un supergrafo que satisfaga una propiedad deter-

minada y que no incluya ninguna arista perteneciente a un conjunto predeterminado de aristas prohibidas. A estos problemas se los conoce como problemas *sandwich*. Golombic y Shamir [29] probaron que el problema *sandwich* para grafos de intervalos es NP-completo. También demostraron que el problema *sandwich* para grafos de intervalos unitarios es NP-completo. Golombic, Kaplán y Shamir [28] probaron que los problemas *sandwich* para grafos cordales, de comparabilidad, permutación, arco-circulares, circulares, co-cordales y otras familias de grafos son NP-completos. También demostró que el problema *sandwich* es polinomial para grafos *split*, *threshold*, bipartitos, cografos, árboles y otras familias de grafos.

Shamir, Sharan y Tsur [52] estudiaron los problemas de modificación de aristas en grafos *cluster*. Probaron que los problemas de edición y de eliminación de aristas para esta clase son NP-completos, que es NP-hard aproximar el problema de edición de aristas con un factor constante, y que el problema de agregado de aristas para grafos *cluster* es polinomial. Mostraron también que si la solución deseada debe contener exactamente p *clusters*, el problema de edición de aristas es NP-completo para todo $p \geq 2$, que el problema de eliminación es polinomial para $p = 2$ pero NP-completo para $p > 2$, y que el problema de agregado es polinomial para todo p . Además exponen un algoritmo de aproximación con factor constante para el problema de edición cuando $p = 2$.

2.4 Búsqueda de buenas soluciones

Dada la intratabilidad de la mayoría de los problemas de modificación de aristas en grafos, como se pudo ver en la sección anterior, el estudio de muchos investigadores se focalizó en tratar de buscar soluciones positivas que permitan resolver los problemas en la práctica. Esto fue logrado a través de heurísticas y aproximaciones, trabajando con problemas restringidos, por ejemplo, con grafos de grado acotado o dejando un parámetro del problema fijo.

2.4.1 Complejidad parametrizada

Downey y Fellows iniciaron un análisis sistemático de la complejidad computacional de los problemas de decisión parametrizados [1, 14]. Una instancia de *un problema de decisión parametrizado* π es un par (x, k) donde k es el parámetro, y x es la entrada al problema (distinta al parámetro), con $|x| = n$. El interés en el estudio de estos problemas se deposita en aquellos que son NP-completos pero que tienen complejidad polinomial cuando el parámetro k es fijo. Sin embargo, la dependencia de la complejidad en k puede variar drásticamente: para algunos problemas (como PATHWIDTH) se conocen algoritmos con complejidad computacional $f(k)n^\alpha$, para α una constante cualquiera, mientras que para otros (como el problema de encontrar la clique máxima) los mejores algoritmos conocidos requieren $f(k)n^{g(k)}$ pasos. Luego, cuando k es fijo la complejidad para los primeros es polinomial, y en algunos casos lineal, independientemente de k , mientras que para los últimos el grado del polinomio depende de k . Un problema parametrizado es llamado *tratable con parámetro fijo* (*fixed parameter tractable*) si pertenece a la primera clase de problemas, es decir, si se puede resolver en complejidad temporal $O(f(k)pol(n))$, donde f es una función arbitraria sobre k solamente, y pol es una función polinomial sobre n solamente, independiente de k . La clase de todos los problemas de decisión parametrizados tratables con parámetro fijo se denota FPT. Por ejemplo, PATHWIDTH y VERTEX COVER son NP-hard para k variable, pero ambos se encuentran en FPT.

Downey y Fellows definieron una noción apropiada de reducción para problemas parametrizados de la siguiente manera: Sean π_1 y π_2 dos problemas de decisión parametrizados. Una *reducción parametrizada* de π_1 a π_2 es un algoritmo que, dada una instancia (x, k) para π_1 , decide si la respuesta es “Sí” en tiempo $O(f(k)pol(n))$, usando un oráculo para π_2 en instancias cuyo valor del parámetro no es mayor a $g(k)$, donde pol es una función polinomial sobre n solamente y f y g son funciones arbitrarias sobre k solamente. Luego, si π_1 reduce paramétricamente a π_2 y $\pi_2 \in \text{FPT}$, entonces π_1 también está en FPT.

Los problemas de decisión parametrizados se clasifican con respecto a la

jerarquía W . Para introducir esta noción, se necesitan algunas definiciones. Un *circuito de decisión booleano mixto* es un circuito booleano con una única salida y dos tipos de compuertas: 1) *compuertas pequeñas*, son compuertas Y , O con entrada doble y compuertas NO ; 2) *compuertas grandes*, son compuertas Y , O con entrada irrestricta. La *trama* de un circuito C es el número máximo de compuertas grandes en un camino entrada-salida en C . La *profundidad* de C es el número máximo de compuertas (grandes o pequeñas) en un camino entrada-salida en C . Sea F una familia de circuitos de decisión booleanos mixtos. Las instancias de “Sí” del problema parametrizado asociado a F , denotado π_F , son $\{(C, k) | C \in F \text{ acepta un vector de entrada con } k \text{ unos.}\}$. La clase $W[t]$ consiste en los problemas de decisión parametrizados que reducen paramétricamente a π_F , donde F es una familia de circuitos de decisión booleanos mixtos con profundidad acotada y cuya trama es a lo sumo t . Luego, $FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \dots$ es la jerarquía W . Downey y Fellows conjeturan que todas las inclusiones son propias [14].

Un problema π es $W[s]$ -*hard* si todo problema en $W[s]$ tiene una reducción parametrizada a π . Si π se encuentra tanto en $W[s]$ como en $W[s]$ -*hard*, entonces π es $W[s]$ -*completo*. Luego, se conjetura que todo problema que es *hard* para $W[s]$ para algún $s \geq 1$ no tiene un algoritmo que lo resuelva con complejidad menor a $f(k)n^\alpha$. Por ejemplo, DOMINATING SET es $W[2]$ -*completo* [14], y BANDWIDTH es $W[t]$ -*hard* para todo t [5]. En [1] se demuestra que INDEPENDENT SET es $W[1]$ -*completo*.

En [35] Kaplan, Shamir y Tarjan desarrollan un algoritmo para resolver el problema parametrizado de agregado de a lo sumo k aristas para que un grafo G sea cordal (*minimum fill-in problem*) cuyo orden es $O(k^2mn + f(k))$, donde n es la cantidad de vértices de G y m su cantidad de aristas. En particular este resultado implica que el problema es tratable con parámetro fijo (a este mismo resultado llegó paralelamente Cai en [10], exhibiendo que el problema se puede resolver en $O(4^k(k+1)^{-3/2}(m+n))$). También muestran que el problema parametrizado de agregado de aristas para grafos de intervalos propios está en FPT exhibiendo un simple algoritmo basado en árbol de búsqueda que lo resuelve en tiempo lineal. Similarmente, muestran que la versión parametrizada del problema de agregado de aristas para grafos fuertemente cordales se encuentra en FPT dando un algoritmo que lo resuelve en tiempo $O(m \log(n))$. Todos los algoritmos que presentan pueden enumerar todos los posibles k -agregados con las mismas cotas de tiempo.

En [10] Cai demuestra que el problema de decidir si un grafo G puede ser transformado en un grafo G' que cumpla con una propiedad hereditaria Π específica eliminando a lo sumo i vértices, a lo sumo j aristas, y agregando a lo sumo k aristas, donde i, j y k están fijos, es tratable con parámetro fijo cuando Π puede ser caracterizada por un conjunto finito de subgrafos inducidos prohibidos.

En [34] Kaplan y Shamir trabajan con dos problemas relacionados con la biología molecular. El primero consiste en saber si, dado un grafo G y una constante k , existe un supergrafo G' de G que sea de intervalos unitarios y tal que el tamaño de su clique máxima sea a lo sumo k (problema también conocido como agregado de aristas para grafos de intervalos propios con tamaño pequeño de clique máxima). El segundo consiste en saber si, dado un grafo G y un k -coloreo c de G , existe un supergrafo G' de G que también puede ser coloreado por c y que sea de intervalos unitarios (problema también conocido como agregado de aristas parametrizado para grafos de intervalos propios coloreados). Muestran que ambos problemas son polinomiales cuando k está fijo. Además prueban que el primer problema es equivalente a decidir si el BANDWIDTH de G es a lo sumo $k - 1$, lo que implica que es NP-hard y $W[t] - hard$ para todo t . También demuestran que el segundo problema es $W[1] - hard$. Esto implica que para k fijo ambos problemas no tendrían un algoritmo con $O(n^\alpha)$ que los resuelva, donde α es una constante independiente de k (este resultado depende de la veracidad de la conjetura de las inclusiones de Downey y Fellows). Por último, aclaran que los algoritmos presentados son impracticables para el rango de k requerido en el problema de *mapeo físico*, pero que sin embargo sus resultados demuestran que incorporar más restricciones biológicas al modelo puede causar una disminución en la complejidad.

2.4.2 Grafos con grado acotado

En [45] Natanzon, Shamir y Sharan muestran varios resultados positivos para problemas de eliminación y edición de aristas en grafos cuyo grado está acotado. Exhiben un algoritmo polinomial que, dado un grafo G con grado máximo d y dada una propiedad hereditaria Π que puede ser caracterizada por un conjunto finito de subgrafos prohibidos, donde cada subgrafo contiene a lo sumo t vértices, aproxima los problemas de Π -eliminación y Π -edición con un factor de td . También demuestran que si Π es una propiedad hereditaria tal que si $G = (V, E)$ satisface Π entonces $G_{V \setminus \{v\}} \cup v$ satisface Π para todo $v \in V$ (es decir, la propiedad se mantiene si se eliminan todas las aristas incidentes en un vértice v), entonces una solución óptima al problema de Π -edición en un grafo con grado máximo d produce un grafo con grado máximo $2d$. Además, demuestran que los siguientes problemas de modificación de aristas se pueden resolver en tiempo polinomial en grafos de grado acotado: eliminación de aristas para grafos cadena, *split* y *threshold*, y edición de aristas para grafos cadena y *threshold*.

Nota 2.1 En [22] se pueden encontrar las definiciones de los problemas de grafos que aparecen mencionados en esta sección.

2.5 Resultados básicos

En [45] Natanzon, Shamir y Sharan presentan una serie de resultados y observaciones sobre los problemas de modificación de aristas que ayudan a deducir resultados de complejidad en distintas clases de grafos a partir de resultados para familias de grafos relacionadas.

Proposición 2.2 *Si una propiedad de grafos Π es hereditaria en subgrafos, entonces Π -eliminación y Π -edición son polinomialmente equivalentes, y Π -agregado es no relevante.*

Un problema es no relevante si es trivial para todas las instancias. Por ejemplo, la planaridad es una propiedad hereditaria en subgrafos, luego el agregado de aristas para conseguir que un grafo sea planar es no relevante, ya que para todo grafo, o bien es planar, o bien no lo es pero tampoco se puede convertir en planar agregándole aristas.

Proposición 2.3 *Si una propiedad de grafos Π es ancestral, entonces ocurre que Π -agregado y Π -edición son polinomialmente equivalentes, y Π -eliminación es no relevante.*

Proposición 2.4 *Si Π y Π' son propiedades de grafos tales que para todo grafo G y dado un conjunto independiente S , G satisface Π si y sólo si $G \cup S$ satisface Π' , entonces Π -eliminación es polinomialmente reducible a Π' -eliminación. Si además Π es hereditaria, entonces el problema de Π -agregado (Π -edición) se puede reducir polinomialmente a Π' -agregado (Π' -edición).*

Proposición 2.5 *Si Π y Π' son propiedades de grafos tales que para todo grafo G y dada una clique K , G satisface Π si y sólo si $G+K$ satisface Π' , entonces Π -agregado es polinomialmente reducible a Π' -agregado. Si además Π es hereditaria, entonces el problema de Π -eliminación (Π -edición) es polinomialmente reducible a Π' -eliminación (Π' -edición).*

Corolario 2.5.1 *Los problemas de modificación de aristas para grafos permutación son polinomialmente reducibles a los correspondientes problemas de modificación de aristas para grafos circulares.*

Esto ocurre ya que un grafo es permutación si y sólo si es el grafo intersección de cuerdas en un círculo que admite un ecuador, es decir, una cuerda adicional que intersekte a todas las otras cuerdas [26]. Luego, G es permutación si y sólo si $G + K_1$ es circular.

Proposición 2.6 *Para toda propiedad de grafos Π , los problemas de Π -eliminación y $\bar{\Pi}$ -agregado son polinomialmente equivalentes.*

Proposición 2.7 *Para toda propiedad de grafos Π , Π -edición y $\bar{\Pi}$ -edición son polinomialmente equivalentes.*

2.6 Resumen de los problemas resueltos

A continuación se presenta una tabla con un resumen acerca de los resultados de complejidad obtenidos sobre problemas de modificación de aristas en grafos. Se incluyen también los resultados obtenidos en esta tesis.

Clases de grafos	Agregado	Eliminación	Edición
Perfecto	NPC [45]	NPC [45]	NPC [45]
Cordal	NPC [57]	NPC [53]	NPC [53]
Intervalos	NPC [57]	NPC [25]	NPC
Intervalos Unitarios	NPC [57]	NPC [25]	NPC
Arco-Circular	NPC [53]	NPC [53]	NPC
Arco-Circular Unitario	NPC [53]	NPC [53]	NPC
Arco-Circular Propio	NPC [53]	NPC [53]	NPC
Cadena	NPC [57]	NPC [53]	?
Comparabilidad	NPC [32]	NPC [58]	NPC [45]
Cografo	NPC [18]	NPC [18]	?
AT-Free	?	NPC [53]	?
<i>Threshold</i>	NPC [41]	NPC [41]	?
Bipartito	No relevante	NPC [23]	NPC [23]
<i>Split</i>	NPC [45]	NPC [45]	P [53]
<i>Cluster</i>	P [53]	NPC [18]	NPC [53]
Trivialmente Perfecto	NPC [57]	NPC [53]	?
Permutación	NPC	NPC	NPC
Circular	NPC	NPC	NPC
Débilmente Cordal	NPC	NPC	?
Puente	?	NPC	?
Clique-Helly Arco-Circular	NPC	NPC	NPC
Clique-Helly Cordal	NPC	NPC	NPC
Clique-Helly Perfecto	NPC	NPC	NPC
Clique-Helly de Comparabilidad	NPC	NPC	NPC
Clique-Helly Permutación	NPC	NPC	NPC

Tabla 2.1: Resumen de resultados de complejidad para problemas de modificación de aristas, donde los resultados que aparecen en negrita son los obtenidos en esta tesis y “?” indica que el problema aún continúa abierto.

Capítulo 3

Nuevos Resultados

En este capítulo se presentan los resultados más importantes conseguidos en esta tesis. La mayoría de los teoremas son resultados de NP-completitud para problemas de modificación de aristas en clases particulares de grafos, y al final se presentan algunos teoremas que involucran a familias de grafos.

A continuación se presenta la definición del “grafo triangular” de un grafo cúbico que se utilizará en varias demostraciones a lo largo de este capítulo.

Definición 3.1

Dado un grafo cúbico $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ($|V| = n$), definimos el grafo “triangular” $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$ convirtiendo cada vértice en un triángulo y manteniendo la propiedad de ser cúbico del grafo. Precisamente, el conjunto de vértices es

$$\widehat{V} = \{v_{ij}, v_{ik}, v_{il} \mid v_i \in V \text{ y } v_j, v_k, v_l \text{ son los nodos adyacentes a } v_i \text{ en } G\}$$

Llamaremos a v_{ij}, v_{ik}, v_{il} los “representantes” de v_i . Notar que $|\widehat{V}| = 3n$.

El conjunto de aristas \widehat{E} está formado por dos tipos de aristas,

$$\widehat{E} = E^{nuevas} \cup E^{viejas}$$

donde

1) $E^{nuevas} = \{(v_{ij}, v_{ik}), (v_{ij}, v_{il}), (v_{ik}, v_{il}) \mid v_i \in V \text{ y } v_j, v_k, v_l \text{ son los nodos adyacentes a } v_i \text{ en } G\}$, es decir, los representantes de cada $v_i \in V$ forman un triángulo en \widehat{G} .

2) $E^{viejas} = \{(v_{ij}, v_{ji}) \mid (v_i, v_j) \in E\}$. Notemos que todas las aristas de E^{viejas} no son incidentes entre sí. En otras palabras, la arista (v_{ij}, v_{ji}) conecta representantes de sus extremos originales, y para todo $v \in V$, cada una de

los 3 aristas originales incidentes en v en G es incidente en un representante distinto de v en \widehat{G} .

Llamaremos Nuevas a las aristas en E^{nuevas} y Viejas a las aristas en E^{viejas} .

La reducción de G a \widehat{G} es claramente polinomial. Es importante notar que \widehat{G} es cúbico y tiene en total $\frac{9n}{2}$ aristas, $3n$ aristas Nuevas y $\frac{3n}{2}$ aristas Viejas. Es más, si G es planar, entonces \widehat{G} también es planar, ya que para cada $v_i \in V(G)$, V_{ij}, V_{ik} y V_{il} se pueden dibujar, partiendo de una representación planar de G , de manera tal que ninguna arista se cruce con otra. Un ejemplo de esta reducción aparece en la figura 3.1.

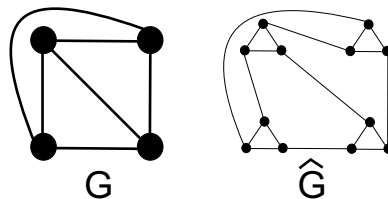


Figura 3.1: Ejemplo de un grafo cúbico planar G y su correspondiente reducción \widehat{G} , que también es cúbico y planar.

Para cada vértice $v \in G$, llamemos S_v al subgrafo de \widehat{G} inducido por los 3 representantes de v junto a sus 3 vecinos, es decir, si v_i tiene como nodos vecinos a v_j, v_k y v_l en G , entonces S_{v_i} es el subgrafo inducido por $\{v_{ij}, v_{ik}, v_{il}, v_{ji}, v_{ki}, v_{li}\}$. Cada S_v es isomorfo al grafo red $(\overline{S_3})$, ver figura 3.2). Nótese que cada S_v contiene 3 aristas Nuevas y 3 aristas Viejas y que cada nodo $w \in \widehat{V}$ pertenece a exactamente dos S_v .

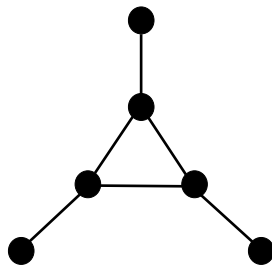


Figura 3.2: Grafo red. Aspecto que tiene cada uno de los S_v .

3.1 Eliminación de aristas para grafos permutación

Lema 3.2 *Si G es un grafo containment de intervalos, entonces no contiene a ninguno de los grafos de la figura 3.3 como subgrafo inducido.*

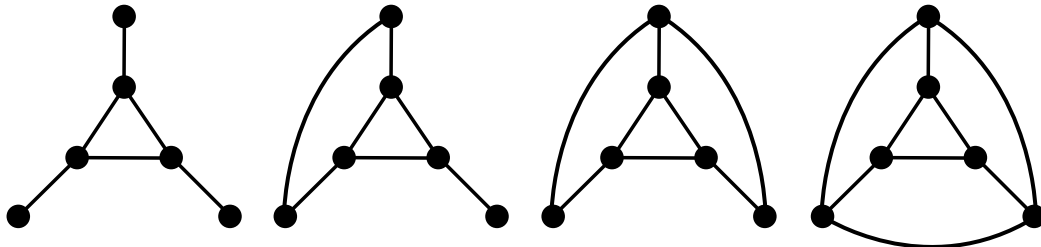


Figura 3.3: *Subgrafos prohibidos para grafos containment de intervalos.*

Demostración: Haremos la demostración para el primer grafo, las otras son similares. Supongamos que un grafo *containment* de intervalos tiene como subgrafo inducido a $\overline{S_3}$ (ver figura 3.4). La única representación válida del triángulo formado por $\{v_1, v_2, v_3\}$ es con 3 intervalos X, Y, Z con $X \subseteq Y \subseteq Z$ (ver figura 3.5).

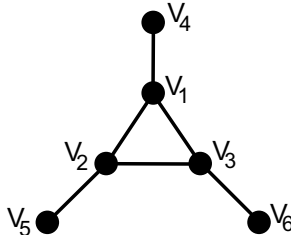


Figura 3.4: *Ejemplo de un subgrafo prohibido ($\overline{S_3}$) para grafos containment de intervalos.*

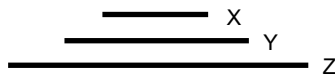


Figura 3.5: *Representación containment de intervalos de un triángulo.*

Sin pérdida de generalidad, X, Y, Z serán los intervalos representantes de v_1, v_2 y v_3 respectivamente. Luego el intervalo correspondiente a v_5 debe estar incluido en el correspondiente a v_2 o incluirlo. Pero si está incluido en el de v_2 también está incluido en el de v_3 , y si incluye al de v_2 también incluye al de v_1 , llegando a una contradicción. \square

Lema 3.3 *Si G es un grafo containment de intervalos, entonces no contiene a C_n ($n \geq 5$) como subgrafo inducido.*

Demostración: En [26] Golubic demuestra que un grafo G es permutación si y sólo si G es el grafo intersección de cuerdas en un círculo que admite un ecuador, es decir, una cuerda adicional que intersecte a todas las otras cuerdas. Además los grafos W_j ($j \geq 5$) no son circulares [16], luego los ciclos C_j ($j \geq 5$) no admiten un ecuador, y por lo tanto no son grafos permutación, y, por ende, tampoco son grafos *containment* de intervalos, ya que estas dos clases son equivalentes [15]. \square

Teorema 3.4 *Dado un grafo G cúbico y planar, G tiene un camino hamiltoniano si y sólo si su grafo triangular \hat{G} tiene un subgrafo que sea containment de intervalos con al menos $4n - 1$ aristas.*

Demostración:

\Rightarrow) Supongamos que G tiene un camino hamiltoniano P . Borraremos todas las aristas Viejas en \hat{G} que no correspondan a aristas en P . Llamemos \tilde{G} al subgrafo de \hat{G} resultante (figura 3.6). \tilde{G} es un grafo *containment* de intervalos, como puede verificarse en su representación en la figura 3.7. Es más, \tilde{G} contiene exactamente $4n - 1$ aristas, $3n$ aristas Nuevas y $n - 1$ aristas Viejas.

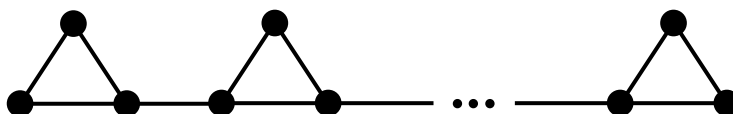


Figura 3.6: \tilde{G} : Grafo resultante de eliminar las aristas de \hat{G} que no forman parte del camino hamiltoniano.

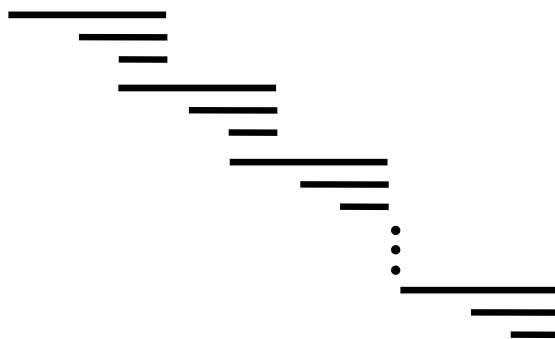


Figura 3.7: Representación *containment* de intervalos de \tilde{G} .

\Leftarrow) Ahora supongamos que $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ es un subgrafo *containment* de intervalos de \hat{G} con $|\tilde{E}| \geq 4n - 1$. Primero, veamos que \tilde{G} contiene a todas las aristas Nuevas y exactamente $n - 1$ aristas Viejas de \hat{G} .

Como \tilde{G} es un grafo *containment* de intervalos, no puede contener como subgrafo inducido a $\overline{S_3}$ (por Lema 3.2). Luego, al menos una de las aristas de cada S_v (en total hay n de ellos) debe estar faltando en \tilde{G} .

Supongamos que 2 aristas Nuevas de algún S_x ($x \in V$) se eliminaron en \tilde{G} . El número total de aristas removidas de \hat{G} para formar \tilde{G} no excede $\frac{n}{2} + 1$ (se deduce de la cuenta $3n + \frac{3n}{2} - (4n - 1)$), esto implica que a lo sumo $\frac{n}{2} - 1$ aristas adicionales pueden ser removidas de \hat{G} para cancelar los restantes $(n - 1) S_v$ tales que $v \neq x$. Como cada arista en \hat{G} (Nueva o Vieja) está contenida en a lo sumo 2 S_v , llegamos a una contradicción ($2 \times (\frac{n}{2} - 1) = (n - 2) S_v$ que podrán ser cancelados). Por lo tanto, sólo una arista Nueva puede estar faltando en \tilde{G} con respecto al conjunto de aristas de cada S_v . En particular, los representantes de cada vértice inducen un subgrafo conexo en \tilde{G} .

Sea H el grafo obtenido de \tilde{G} contrayendo todas las aristas Nuevas. Por lo que acabamos de probar, el número de vértices de H es exactamente n , uno por cada vértice original en G . Es más, H es acíclico, ya que la existencia de un ciclo sin cuerdas en H implicaría la existencia de un ciclo sin cuerdas de al menos el doble de longitud en \tilde{G} , contradiciendo el Lema 3.3. Luego, H contiene a lo sumo $n - 1$ aristas, por lo que \tilde{G} contiene a lo sumo $n - 1$ aristas Viejas. Como el número total de aristas en \tilde{G} es al menos $4n - 1$, \tilde{G} debe contener todas las aristas Nuevas ($3n$) y exactamente $n - 1$ aristas Viejas.

Como H es acíclico con $n - 1$ aristas y n vértices, debe ser conexo. Supongamos que H contiene un vértice v con grado 3. Como probamos que \tilde{G} contiene todas las aristas Nuevas, esto implicaría que el S_v completo de \hat{G} también existe en \tilde{G} , llegando a una contradicción. Luego, H define un camino hamiltoniano en G . \square

Corolario 3.4.1 *El problema de eliminación de aristas para grafos permutación es NP-completo.*

Demostración:

El problema está en NP porque los grafos permutación se pueden reconocer en tiempo lineal [42]. En [15] Dushnik y Miller demuestran que los grafos permutación son equivalentes a los grafos *containment* de intervalos, con lo cual el problema de eliminación de aristas para grafos permutación es equivalente al de encontrar un subgrafo generador máximo que sea *containment* de intervalos.

En el teorema 3.4 se muestra una reducción polinomial (transformación de un grafo a su correspondiente grafo triangular) del problema de encontrar un camino hamiltoniano restringido a grafos cúbicos y planares que es NP-completo [22] al problema de encontrar un subgrafo generador máximo que sea *containment* de intervalos. Luego, el corolario queda demostrado. \square

Corolario 3.4.2 *El problema de agregado de aristas para que un grafo sea permutación es NP-completo.*

Demostración: Los grafos permutación son cerrados bajo complementación [9]. Luego, es consecuencia inmediata del corolario 3.4.1 y de la proposición 2.6. \square

Corolario 3.4.3 *El problema de eliminación de aristas para que un grafo sea circular es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.4.1 y del corolario 2.5.1. \square

Corolario 3.4.4 *El problema de agregado de aristas para que un grafo sea circular es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.4.2 y del corolario 2.5.1. \square

Corolario 3.4.5 *El problema de agregado de aristas para que un grafo sea co-circular es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.4.3 y de la proposición 2.6. \square

Corolario 3.4.6 *El problema de eliminación de aristas para que un grafo sea co-circular es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.4.4 y de la proposición 2.6. \square

3.2 Edición de aristas para grafos de intervalos

Teorema 3.5 *Dado $G = (V, E)$ un grafo cúbico y planar, G tiene un camino hamiltoniano si y sólo si existe un conjunto de aristas F tal que si su grafo triangular es $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$, entonces $\widetilde{G} = (\widehat{V}, \widehat{E} \Delta F)$ es un grafo de intervalos y $|F| \leq \frac{n}{2} + 1$.*

Demostración:

\Rightarrow) Supongamos que G tiene un camino hamiltoniano P . Borraremos todas las aristas Viejas en \widehat{G} que no correspondan a aristas en P . Llamemos \widetilde{G} al subgrafo resultante (figura 3.6). \widetilde{G} es un grafo de intervalos, como puede verificarse en su representación de intervalos en la figura 3.8. Es más, \widetilde{G} contiene exactamente $4n - 1$ aristas, $3n$ aristas Nuevas y $n - 1$ aristas Viejas, es decir, se eliminaron $\frac{n}{2} + 1$ aristas de \widehat{G} .

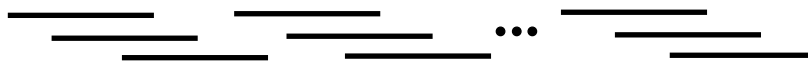


Figura 3.8: Representación de intervalos del grafo \widetilde{G} .

\Leftarrow) Ahora supongamos que existe un conjunto de aristas F tal que $\widetilde{G} = (\widehat{V}, \widehat{E} \Delta F)$ es un grafo de intervalos con $|F| \leq \frac{n}{2} + 1$.

Como \widetilde{G} es un grafo de intervalos, no puede contener como subgrafo inducido a \overline{S}_3 , ya que v_{ji}, v_{ki} y v_{li} forman una tripla asteroidal (AT), y ésta es una estructura prohibida para grafos de intervalos. Luego, cada uno de los S_v (en total hay n de ellos) contiene una estructura prohibida (propia del S_v) que debe ser cancelada con alguna arista de F , ya sea eliminándola o agregándola.

Veamos que tipos de aristas pueden aparecer en F . La primera distinción que podemos realizar es entre las aristas que estaban en \widehat{G} (las que se eliminan) y las que no estaban en \widehat{G} (las que se agregan). Las aristas que estaban en \widehat{G} son las ya definidas Nuevas y Viejas. La eliminación de una arista Nueva de un S_v cancela la AT correspondiente a ese S_v y la eliminación de una arista Vieja, como forma parte de dos S_v distintos, cancela las dos AT correspondientes a esos S_v . Entre las aristas que no estaban en \widehat{G} podemos identificar 3 clases distintas: las Externas, las Internas Buenas y las Internas Malas (ver figura 3.9). Las aristas Externas son aquellas que unen dos nodos que no pertenecen a un mismo S_v . El agregado de una de estas aristas no cancela ninguna AT propia de un S_v . Las aristas Internas Buenas (de ahora en más aristas Buenas) son aquellas que unen dos nodos tales que existe un S_v al que ambos pertenecen, y uno de ellos es representante de v . El agregado

de una de estas aristas cancela la AT correspondiente a ese mismo S_v . Las aristas Internas Malas (de ahora en más aristas Malas) son aquellas que unen dos nodos tales que existe un S_v al que ambos pertenecen, pero ninguno de ellos es representante de v . El agregado de una de estas aristas cancela la AT correspondiente a ese S_v , pero genera un ciclo de longitud 4, que es otra estructura prohibida para grafos de intervalos y tampoco puede aparecer en \tilde{G} . Este ciclo es propio del mismo S_v , lo que implica que para cancelarlo deberá estar incluida en F una arista más Nueva, Vieja o Interna a ese S_v , logrando el mismo efecto que ocurriría si siguiera existiendo su AT. Estos resultados se resumen en la tabla 3.1.

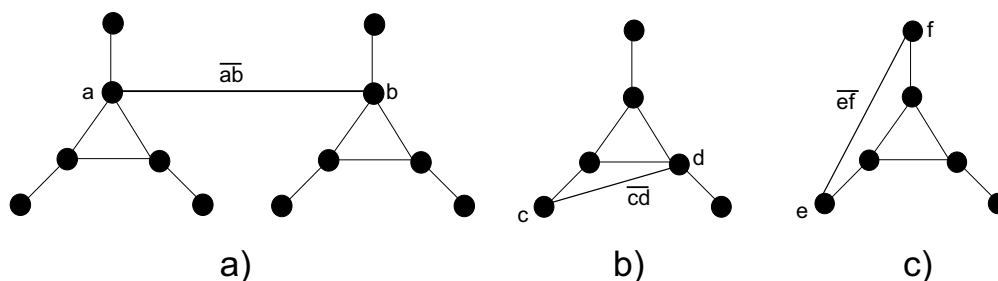


Figura 3.9: a) La arista \overline{ab} es Externa. b) La arista \overline{cd} es Interna Buena. c) La arista \overline{ef} es Interna Mala.

Nombre	$\in \widehat{E}$	Descripción	Cant. de S_v cancelados (*)	Vértices
Viejas	sí	Unen un representante de v_i y uno de v_j si v_i y v_j eran adyacentes en V	2	(v_{ij}, v_{ji})
Nuevas	sí	Unen 2 representantes del mismo $v_i \in V$	1	$(v_{ij}, v_{ik}),$ $j \neq k$
Buenas	no	$\exists S_v /$ los 2 extremos de la arista pertenecen a él y uno de ellos es uno de sus representantes.	1	(v_{ij}, v_{ki}) ó $(v_{ji}, v_{ik}),$ $j \neq k$
Malas	no	$\exists S_v /$ los 2 extremos de la arista pertenecen a él y ninguno de ellos es uno de sus representantes.	0 (cancela una estructura prohibida pero agrega otra)	$(v_{ki}, v_{ji}),$ $j \neq k$
Externas	no	$\nexists S_v /$ los 2 extremos de la arista pertenecen a él	0	$(v_{ij}, v_{kl}),$ $i \neq j \neq k \neq l$

Tabla 3.1: Tipos de aristas que pueden aparecer en F .

(*) Cantidad de S_v a los que la arista, al agregarla o quitarla según corresponda, les cancela alguna estructura prohibida propia.

Veamos tres puntos que nos van a ser muy útiles:

- i)* No puede haber en F dos aristas $e_1, e_2 \in \text{Nuevas} \cup \text{Buenas}$ que cancelen estructuras prohibidas propias del mismo S_x .

Supongamos que sí. Por lo visto, el número de estructuras prohibidas propias del mismo S_x canceladas por estas aristas es a lo sumo 1, con lo cual quedan a lo sumo $\frac{n}{2} - 1$ aristas adicionales en F para cancelar las restantes $n - 1$ estructuras prohibidas propias de los otros S_v . Como cada arista en F cancela a lo sumo las estructuras prohibidas propias de 2 S_v , llegamos a una contradicción. En particular, los representantes de cada vértice inducen un subgrafo conexo en \tilde{G} .

- ii)* No puede haber en F una arista $e_1 \in \text{Externas} \cup \text{Malas}$ y otra arista $e_2 \in \text{Externas} \cup \text{Malas} \cup \text{Buenas} \cup \text{Nuevas}$.

Si así fuera, se cancelaría a lo sumo la estructura prohibida propia de un S_x quedando $\frac{n}{2} - 1$ aristas adicionales en F para cancelar las restantes $n - 1$ estructuras prohibidas propias de los otros S_v . Como cada arista en F cancela a lo sumo las estructuras prohibidas propias de 2 S_v , llegamos a una contradicción. En particular, si en F hay una arista $\in \text{Externas} \cup \text{Malas}$, entonces el resto de las aristas de F deben ser Viejas.

- iii)* No puede haber en F tres aristas $e_1, e_2, e_3 \in \text{Buenas} \cup \text{Nuevas}$.

Si así fuera, se cancelarían a lo sumo las estructuras prohibidas propias de 3 S_v quedando en F $(\frac{n}{2} - 2)$ aristas adicionales para cancelar las restantes $n - 3$ estructuras prohibidas propias de los otros S_v . Como cada arista en F cancela a lo sumo las estructuras prohibidas propias de 2 S_v , llegamos a una contradicción. En particular, si en F hay 2 aristas $\in \text{Buenas} \cup \text{Nuevas}$, entonces el resto de las aristas de F deben ser Viejas.

Sea H el grafo obtenido de \tilde{G} contrayendo todas las aristas Nuevas. Por lo que acabamos de probar en *i)*, el número de vértices de H es exactamente n , uno por cada vértice original en G .

Veamos que H es acíclico. La existencia de un ciclo inducido en H de longitud ≥ 4 implicaría la existencia de un ciclo inducido de al menos la misma longitud en \tilde{G} , contradiciéndose con que \tilde{G} debe ser cordal para ser de intervalos. Luego, los únicos ciclos sin cuerdas que pueden aparecer en H deben tener longitud 3. Supongamos que en H aparece un ciclo de longitud 3 (un triángulo). Los puntos *i)*, *ii)* y *iii)* excluyen varias de las combinaciones de aristas que pueden formar ese ciclo. Analicemos cuáles son las combinaciones restantes que pueden aparecer para llegar a la conclusión de que ninguna es posible:

- *Mala Vieja Vieja*: Si las 2 aristas Viejas tienen en común al nodo x en H , entonces en \tilde{G} incidirán en distintos representantes de x , lo que implicaría que en el ciclo en \tilde{G} hay al menos una arista más. Faltaría ver que no se agregó ninguna cuerda que corte ese ciclo. Por lo visto en *ii*), si hay una arista Mala el resto de las aristas de F son Viejas, con lo cual no se pudo haber agregado ninguna arista más. Esta situación se puede contemplar en la figura 3.10.

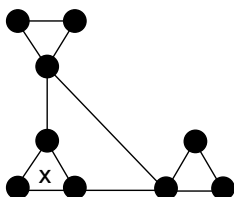


Figura 3.10: Ciclo formado por una arista Mala y dos Viejas.

- *Externa Vieja Vieja*: Si las 2 aristas Viejas tienen en común al nodo x en H , entonces en \tilde{G} incidirán en distintos representantes de x , lo que implicaría que en el ciclo en \tilde{G} hay al menos una arista más. Faltaría ver que no se agregó ninguna cuerda que corte ese ciclo. Por lo visto en *ii*), si hay una arista Externa el resto de las aristas de F son Viejas, con lo cual no se pudo haber agregado ninguna arista más. Esta situación es similar a la anterior y se puede contemplar en la figura 3.10.
- *Vieja Vieja Vieja*: Implicaría que hay un ciclo de longitud al menos 6 en \tilde{G} . Esta situación se puede contemplar en la figura 3.11. Para cancelarlo, haría falta agregar al menos 3 cuerdas, para que no haya ciclos de longitud mayor a 3. Por lo visto en *ii*), si hay una arista $e \in \text{Externas} \cup \text{Malas}$ el resto de las aristas de F son Viejas, y por lo visto en *iii*) si hay 2 aristas $\in \text{Buenas}$ el resto de las aristas de F son Viejas con lo cual no se pudieron haber agregado 3 aristas más.

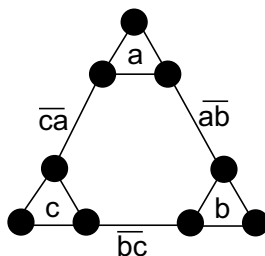


Figura 3.11: Ciclo formado por tres aristas Viejas.

- *Vieja Buena Buena*: Supongamos que en H aparece el triángulo abc , con \overline{ab} como arista Vieja. Como hay 2 aristas Buenas, por lo visto en

iii) no se podrá agregar ninguna arista más para cancelar un ciclo. Las aristas \overline{ac} y \overline{bc} en \tilde{G} tienen que incidir en los mismos representantes de a y de b , si no implicaría que en \tilde{G} hay un ciclo de al menos una arista más. Luego, la arista \overline{ac} debe ser Interna de a , ya que el representante pertenece a S_a y a S_b , y todos los nodos pertenecen a exactamente 2 S_v . Por el mismo motivo \overline{bc} debe ser Interna de b . Finalmente, los representantes de c en los que inciden \overline{ac} y \overline{bc} deben ser distintos, ya que si fueran el mismo pertenecería a 3 S_v , lo que implica que en \tilde{G} hay un ciclo de al menos una arista más. Esta situación se puede contemplar en la figura 3.12.

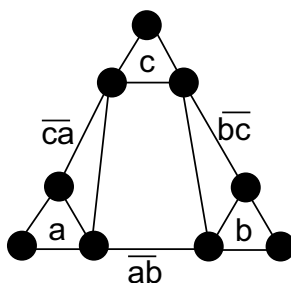


Figura 3.12: Ciclo formado por una arista Vieja y dos Buenas.

- *Vieja Vieja Buena:* Supongamos que en H aparece el triángulo abc , con \overline{ab} como arista Buena. Las dos aristas Viejas tienen en común al nodo c en H , entonces en \tilde{G} incidirán en distintos representantes de c , lo que implicaría que en el ciclo en \tilde{G} hay al menos una arista más (tendríamos un ciclo de longitud al menos 4). Veamos que \overline{ab} no puede incidir simultáneamente en los mismos representantes de a y de b que \overline{ac} y \overline{bc} respectivamente, implicando que en el ciclo en \tilde{G} hay al menos una arista más (o sea, al menos 5 aristas). Si \overline{ab} es incidente al mismo representante de a que \overline{ac} , entonces es Interna de a , sino ese representante pertenecería a 3 S_v . Luego, no puede ser incidente al mismo representante que \overline{bc} porque sino éste pertenecería a 3 S_v . El otro caso es análogo. Por lo tanto, en \tilde{G} aparecía un ciclo de longitud mayor o igual a 5, serían necesarias al menos 2 cuerdas para cancelarlo, pero sólo podría agregarse una arista Buena más, ya que la otra era \overline{ab} . Esta situación se puede contemplar en la figura 3.13.

Luego, como H es acíclico y tiene n nodos, contiene a lo sumo $n - 1$ aristas, por lo que \tilde{G} contiene a lo sumo $n - 1$ aristas Viejas. Como el número total de aristas en \tilde{G} es al menos $4n - 1$, \tilde{G} debe contener todas las aristas Nuevas ($3n$) y exactamente $n - 1$ aristas Viejas, es decir, todas las aristas que estaban en F son Viejas. Esto implica que si existe un conjunto F de edición para grafos de intervalos, este conjunto debe ser de eliminación.

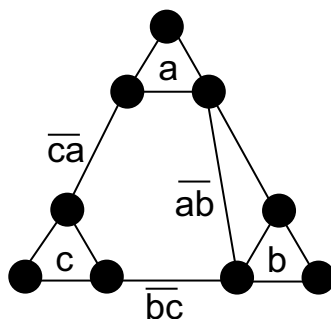


Figura 3.13: Ciclo formado por una arista Buena y dos Viejas.

Como H es acíclico con $n - 1$ aristas y n vértices, debe ser conexo. Supongamos que H contiene un vértice v con grado 3. Como probamos que \tilde{G} contiene todas las aristas Nuevas y no se agregó ninguna arista adicional, esto implicaría que el S_v completo de \tilde{G} también existe en \tilde{G} , llegando a una contradicción. Luego, H define un camino hamiltoniano en G . \square

Corolario 3.5.1 *El problema edición de aristas para grafos de intervalos es NP-completo.*

Demostración:

El problema está en NP porque los grafos de intervalos se pueden reconocer en tiempo lineal [8].

En el teorema 3.5 se muestra una reducción polinomial (transformación de un grafo a su correspondiente grafo triangular) del problema de encontrar un camino hamiltoniano restringido a grafos cúbicos y planares que es NP-completo [22] al problema de encontrar un conjunto de k -edición para grafos de intervalos. Luego, el corolario queda demostrado. \square

Corolario 3.5.2 *El problema de edición de aristas para que un grafo sea de intervalos unitarios es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del teorema 3.5 y del corolario 3.5.1, ya que se puede usar la misma demostración al ver que los intervalos elegidos en la figura 3.8 tienen todos la misma longitud. \square

Corolario 3.5.3 *El problema de edición de aristas para que un grafo sea arco-circular es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.5.1 y de la proposición 2.4, ya que un grafo G es de intervalos si y sólo si $G \cup K_1$ es arco-circular. \square

Corolario 3.5.4 *El problema de edición de aristas para que un grafo sea arco-circular unitario es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.5.2 y de la proposición 2.4. Vale notar que el problema de edición de aristas para grafos circular unitario también es NP-completo, ya que esta clase es equivalente a la clase de grafos arco-circular unitario [16]. \square

Corolario 3.5.5 *El problema de edición de aristas para que un grafo sea arco-circular propio es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.5.2, de la proposición 2.4 y del hecho de que los grafos de intervalos unitarios son equivalentes a los grafos de intervalos propios [22]. \square

Corolario 3.5.6 *El problema de edición de aristas para que un grafo sea de co-intervalos es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.5.1 y de la proposición 2.7. \square

Corolario 3.5.7 *El problema de edición de aristas para que un grafo sea de co-intervalos unitarios es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.5.2 y de la proposición 2.7. \square

Corolario 3.5.8 *El problema de edición de aristas para que un grafo sea co-arco-circular es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.5.3 y de la proposición 2.7. \square

Corolario 3.5.9 *El problema de edición de aristas para que un grafo sea co-arco-circular unitario es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.5.4 y de la proposición 2.7. \square

Corolario 3.5.10 *El problema de edición de aristas para que un grafo sea co-arco-circular propio es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.5.5 y de la proposición 2.7. \square

3.3 Edición de aristas para grafos permutación

Lema 3.6 *Si G es un grafo permutación, entonces no contiene a los grafos de la figura 3.14 como subgrafos inducidos.*

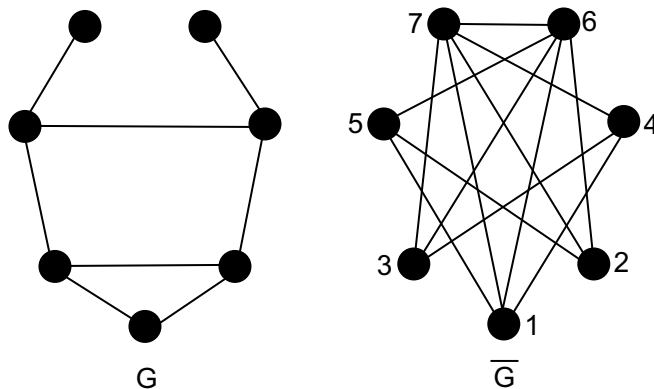


Figura 3.14: *Subgrafos prohibidos para grafos permutación.*

Demostración: En [9], el teorema 4.7.1 dice que un grafo G es permutación si y sólo si G y \overline{G} son de comparabilidad. Veamos que \overline{G} no lo es.

Si \overline{G} fuera de comparabilidad, se podría definir un orden parcial entre sus nodos, y luego se podrían orientar las aristas del grafo de manera tal que $v \leq w \Leftrightarrow (v, w) \in \overrightarrow{E}$, donde \overrightarrow{E} es el conjunto de aristas orientadas (es decir, se mantiene transitiva la relación de accesibilidad entre los nodos. Veamos que ese orden es imposible de definir

- Si 7 es uno de los nodos con mayor orden, entonces se deberían empezar a orientar las aristas de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{(6, 7)} - \overrightarrow{(2, 7)} - \overrightarrow{(3, 7)} - \overrightarrow{(6, 5)} - \overrightarrow{(6, 3)} - \overrightarrow{(4, 3)} - \overrightarrow{(6, 2)} - \overrightarrow{(4, 1)} - \overrightarrow{(5, 1)}$$

La arista $(5,2)$ no se puede orientar, llegando a una contradicción.

- Si 6 es uno de los nodos con mayor orden ocurre lo mismo, ya que existe un isomorfismo de \overline{G} en sí mismo que manda el nodo 7 al nodo 6 y viceversa.
- Si 5 es uno de los nodos con mayor orden, entonces se deberían empezar a orientar las aristas de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{(6, 5)} - \overrightarrow{(1, 5)} - \overrightarrow{(2, 5)} - \overrightarrow{(2, 7)} - \overrightarrow{(3, 7)} - \overrightarrow{(4, 7)} - \overrightarrow{(1, 7)} - \overrightarrow{(6, 3)} - \overrightarrow{(6, 7)} - \overrightarrow{(4, 3)}$$

La arista $(4,1)$ no se puede orientar, llegando a una contradicción.

- Si 4 es uno de los nodos con mayor orden ocurre lo mismo, ya que existe un isomorfismo de \overline{G} en sí mismo que manda el nodo 5 al nodo 4 y viceversa.
- Si 3 es uno de los nodos con mayor orden, entonces se deberían empezar a orientar las aristas de la siguiente manera:
 $\overrightarrow{(7, 3)} - \overrightarrow{(6, 3)} - \overrightarrow{(4, 3)} - \overrightarrow{(4, 1)} - \overrightarrow{(5, 1)} - \overrightarrow{(6, 1)} - \overrightarrow{(7, 1)} - \overrightarrow{(5, 2)} - \overrightarrow{(7, 2)} - \overrightarrow{(6, 2)}$
 $\overrightarrow{(6, 5)} - \overrightarrow{(6, 7)} -$

La arista (4,7) no se puede orientar, llegando a una contradicción.

- Si 2 es uno de los nodos con mayor orden ocurre lo mismo, ya que existe un isomorfismo de \overline{G} en sí mismo que manda el nodo 3 al nodo 2 y viceversa..
- Si 1 es uno de los nodos con mayor orden, entonces se deberían empezar a orientar las aristas de la siguiente manera: $\overrightarrow{(7, 1)} - \overrightarrow{(6, 1)} - \overrightarrow{(5, 1)}$
 $- \overrightarrow{(4, 1)} - \overrightarrow{(4, 3)} - \overrightarrow{(6, 3)} - \overrightarrow{(6, 5)} - \overrightarrow{(7, 2)} - \overrightarrow{(7, 4)} - \overrightarrow{(5, 2)} - \overrightarrow{(6, 2)}$

La arista (6,7) no se puede orientar, llegando a una contradicción. \square

Lema 3.7 *Dado un grafo G , si en un ciclo inducido C de longitud n se agrega una cuerda entre los nodos v y w pertenecientes a C (pero no adyacentes en él), donde los caminos que unen a v y w en C tienen longitud k y $n - k$, entonces quedan formados 2 nuevos ciclos inducidos en G de longitud $k+1$ y $n - k + 1$. En particular, si v y w estaban a distancia 2 en C , entonces los nuevos ciclos tendrán longitud 3 y $n - 1$.*

Teorema 3.8 *Dado $G = (V, E)$ un grafo cúbico y planar, G tiene un camino hamiltoniano si y sólo si existe un conjunto de aristas F tal que si su grafo triangular es $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$, entonces $\widetilde{G} = (\widehat{V}, \widehat{E} \Delta F)$ es un grafo *containment* de intervalos y $|F| \leq \frac{n}{2} + 1$.*

Demostración:

\Rightarrow) Supongamos que G tiene un camino hamiltoniano P . Borraremos todas las aristas Viejas en \widehat{G} que no correspondan a aristas en P . Llamemos \widetilde{G} al subgrafo resultante (figura 3.6). \widetilde{G} es un grafo *containment* de intervalos, como puede verificarse en su representación *containment* de intervalos en la figura 3.7. Es más, \widetilde{G} contiene exactamente $4n - 1$ aristas, $3n$ aristas Nuevas y $n - 1$ aristas Viejas, es decir, se eliminaron $\frac{n}{2} + 1$ aristas de \widehat{G} . En este caso, el conjunto F de edición es a su vez un conjunto de eliminación ($F \subseteq E$).

\Leftarrow) Ahora supongamos que $\tilde{G} = (\widehat{V}, \widehat{E} \Delta F)$ es un grafo *containment* de intervalos con $|F| \leq \frac{n}{2} + 1$.

Como \tilde{G} es un grafo *containment* de intervalos, no puede contener como subgrafo inducido a $\overline{S_3}$, como se puede ver en el lema 3.2. Luego, cada uno de los S_v (en total hay n de ellos) debe ser cancelado con alguna arista de F , ya sea eliminándola o agregándola.

Los tipos de aristas que pueden aparecer en F son los mismos que en el teorema 3.5 y aparecen resumidos en la tabla 3.1. La cantidad de estructuras prohibidas que cancela cada una de estas aristas coincide con la de ese teorema, aunque cabe aclarar que las aristas Internas Malas no cancelan una estructura prohibida y agregan otra, como ocurría en los grafos de intervalos, sino que agregar una de ellas genera otra de las estructuras prohibidas del lema 3.2.

Los 3 puntos del teorema 3.5 también se cumplen en este teorema, o sea:

- i) No puede haber en F dos aristas $e_1, e_2 \in \text{Nuevas} \cup \text{Buenas}$ que cancelen las estructuras prohibidas propias del mismo S_v .
- ii) No puede haber en F una arista $e_1 \in \text{Externas} \cup \text{Malas}$ y otra arista $e_2 \in \text{Externas} \cup \text{Malas} \cup \text{Buenas} \cup \text{Nuevas}$.
- iii) No puede haber en F tres aristas $e_1, e_2, e_3 \in \text{Buenas} \cup \text{Nuevas}$.

Sea H el grafo obtenido de \tilde{G} contrayendo todas las aristas Nuevas. Como se vio en el teorema 3.5, el número de vértices de H es exactamente n , uno por cada vértice original en G .

Veamos que H es acíclico. La existencia de un ciclo inducido en H de longitud ≥ 5 implicaría la existencia de un ciclo inducido de al menos la misma longitud en \tilde{G} , contradiciéndose con el lema 3.3. Luego, los únicos ciclos inducidos que pueden aparecer en H deben tener longitud 3 ó 4. Supongamos que en H existe un ciclo inducido C de longitud 4 formado por los nodos a, b, c y d como lo muestra la figura 3.15.

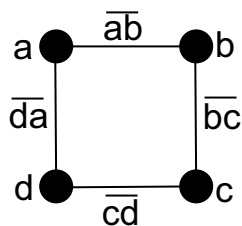


Figura 3.15: Ciclo de longitud 4 en H .

Los puntos *i*), *ii*) y *iii*) excluyen varias de las combinaciones de aristas que pueden formar ese ciclo. Analicemos cuáles son las combinaciones restantes que pueden aparecer para llegar a la conclusión de que ninguna es posible:

- *Mala Vieja Vieja Vieja*: Supongamos que la arista \overline{da} es Mala. Por lo visto en *ii*), las otras tres aristas deben ser Viejas. Luego, en \tilde{G} se agregan al ciclo una arista Nueva perteneciente a S_b y otra perteneciente a S_c . Por lo tanto, el ciclo en \tilde{G} tiene al menos 6 aristas, y por *ii*), no se pudo haber agregado ninguna cuerda que lo corte, llegando a una contradicción. Esta situación se puede contemplar en la figura 3.16.

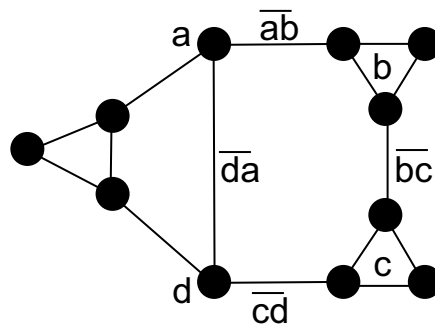


Figura 3.16: Ciclo formado por una arista Mala y tres Viejas.

- *Externa Vieja Vieja Vieja*: Supongamos que la arista \overline{da} es Externa. Por lo visto en *ii*), las otras tres aristas deben ser Viejas. Luego, en \tilde{G} se agregan al ciclo una arista Nueva perteneciente a S_b y otra perteneciente a S_c . Por lo tanto, el ciclo en \tilde{G} tiene al menos 6 aristas, y por *ii*), no se pudo haber agregado ninguna cuerda que lo corte, llegando a una contradicción. Esta situación se puede contemplar en la figura 3.17.

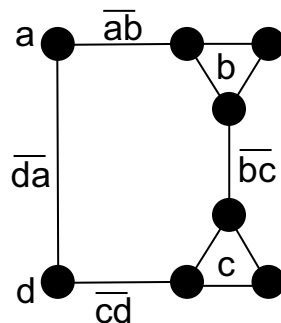


Figura 3.17: Ciclo formado por una arista Externa y tres Viejas.

- *Vieja Vieja Vieja Vieja*: Implicaría la presencia de un ciclo de al menos 8 aristas en \tilde{G} (si no se eliminó ninguna arista Nueva). Esta situación se puede contemplar en la figura 3.18. Ya se demostró que a lo sumo se pueden agregar 2 cuerdas para cortar el ciclo. Si se agrega una sola cuerda para cortarlo, por lema 3.7 queda un ciclo de longitud al menos 5, llegando a una contradicción. Si se agregan 2 cuerdas, por *ii)* y *iii)* deben ser ambas aristas Buenas, que unen nodos que se encuentran a distancia 2 en el ciclo, luego por lema 3.7 queda un ciclo de longitud al menos 6, llegando a una contradicción.

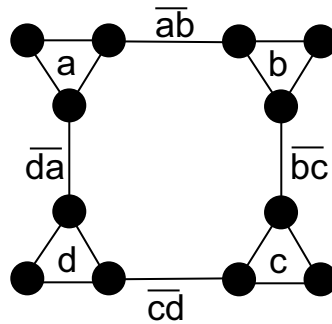


Figura 3.18: Ciclo formado por cuatro aristas Viejas.

- *Buena Vieja Vieja Vieja*: Implicaría la presencia de un ciclo C de al menos 7 aristas en \tilde{G} (si no se eliminó ninguna arista Nueva), ya que la arista Buena une 2 nodos que están a distancia 2 en C . Esta situación se puede contemplar en la figura 3.19. Ya se demostró que a lo sumo se pueden agregar una cuerda más para cortar el ciclo, y solamente puede ser una arista Buena. Pero por lema 3.7 queda un ciclo de longitud al menos 6, llegando a una contradicción.

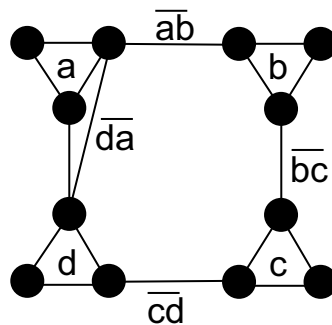


Figura 3.19: Ciclo formado por una arista Buena y tres Viejas.

- *Buena Buena Vieja Vieja*: Supongamos que las aristas \overline{da} y \overline{cd} son Buenas. En \tilde{G} se agrega al ciclo una arista Nueva perteneciente a S_b , implicando que su longitud es de al menos 5 aristas, y por *ii*), no se pudo haber agregado ninguna cuerda que lo corte, llegando a una contradicción. Esta situación se puede contemplar en la figura 3.20.

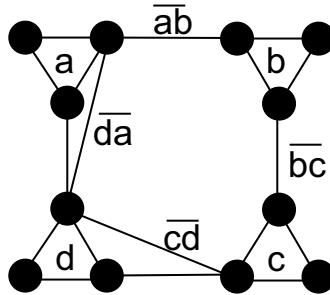


Figura 3.20: Ciclo formado por dos aristas Buenas consecutivas y dos Viejas.

- *Buena Vieja Buena Vieja*: Supongamos que las aristas \overline{da} y \overline{bc} son Buenas. La arista \overline{da} tiene que ser Interna de S_d o de S_a . Si es Interna de S_a no puede incidir en el mismo representante de d que la arista \overline{cd} , porque en ese caso dicho nodo pertenecería a tres S_v diferentes, llegando a una contradicción (lo mismo ocurre si \overline{da} es Interna de S_d). Luego, la arista \overline{da} incide sobre un representante de d distinto al que incide \overline{cd} . Por lo tanto, en \tilde{G} se agrega al ciclo una arista Nueva perteneciente a S_d , implicando que su longitud es de al menos 5 aristas, y por *ii*), no se pudo haber agregado ninguna cuerda que lo corte, llegando a una contradicción. Esta situación se puede contemplar en la figura 3.21.

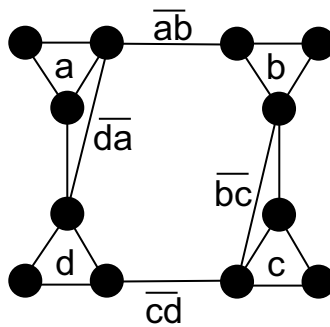


Figura 3.21: Ciclo formado por dos aristas Buenas y dos Viejas alternadas.

Ahora supongamos que en H existe un ciclo inducido C de longitud 3 formado por los nodos a, b y c como lo muestra la figura 3.22.

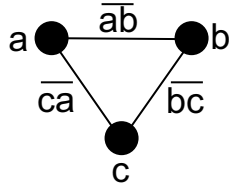


Figura 3.22: *Ciclo de longitud 3 en H .*

Los puntos *i*), *ii*) y *iii*) excluyen varias de las combinaciones de aristas que pueden formar ese ciclo. Analicemos cuáles son las combinaciones restantes que pueden aparecer para llegar a la conclusión de que ninguna es posible:

- *Mala Vieja Vieja:* Supongamos que la arista \overline{ab} es Mala. Si \overline{ab} es Interna a S_c , entonces aparece como subgrafo inducido en \tilde{G} uno de los subgrafos prohibidos del lema 3.6, contradiciendo que \tilde{G} es grafo permutación. Esta situación se puede contemplar en la figura 3.23. Si \overline{ab} es Interna a S_d , donde d es otro nodo vecino a a y a b en H , entonces los extremos de la arista \overline{ab} no pueden ser los mismos representantes de a y de b en los que inciden \overline{bc} y \overline{ca} , ya que esto implicaría que estos nodos pertenecen a tres S_v distintos. Por lo tanto, en \tilde{G} se agregan al ciclo C dos aristas Nuevas pertenecientes a S_a y a S_b , además de la arista Nueva perteneciente a S_c , donde se unen dos aristas Viejas que no inciden en el mismo representante, implicando que su longitud es de al menos 6 aristas, y por *ii*), no se pudo haber agregado ninguna cuerda que lo corte, llegando a una contradicción. Esta situación también se puede contemplar en la figura 3.23.

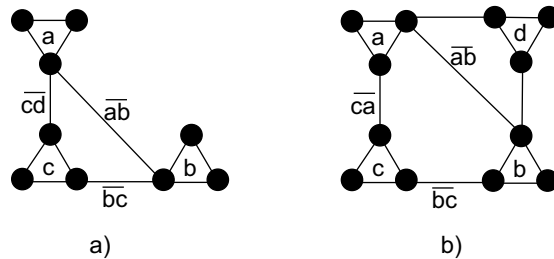


Figura 3.23: *Ciclo formado por una arista Mala y dos Viejas: a) La arista \overline{ab} es Interna a S_c . b) La arista \overline{ab} es Interna a un nodo que no pertenece al ciclo C .*

- *Vieja Vieja Vieja*: Implicaría la presencia de un ciclo de al menos 6 aristas en \tilde{G} (podría ser mayor a 6 si se eliminó alguna arista Nueva). Esta situación se puede contemplar en la figura 3.24.

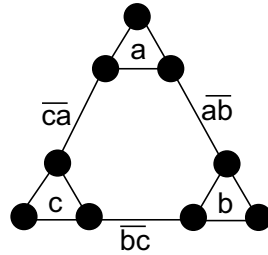


Figura 3.24: Ciclo formado por tres aristas Viejas.

Si se agrega sólo una arista Buena para cortarlo, por lema 3.7 queda un ciclo de longitud al menos 5, llegando a una contradicción. Si se agrega una arista Mala, entonces aparece como subgrafo inducido en \tilde{G} uno de los subgrafos prohibidos del lema 3.6 (notar que por *ii*) están todas las aristas Nuevas), contradiciendo que \tilde{G} es grafo permutación. No es posible agregar una arista Externa para cortar el ciclo. Si se agregan 2 aristas Buenas, los 3 grafos que pueden resultar son los de la figura 3.25 (notar que por *iii*) están todas las aristas Nuevas). En los casos *a*) y *c*) queda como subgrafo inducido uno de los subgrafos prohibidos del lema 3.6, contradiciendo que \tilde{G} es grafo permutación. En el caso *b*) queda formado un ciclo de longitud 5, también una contradicción.

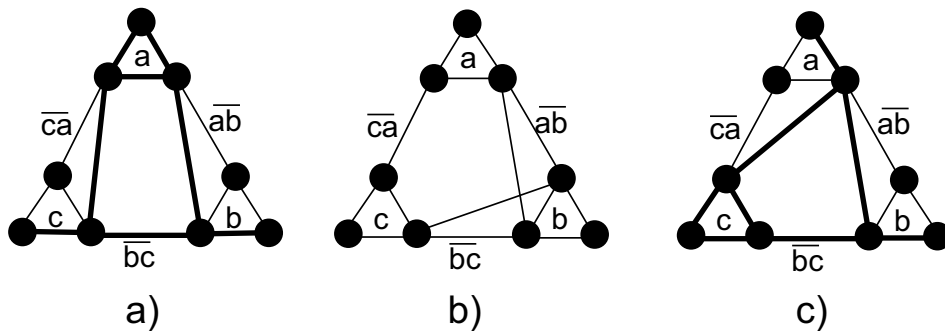


Figura 3.25: Las 3 posibles maneras de agregar 2 aristas Buenas para cortar el ciclo de longitud mayor o igual a 6.

- *Externa Vieja Vieja*: Supongamos que la arista \overline{ab} es Externa. En \tilde{G} se agrega al ciclo C una arista Nueva perteneciente a S_c que une los extremos de las aristas Viejas \overline{bc} y \overline{ca} que no pueden incidir en el mismo representante de c . Los extremos de la arista \overline{ab} no pueden ser los mismos representantes de a y de b en los que inciden \overline{bc} y \overline{ca} ,

ya que esto implicaría que \overline{ab} es Interna de S_c , contradiciéndose con que era Externa. Por lo tanto, en C hay al menos una arista Nueva perteneciente a S_a o a S_b , implicando que su longitud es de al menos 5 aristas, y por *ii*), no se pudo haber agregado ninguna cuerda que lo corte, llegando a una contradicción. Esta situación se puede contemplar en la figura 3.26.

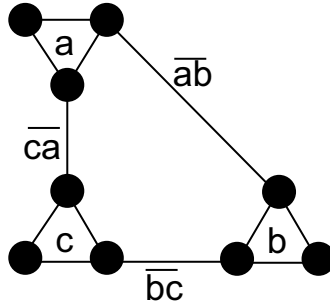


Figura 3.26: Ciclo formado por una arista Externa y dos Viejas.

- *Buena Vieja Vieja*: Implicaría la presencia de un ciclo de al menos 5 aristas en \tilde{G} (podría ser mayor a 5 si se eliminó alguna arista Nueva). Esta situación se puede contemplar en la figura 3.27. Por *ii*) y *iii*), a lo sumo se pudo haber agregado otra arista Buena para cortar el ciclo, pero entonces quedaría formado el subgrafo *a*) o el *c*) de la figura 3.25, que en el punto anterior se demostró que esto no puede pasar.

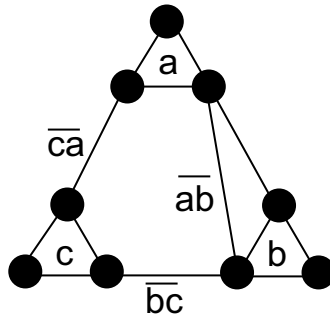


Figura 3.27: Ciclo formado por una arista Buena y dos Viejas.

- *Buena Buena Vieja*: Si se forma un ciclo de longitud 5 se llega a una contradicción, ya que por *iii*) no se pueden agregar más aristas. Las únicas dos maneras de que quede un ciclo cuya longitud sea menor a 5 son las que aparecen en la figura 3.28, pero estos grafos coinciden con el subgrafo *a*) y el *c*) de la figura 3.25, con lo cual llegamos a una contradicción.

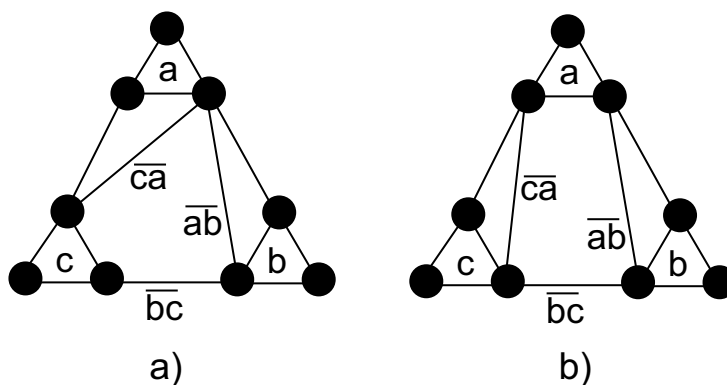


Figura 3.28: *Ciclo formado por dos aristas Buenas y una Vieja.*

Luego, como H es acíclico y tiene n nodos, contiene a lo sumo $n - 1$ aristas, por lo que \tilde{G} contiene a lo sumo $n - 1$ aristas Viejas. Como el número total de aristas en \tilde{G} es al menos $4n - 1$, \tilde{G} debe contener todas las aristas Nuevas ($3n$) y exactamente $n - 1$ aristas Viejas, es decir, todas las aristas que estaban en F son Viejas. Esto implica que si existe un conjunto F de edición para grafos *containment* de intervalos, este conjunto debe ser de eliminación.

Como H es acíclico con $n - 1$ aristas y n vértices, debe ser conexo. Supongamos que H contiene un vértice v con grado 3. Como probamos que \tilde{G} contiene todas las aristas Nuevas y no se agregó ninguna arista adicional, esto implicaría que el S_v completo de \tilde{G} también existe en \tilde{G} , llegando a una contradicción. Luego, H define un camino hamiltoniano en G . \square

Corolario 3.8.1 *El problema de edición de aristas para grafos permutación es NP-completo.*

Demostración:

El problema está en NP porque los grafos permutación se pueden reconocer en tiempo lineal [42].

En el teorema 3.8 se muestra una reducción polinomial (transformación de un grafo a su correspondiente grafo triangular) del problema de encontrar un camino hamiltoniano restringido a grafos cúbicos y planares que es NP-completo [22] al problema de encontrar un conjunto de k -edición para grafos *containment* de intervalos, que son equivalentes a los grafos permutación. Luego, el corolario queda demostrado. \square

Corolario 3.8.2 *El problema de edición de aristas para que un grafo sea circular es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.8.1 y del corolario 2.5.1. \square

Corolario 3.8.3 *El problema de edición de aristas para que un grafo sea co-circular es NP-completo.*

Demostración: Es consecuencia inmediata del corolario 3.8.2 y de la proposición 2.7. \square

Nota 3.9 *Las reducciones utilizadas en los teoremas 3.4, 3.5 y 3.8 implican que los resultados obtenidos para los respectivos corolarios son NP-completos aún cuando la entrada se restringe a grafos cúbicos y planares.*

3.4 Eliminación de aristas para grafos puente

Teorema 3.10 *El problema de eliminación de aristas para grafos puente es NP-completo.*

Demostración: El problema está en NP ya que los grafos puente pueden reconocerse en tiempo polinomial. En [19], Farber y Jamison dan un algoritmo de reconocimiento en $O(n^4)$ y en [38], Le y Spinrad demuestran que se pueden reconocer en $O(n^{\alpha+1})$, donde α es el mejor exponente de n conocido para obtener una multiplicación de matrices de $n \times n$ (aprox. 2.376). Una propiedad muy interesante que utilizaremos es la que dice que G es un grafo cadena si y solo si no contiene un par de aristas independientes (dos aristas e_1 y e_2 son independientes si sus extremos inducen un $2K_2$, es decir, si sus cuatro extremos son vértices distintos y no existe en G otra arista e_3 que comparta un extremo con e_1 y el otro con e_2). Esta propiedad fue demostrada por Yannakakis en [57].

Realizaremos una reducción del problema de eliminación de aristas para grafos cadena que es NP-completo [45]. Sea $\langle G = (P, Q, E), k \rangle$ una instancia del problema de eliminación de aristas para grafos cadena. Construimos la instancia $\langle C(G) = (V', E'), k \rangle$ del problema de eliminación de aristas para grafos puente de la siguiente manera:

- Definimos $V' = P \cup Q \cup V_P \cup V_Q$, donde $V_P = \{v_1, \dots, v_k\}$ y $V_Q = \{v_{k+1}, \dots, v_{2k}\}$.
- Definimos $E' = E \cup (P \times P) \cup (Q \times Q) \cup (P \times V_P) \cup (Q \times V_Q)$. Un ejemplo se puede ver en la figura 3.29.

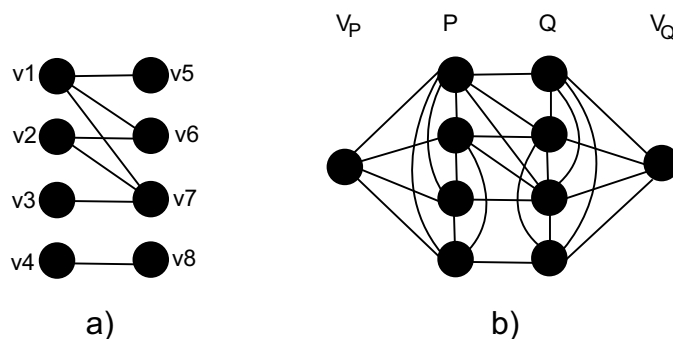


Figura 3.29: a) El grafo bipartito G es una ejemplo de una instancia del problema de eliminación de aristas para grafos cadena, fijando $k = 1$. b) El grafo $C(G)$ es su correspondiente instancia del problema de eliminación de aristas para grafos puente, manteniendo $k = 1$.

Veamos que la instancia del problema de eliminación de aristas para grafos puente tiene solución si y solo si la instancia del problema de eliminación de

aristas para grafos cadena tiene solución.

\Rightarrow) Supongamos que F es un conjunto de k -eliminación de grafos cadena para G . Queremos ver que F también es un conjunto de k -eliminación de grafos puente para $C(G)$. Sea $H = (V', E' \setminus F)$ el grafo resultante. Supongamos que H no es grafo puente, y sea C un ciclo inducido en H de longitud mayor a 3 que no contiene un puente. Si C contiene un vértice $v \in V_P$, entonces los 2 vértices vecinos a v en C son vértices de P , formando un triángulo y llegando a una contradicción. Lo mismo ocurre si el vértice $v \in V_Q$. Luego, $V(C) \cap V_P = V(C) \cap V_Q = \emptyset$. Como P y Q son subgrafos completos, C debe ser de la forma $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, donde $p_1, p_2 \in P$ y $q_1, q_2 \in Q$. Pero entonces (p_1, q_2) y (p_2, q_1) son aristas independientes en el grafo cadena $(P, Q, E \setminus F)$, llegando a una contradicción.

\Leftarrow) Supongamos que F es un conjunto de k -eliminación de grafos puente para $C(G)$. Queremos ver que $F \cap E$ es un conjunto de k -eliminación de grafos cadena para G . Sea $G' = (P, Q, E \setminus F)$. Si G' no fuera un grafo cadena, entonces contendría un par de aristas independientes (p_1, q_1) y (p_2, q_2) , donde $p_1, p_2 \in P$ y $q_1, q_2 \in Q$. En $C(G)$, p_1, p_2 y también q_1, q_2 estaban conectados por una arista y k caminos de aristas disjuntos de longitud 2. Luego, cada par está aún conectado por un camino de longitud 1 ó 2 en $H = (V', E' \setminus F)$, ya que a lo sumo se eliminaron k aristas. Por lo tanto, (p_1, q_1) y (p_2, q_2) seguro forman parte de un ciclo inducido C sin cuerdas de longitud 4, 5 ó 6 en H . Si C tiene longitud 4 ó 5, entonces no tiene puentes, porque los únicos puentes posibles son las cuerdas, llegando a una contradicción. Si C tiene longitud 6, debe ser de la forma $\{vp_i, p_1, q_1, vq_j, q_2, p_2\}$ como se ve en la figura 3.30 y puede tener un puente de longitud 2 que une dos vértices que están a distancia 3 en C .

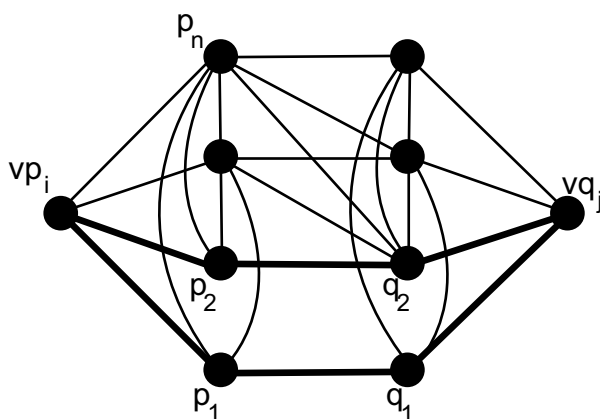


Figura 3.30: Ciclo de longitud 6 que se puede formar en H , constituido por los vértices $\{vp_i, p_1, q_1, vq_j, q_2, p_2\}$.

Por como está construido $C(G)$ el puente no puede unir a vp_i con vq_j , sólo podría existir entre p_1 y q_2 o entre p_2 y q_1 . Supongamos que el puente P existe entre p_1 y q_2 (el otro caso es análogo). El vértice del medio del puente no puede estar en V_P (no hay aristas que lo conecten con q_2) ni en V_Q (no hay aristas que lo conecten con p_1), sólo puede estar en P o en Q . Supongamos que está en P (el otro caso es análogo), por lo que P quedaría formado por las aristas (p_1, p_n) y (p_n, q_2) , con $n \notin \{1, 2\}$. En H aparece entonces el ciclo C' de longitud 5 formado por $\{p_1, p_n, q_2, vq_j, q_1\}$. La única cuerda que podría aparecer en este ciclo es (p_n, q_1) . Si (p_n, q_1) no está en H , implica que en H aparece un ciclo inducido de longitud 5 sin cuerdas, llegando a una contradicción. Si esta cuerda existe, en H aparece entonces el ciclo inducido C'' de longitud 4 formado por $\{p_n, q_2, vq_j, q_1\}$. Este ciclo no tiene cuerdas, llegando a una contradicción. \square

3.5 Eliminación de aristas para grafos débilmente cordales

Teorema 3.11 *El problema de eliminación de aristas para grafos débilmente cordales es NP-completo.*

Demostración: El problema está en NP ya que los grafos débilmente cordales pueden reconocerse en tiempo polinomial [54].

Realizaremos una reducción del problema de eliminación de aristas para grafos cadena que es NP-completo [45].

Sea $\langle G = (P, Q, E), k \rangle$ una instancia del problema de eliminación de aristas para grafos cadena. Construimos la instancia $\langle C(G) = (V', E'), k \rangle$ del problema de eliminación de aristas para grafos débilmente cordales de la siguiente manera:

- Definimos $V' = P \cup Q \cup V_P \cup V_Q$, donde $V_P = \{v_1, \dots, v_k\}$ y $V_Q = \{v_{k+1}, \dots, v_{2k}, v_{2k+1}\}$.
- Definimos $E' = E \cup (P \times P) \cup (P \times V_P) \cup (Q \times V_Q)$. Un ejemplo se puede ver en la figura 3.31.

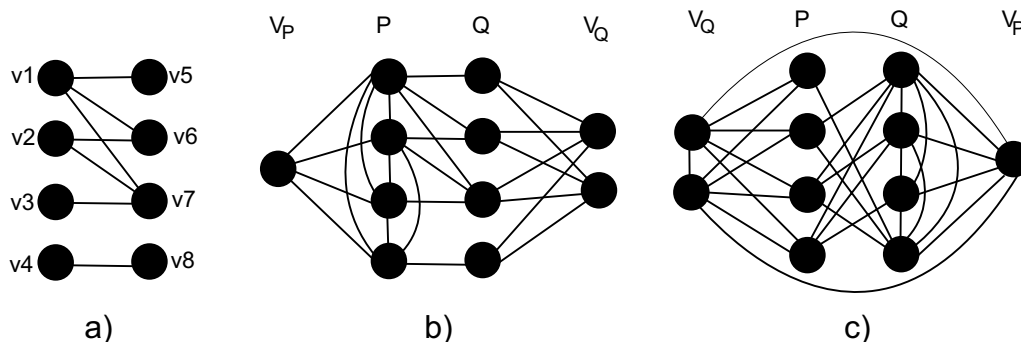


Figura 3.31: a) El grafo bipartito G es un ejemplo de una instancia del problema de eliminación de aristas para grafos cadena, fijando $k = 1$. b) El grafo $C(G)$ es su correspondiente instancia del problema de eliminación de aristas para grafos débilmente cordales, manteniendo $k = 1$. c) El grafo $\overline{C(G)}$ es el complemento de $C(G)$.

Veamos que la instancia del problema de eliminación de aristas para grafos débilmente cordales tiene solución si y solo si la instancia del problema de eliminación de aristas para grafos cadena tiene solución.

\Rightarrow) Supongamos que F es un conjunto de k -eliminación de grafos cadena para el grafo G . Queremos ver que F también es un conjunto de k -eliminación

de grafos débilmente cordales para $C(G)$. Sea $H = (V', E' \setminus F)$ el grafo resultante. Supongamos que H no es débilmente cordal, lo que implica que o bien en H o bien en \overline{H} existe un ciclo inducido sin cuerdas de longitud mayor a 4. Veamos primero que en \overline{H} no puede existir dicho ciclo. En \overline{H} los vértices de V_P junto a los de V_Q inducen un subgrafo completo. Lo mismo ocurre con los vértices de Q junto a los de V_P . Sea D el ciclo inducido en \overline{H} de longitud mayor a 4. Si D contiene un vértice de V_P , entonces contiene a lo sumo un vértice en Q y a lo sumo un vértice en $V_Q \cup V_P$ (en ambos casos, si hubiera más de un vértice, se formaría un triángulo), con lo cual el resto (dos o más) de los vértices de D deben estar en P , pero como estos vértices no están conectados entre sí, alguno debería estar conectado con el vértice de V_P , llegando a una contradicción (en \overline{H} no hay ninguna arista que une vértices de P y de V_P). Luego, en D no puede haber ningún vértice de V_P . Tampoco puede haber 2 vértices en V_Q porque cualquier vértice de P o de V_Q sería adyacente a ambos, formando un triángulo, y los vértices de Q no son adyacentes a los vértices de V_Q en \overline{H} . Tampoco puede no haber en D vértices de V_Q ya que implicaría que hay en \overline{H} un ciclo de longitud mayor o igual a 5 con 2 vértices de Q (más no puede haber porque induciría un triángulo) y el resto de los vértices de P (3 o más), una contradicción ya que estos últimos inducen un conjunto independiente. Por lo tanto, en D hay exactamente un vértice de V_Q . Luego, en D hay dos vértices de P ya que si hubiera uno o ninguno no se podría formar el ciclo y si hubiera 3 o más el vértice de V_Q tendría grado mayor a dos en el subgrafo inducido por los vértices del ciclo. Además, en D hay a lo sumo 2 vértices de Q ya que si hubiera más inducirían un triángulo. En resumen, el único ciclo inducido sin cuerdas de longitud mayor o igual a 5 que puede aparecer en \overline{H} es de la forma $\{p_1, q_2, q_1, p_2, vq_i\}$, donde $p_1, p_2 \in P$, $q_1, q_2 \in Q$ y $vq_i \in V_Q$, como se puede ver en la figura 3.32. Pero esto implica que las aristas (p_1, q_2) y (p_2, q_1) no aparecen en H y que las aristas (p_1, q_1) y (p_2, q_2) sí aparecen en H , con lo cual estas últimas son aristas independientes en $G' = (P, Q, E \setminus F)$, contradiciéndose con que era un grafo cadena.

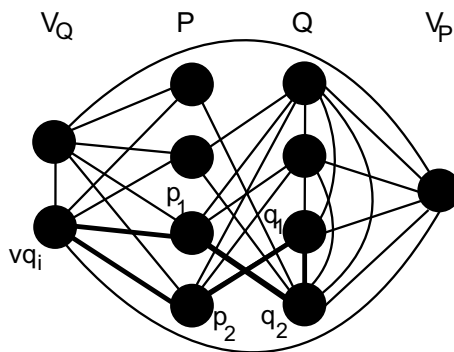


Figura 3.32: Ciclo inducido sin cuerdas de longitud 5 que puede aparecer en \overline{H} .

Sea C el ciclo inducido en H de longitud mayor a 4. Si C contiene un vértice $v \in V_P$, entonces los 2 vértices vecinos a v en C son vértices de P , llegando a una contradicción. Si C contiene un vértice $v_1 \in V_Q$, sus 2 vecinos x e y en C son vértices de Q , si hubiera otro vértice $v_2 \in V_Q$ en C , se formaría un ciclo de longitud 4 entre v_1, x, v_2 e y , contradiciendo que C era un ciclo inducido de longitud mayor a 4. Por lo tanto, a lo sumo podrá haber un vértice $v_q \in V_Q$ en C . No puede haber 3 vértices de P en C ya que formarían un triángulo. Si hay 2 vértices de P en C , éstos deberán ser consecutivos en C , ya que si no implicaría que entre ellos hay una cuerda que corta a C . Luego, como los vértices de Q no son adyacentes entre sí, la única manera de formar C es $\{p_1, p_2, q_2, v_q, q_1\}$, donde $p_1, p_2 \in P$, $q_1, q_2 \in Q$ y $v_q \in V_Q$. Pero entonces (p_1, q_1) y (p_2, q_2) son aristas independientes, contradiciéndose con que $G' = (P, Q, E \setminus F)$ era un grafo cadena.

\Leftarrow) Supongamos que F es un conjunto de k -eliminación de grafos débilmente cordales para $C(G)$. Queremos ver que $F \cap E$ es un conjunto de k -eliminación de grafos cadena para G . Sea $G' = (P, Q, E \setminus F)$. Si G' no fuera un grafo cadena, entonces contendría un par de aristas independientes (p_1, q_1) y (p_2, q_2) , donde $p_1, p_2 \in P$ y $q_1, q_2 \in Q$. En $C(G)$, p_1, p_2 estaban conectados por una arista y k caminos de aristas disjuntos de longitud 2. Además, q_1, q_2 estaban conectados por $k + 1$ caminos de aristas disjuntos de longitud 2. Luego, p_1, p_2 están aún conectados por un camino de longitud a lo sumo 2 en $H = (V', E' \setminus F)$ y q_1, q_2 están aún conectados por un camino de longitud 2 en H . Por lo tanto, p_1, q_1, p_2 y q_2 forman parte de un ciclo inducido de longitud al menos 5 en H , llegando a una contradicción, ya que H era débilmente cordal. \square

Corolario 3.11.1 *El problema de agregado de aristas para que un grafo sea débilmente cordal es NP-completo.*

Demostración: Por definición, los grafos débilmente cordales son cerrados bajo complementación. Luego, es consecuencia inmediata del teorema 3.11 y de la proposición 2.6. \square

3.6 Resultados generales

3.6.1 Problemas de modificación de aristas para grafos clique-Helly Π

Los grafos clique-Helly y alguna de sus subclases aparecen estudiadas en numerosos trabajos. Por ejemplo, en [55] se estudia a los grafos Helly-cordales, en [17] a los grafos clique-Helly arco-circular y en [7] a los grafos clique-Helly perfectos. Los grafos clique-Helly pueden reconocerse en tiempo polinomial [55]. Luego, si la propiedad Π de grafos se puede reconocer en tiempo polinomial, también se podrá reconocer en tiempo polinomial a la propiedad clique-Helly Π .

Teorema 3.12 *El problema de eliminación (agregado, edición) de aristas para grafos Π es polinomialmente reducible al problema de eliminación (agregado, edición) de aristas para grafos clique-Helly Π si la propiedad Π es hereditaria y se mantiene al agregar un nodo universal.*

Demostración: Veamos que se cumple la siguiente propiedad “Dado un grafo G , G satisface $\Pi \Leftrightarrow G + K_1$ satisface clique-Helly Π ”.

\Leftarrow) Trivial, ya que Π es hereditaria.

\Rightarrow) $G + K_1$ satisface Π porque se agregó solamente un vértice universal, y también satisface clique-Helly porque el nuevo vértice forma parte de todas las cliques de $G + K_1$.

Luego, el teorema es válido por la proposición 2.5. □

Corolario 3.12.1 *Los problemas de modificación de aristas (agregado, eliminación y edición) para obtener un grafo que sea clique-Helly Arco-Circular son NP-completos.*

Demostración: Si G es un grafo arco-circular (propiedad hereditaria), tiene una representación de arcos alrededor de un círculo, luego al agregar un vértice universal a G se puede agregar un arco que cubra todo el círculo en su representación, con lo cual $G + K_1$ también es arco-circular. □

Corolario 3.12.2 *Los problemas de modificación de aristas (agregado, eliminación y edición) para obtener un grafo que sea clique-Helly cordal (conocidos también como Helly-Cordal) son NP-completos.*

Demostración: Si G es un grafo cordal (propiedad hereditaria), no tiene ciclos inducidos de longitud mayor a 3, luego al agregar un vértice universal a

G no se puede crear ningún ciclo de estas características, con lo cual $G + K_1$ también es cordal. \square

Corolario 3.12.3 *Los problemas de modificación de aristas (agregado, eliminación y edición) para obtener un grafo que sea clique-Helly perfecto son NP-completos.*

Demostración: Sea G un grafo perfecto (propiedad hereditaria) con $\chi(G) = \omega(G) = k$. Sea G' el grafo obtenido de agregarle a G un vértice universal v . Para todo H subgrafo inducido de G' : si v no pertenece a H implica que H es subgrafo inducido de G y por lo tanto $\chi(H) = \omega(H)$; y si v pertenece a H (con $H = H' + v$, H' subgrafo inducido de G y por lo tanto $\chi(H') = \omega(H')$) entonces se debe pintar de un nuevo color distinto a los utilizados en H' , luego $\chi(H) = \chi(H') + 1$. Además, v formará clique con todas las cliques de H' , lo que implica que $\omega(H) = \omega(H') + 1$, con lo cual H también es perfecto. \square

Corolario 3.12.4 *Los problemas de modificación de aristas (agregado, eliminación y edición) para obtener un grafo que sea clique-Helly de comparabilidad son NP-completos.*

Demostración: Si $G = (V, E)$ es un grafo de comparabilidad (propiedad hereditaria) entonces se pueden orientar sus aristas de manera tal que el grafo resultante $G' = (V, D)$ satisface: $(u, v) \in D, (v, w) \in D \Rightarrow (u, w) \in D$. Al agregar un vértice universal v a G , se puede elegir una orientación de las aristas de $G + K_1$ tal que coincida con D para las aristas que estaban en E y tal que las aristas nuevas que se acaban de agregar (que tienen a v como extremo) apunten todas (o ninguna) a v . Esta orientación cumple con la propiedad antes mencionada, con lo cual $G + K_1$ también es de comparabilidad. \square

Corolario 3.12.5 *Los problemas de modificación de aristas (agregado, eliminación y edición) para obtener un grafo que sea clique-Helly permutación son NP-completos.*

Demostración: Si G es un grafo permutación (propiedad hereditaria), tiene una representación de intervalos en la recta real tal que dos nodos son adyacentes en G si y solo si los intervalos correspondientes están incluidos uno dentro del otro, ya que los grafos permutación son equivalentes a los *containment* de intervalos. Luego, al agregar un vértice universal a G se puede agregar un intervalo que incluya a todos los demás, con lo cual $G + K_1$ también es permutación. \square

3.6.2 Resultados para grafos bipartitos

Los siguientes resultados son análogos a los de las proposiciones 2.4 y 2.5, pero especializándose en grafos bipartitos.

Proposición 3.13 Sean $G = (V_1, V_2, E)$ y $G' = (V_1 \cup S_1, V_2 \cup S_2, E)$ dos grafos bipartitos, donde S_1 y S_2 son conjuntos independientes, no vacíos, disjuntos entre sí y disjuntos con V_1 y con V_2 . Si Π y Π' son propiedades de grafos (bipartitos) tales que G satisface Π si y sólo si G' satisface Π' , entonces

1. Π -eliminación es polinomialmente reducible a Π' -eliminación.
2. Si además Π es hereditaria, entonces el problema de Π -agregado bipartito (respectivamente Π -edición bipartita) se puede reducir polinomialmente a Π' -agregado bipartito (respectivamente Π' -edición bipartita).

Demostración:

1. F es un conjunto de k -eliminación Π para $G = (V_1, V_2, E)$ si y sólo si $\widetilde{G} = (V_1, V_2, E \setminus F)$ cumple con la propiedad Π , esto pasa si y sólo si $\widetilde{G}' = (V_1 \cup S_1, V_2 \cup S_2, E \setminus F)$ cumple con la propiedad Π' (por hipótesis), y esto sucede si y sólo si F también es un conjunto de k -eliminación Π' para G' (Notar que $\widetilde{G}' = (\widetilde{G})'$).
2. Consideremos la siguiente reducción del problema de Π -agregado bipartito a Π' -agregado bipartito (la reducción de Π -edición bipartita a Π' -edición bipartita es idéntica):
si $\langle G = (V_1, V_2, E), k \rangle$ es una instancia de Π -agregado bipartito, construimos una instancia $\langle G' = (V_1 \cup S_1, V_2 \cup S_2, E), k \rangle$ de Π' -agregado bipartito, con $|S_1| = |S_2| = k + 1$.

Veamos que una de las instancias tiene solución si y sólo si la otra también la tiene. Si F es un conjunto de k -agregado bipartito Π para G , también es un conjunto de k -agregado bipartito Π' para G' , ya que $\widetilde{G}' = (\widetilde{G})'$ (con $\widetilde{G} = (V_1, V_2, E \cup F)$ y $\widetilde{G}' = (V_1 \cup S_1, V_2 \cup S_2, E \cup F)$) y por hipótesis si G satisface Π entonces G' satisface Π' .

Por otro lado, supongamos que F es un conjunto de k -agregado bipartito Π' para G' . Luego, $\widetilde{G} = (X_1, X_2, E \cup F)$ con $X_1 = V_1 \cup S_1$ y $X_2 = V_2 \cup S_2$ contiene un vértice aislado en X_1 (en particular en S_1) y un vértice aislado en X_2 (en particular en S_2). Si se remueven estos dos vértices (que a su vez son conjuntos independientes para X_1 y X_2), resulta un grafo que satisface Π . Como Π es hereditaria, entonces $F \cap (V_1 \times V_2)$ es un conjunto de k -agregado bipartito Π para G . \square

Definición 3.14 Una biclique universal de un grafo bipartito $G = (V_1, V_2, E)$ es una biclique $B = (B_1, B_2)$ de G tal que $V_1 \times B_2 \subseteq E$ y $V_2 \times B_1 \subseteq E$, es decir, se aplica la operación “+” entre los subconjuntos de la biclique y los subconjuntos correspondientes de G .

Proposición 3.15 Sean $G = (V_1, V_2, E)$ y $G' = (V_1 \cup S_1, V_2 \cup S_2, E \cup E')$ dos grafos bipartitos, donde $E' = S_1 \times S_2 \cup V_1 \times S_2 \cup S_1 \times V_2$ (S_1 y S_2 son conjuntos no vacíos), es decir, se agrega una biclique universal. Si Π y Π' son propiedades de grafos (bipartitos) tales que G satisface Π si y sólo si G' satisface Π' , entonces

1. Π -agregado bipartito es polinomialmente reducible a Π' -agregado bipartito.
2. Si además Π es hereditaria, entonces el problema de Π -eliminación (respectivamente Π -edición bipartita) se puede reducir polinomialmente a Π' -eliminación (respectivamente Π' -edición bipartita).

Demostración:

1. F es un conjunto de k -agregado bipartito Π para $G = (V_1, V_2, E)$ si y sólo si $\widetilde{G} = (V_1, V_2, E \cup F)$ cumple con la propiedad Π , esto pasa si y sólo si $\widetilde{G}' = (V_1 \cup S_1, V_2 \cup S_2, E \cup S_1 \times S_2 \cup V_1 \times S_2 \cup S_1 \times V_2 \cup F)$ cumple con la propiedad Π' (por hipótesis), y esto sucede si y sólo si F también es un conjunto de k -agregado bipartito Π' para G' .
2. Consideremos la siguiente reducción del problema de Π -eliminación a Π' -eliminación (la reducción de Π -edición bipartita a Π' -edición bipartita es idéntica): si $\langle G = (V_1, V_2, E), k \rangle$ es una instancia de Π -eliminación, construimos una instancia $\langle G' = (V_1 \cup S_1, V_2 \cup S_2, E \cup E'), k \rangle$ de Π' -eliminación, con S_1 y S_2 conjuntos disjuntos entre sí y disjuntos con V_1 y con V_2 , $|S_1| = |S_2| = k + 1$.

Veamos que una de las instancias tiene solución si y sólo si la otra también la tiene. Si F es un conjunto de k -eliminación Π para G , también es un conjunto de k -eliminación Π' para G' , ya que $\widetilde{G}' = (\widetilde{G})'$ (con $\widetilde{G} = (V_1, V_2, E \setminus F)$ y $\widetilde{G}' = (V_1 \cup S_1, V_2 \cup S_2, E \cup E' \setminus F)$) y por hipótesis si G satisface Π entonces G' satisface Π' .

Por otro lado, supongamos que F es un conjunto de k -eliminación Π' para G' . Luego, $\widetilde{G}' = (X_1, X_2, E \cup E' \setminus F)$ con $X_1 = V_1 \cup S_1$ y $X_2 = V_2 \cup S_2$. \widetilde{G}' todavía contiene un vértice $v_1 \in S_1$ relacionado con todos los vértices en X_2 (porque se eliminaron a lo sumo k aristas) y un vértice $v_2 \in S_2$ relacionado con todos los vértices en X_1 . Si se remueven estos dos vértices (que forman una biclique universal), resulta un grafo $H =$

$\widetilde{G}' \setminus \{v_1, v_2\}$ que satisface Π por hipótesis. \widetilde{G} es un subgrafo inducido de H por $V_1 \cup V_2$, y como Π es hereditaria, entonces $\widetilde{G} = G \setminus (F \cap E)$ satisface Π y por lo tanto $F \cap E$ es un conjunto de k -eliminación Π para G . \square

Los grafos biclique-Helly pueden reconocerse en tiempo polinomial [31]. Luego, si la propiedad Π de grafos se puede reconocer en tiempo polinomial, también se podrá reconocer en tiempo polinomial a la propiedad biclique-Helly Π .

Teorema 3.16 *El problema de eliminación (agregado bipartito, edición bipartita) de aristas para grafos Π es polinomialmente reducible al problema de eliminación (agregado bipartito, edición bipartita) de aristas para grafos biclique-Helly Π si la propiedad Π es hereditaria y se mantiene al agregar una biclique universal.*

Demostración: Veamos que se cumple la siguiente propiedad “Dado un grafo bipartito $G = (V_1, V_2, E)$, G satisface $\Pi \Leftrightarrow G'$ es biclique-Helly y satisface Π , donde $G' = (V_1 \cup S_1, V_2 \cup S_2, E \cup E')$, y $E' = S_1 \times S_2 \cup V_1 \times S_2 \cup S_1 \times V_2$, es decir, se agrega una biclique universal.”.

\Leftarrow) Trivial, ya que Π es hereditaria y G es subgrafo inducido de G' .

\Rightarrow) G' satisface Π porque se agregó solamente una biclique universal, y también satisface biclique-Helly porque $S_1 \cup S_2$ está incluido en toda biclique maximal de G' .

Luego, el teorema es válido por la proposición 3.15. \square

Corolario 3.16.1 *Los problemas de modificación de aristas (agregado bipartito, eliminación y edición bipartita) para obtener un grafo que sea biclique-Helly cadena son NP-completos.*

Demostración: Si $G = (V_1, V_2, E)$ es un grafo cadena (propiedad hereditaria), al agregarle una biclique universal $B = (B_1, B_2)$ ocurre que existe una arista entre los nodos de B_1 y cada uno de los nodos de V_2 , con lo cual el vecindario de todos los nodos de B_1 en el nuevo grafo $G' = (V_1 \cup B_1, V_2 \cup B_2, E \cup B_1 \times B_2 \cup V_1 \times B_2 \cup B_1 \times V_2)$ es el mismo e incluye al de todos los nodos de V_1 . Luego, se puede definir un nuevo ordenamiento π de los nodos de $X_1 = V_1 \cup B_1$: los nodos de V_1 se ordenan igual que en G , y al final se agregan todos los nodos de B_1 en algún orden. Entonces ocurre que $N(\pi^{-1}(1)) \subseteq N(\pi^{-1}(2)) \subseteq \dots \subseteq N(\pi^{-1}(|X_1|))$, determinando que G' también es un grafo cadena. \square

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

Los problemas de modificación de aristas en grafos son de gran interés en la teoría de grafos, con variadas aplicaciones en distintos campos. En la sección 2.2 se describen la mayoría de las áreas en las que se encuentran involucrados dichos problemas.

Se conocen fuertes resultados para problemas de eliminación de vértices: Lewis y Yannakakis [39] mostraron que para toda propiedad no trivial y hereditaria y un grafo G , el problema de encontrar el subgrafo máximo inducido de G que cumpla la propiedad es NP-hard. Uno de los problemas abiertos es encontrar un resultado tan general como éste para problemas de modificación de aristas.

A pesar de no existir dicho resultado general, la complejidad computacional de una gran variedad de problemas de modificación de aristas fue estudiada por distintos autores. La mayoría de los problemas resultaron ser NP-hard. En la sección 2.3 se realiza un resumen de los resultados previos conseguidos en este área.

En el capítulo 3 aparecen los principales resultados obtenidos en esta tesis: la NP-completitud de los problemas de eliminación de aristas para grafos permutación, circulares, puente y débilmente cordales, agregado de aristas para grafos permutación, circulares y puente, y la edición de aristas para grafos intervalos, de intervalos unitarios, arco-circulares, arco-circulares unitarios, arco-circulares propios, permutación y circulares. También se demuestra que los problemas de modificación de aristas son NP-completos para grafos clique-Helly II si la propiedad II es hereditaria y se mantiene al agregar un nodo universal, y se muestra un resultado análogo para grafos bipartitos. Entre los resultados obtenidos como corolario de este último teorema aparecen la NP-completitud de los problemas de edición, agregado y eliminación de aristas para grafos clique-Helly arco-circulares, clique-Helly cordales, clique-Helly perfectos, clique-Helly de comparabilidad y clique-Helly permutación.

Aún se desconoce la complejidad computacional de una gran cantidad de problemas de modificación de aristas y para algunas de sus variantes, como los problemas *sandwich*. Un resumen de los problemas que continúan abiertos se presenta en la tabla 2.1.

En la sección 2.4 se muestra una recopilación de las buenas soluciones conseguidas por distintos investigadores, a través de heurísticas y aproximaciones, o trabajando con problemas restringidos, por ejemplo, con grafos de grado acotado o dejando un parámetro del problema fijo, que permiten resolver los problemas de modificación de aristas de manera tal que puedan ser utilizados en aplicaciones de la vida real. Surge entonces como trabajo futuro la búsqueda de buenas soluciones para los problemas de modificación de aristas cuya NP-completitud fue demostrada en esta tesis.

Bibliografía

- [1] K. ABRAHAMSON, R. DOWNEY & M. FELLOWS, *Fixed parameter intractability*, proc. STACS, Springer Verlag LNCS (1993), 374-385.
- [2] T. ASANO & T. HIRATA, *Edge-Deletion and Edge-contraction Problems*, Proceedings of the fourteenth Annual ACM symposium on Theory of Computing (1982), 245-254.
- [3] H.L. BODLAENDER & B. DE FLUITER. *On intervalizing k -colored graphs for DNA physical mapping*, Discrete Applied Math., 71 (1966), 55-77.
- [4] H.L. BODLAENDER, M.R. FELLOWS, M.T. HALLETT, H.T. WAREHAM & T.J. WARNOW. *The hardness of perfect phylogeny, feasible register assignment and other problems on thin colored graphs*, Theoretical Computer Science, 244(1-2) (2000), 167-188.
- [5] H.L. BODLAENDER, R.G. DOWNEY, M.R. FELLOWS & H.T. WAREHAM. *The parameterized complexity of sequence alignment and consensus*, Theoretical Computer Science, 147(1-2) (1995), 31-54.
- [6] F. BONOMO, *Sobre grafos balanceados y complejidad computacional de problemas asociados a la teoría de grafos perfectos*, Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires (2002).
- [7] F. BONOMO & G. DURAN, *Computational complexity of some classical problems on hereditary clique-Helly, perfect and K -perfect graphs*, submitted (2003).
- [8] K.S. BOOTH & G.S. LUEKER, *Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms*, Journal of Computer Science, 13 (1976), 335-379.
- [9] A. BRANDSTÄDT, V. LE & J. SPINRAD, *Graph Classes: A Survey*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications (1999).
- [10] L. CAI, *Fixed-parameter tractability of graph modification problems for hereditary properties*, Informattion Processing Letters, 58(4) (1996), 171-176.

- [11] M. CHUDNOVSKY & P. SEYMOUR, *Recognizing Berge Graphs*, manuscrito, november 15, (2002).
- [12] S. COOK, *The complexity of theorem-proving procedures*, Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing Machinery, New York (1971), 151-158.
- [13] G. CORNUÉJOLS, X. LIU & K. VUŠKOVIĆ, *A Polynomial Algorithm for Recognizing Perfect Graphs*, manuscrito, (2002).
- [14] R. DOWNEY & M. FELLOWS, *Fixed-parameter tractability and completeness III: Some structural aspects of the W hierarchy*, Reporte técnico, Computer Science Dept, Universidad de Victoria (1992).
- [15] B. DUSHNIK & E.W. MILLER, *Partially ordered sets*, Amer. J. Math. 63 (1941), 600-610.
- [16] G. DURÁN, *Sobre grafos intersección de arcos y cuerdas en un círculo*, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires (2000).
- [17] G. DURÁN & M. LIN, *Clique graphs of Helly circular-arc graphs*, Ars Combinatoria 60 (2001), 255-271.
- [18] E. EL-MALLAH & C. COLBOURN, *The complexity of some edge deletion problems*, IEEE Transactions on Circuits and Systems 35(3) (1988), 354-362.
- [19] M. FARBER & R.E. JAMISON, *On local convexity in graphs*, Discrete Math., 66 (1987), 231-247 .
- [20] A. FARRUGIA, *Clique-Helly graphs, and Hereditary Clique-Helly graphs - a mini-survey*, Algorithmic Graph Theory (CS 762) Project, Dept. of Combinatorics, University of Waterloo (2002).
- [21] M.R. FELLOWS, M.T. HALLET & H.T.WAREHAM, *DNA physical mapping: Three ways difficult*, Proc. First European Symp. on Algorithms (ESA '93), 726 (1993), 157-168.
- [22] M. GAREY & D. JOHNSON, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*, Freeman and Company, San Francisco (1979).
- [23] M.R. GAREY, D.S. JOHNSON & L. STOCKMEYER, *Some simplified NP-complete graph problems*, Theoretical Computer Science, 1 (1976), 237-267.
- [24] F. GAVRIL, *Algorithms for a maximum clique and a maximum independent set of a circle graph*, Networks, 3 (1973), 261-273.

- [25] P.W. GOLDBERG, M. C. GOLUMBIC, H. KAPLAN & R. SHAMIR, *Four strikes against physical mapping of DNA*, Journal of Computational Biology, 2 (1995), 139-152.
- [26] M. GOLUMBIC, *Algorithm Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, Nueva York (1980).
- [27] M.C. GOLUMBIC, H. KAPLAN & R. SHAMIR, *On the complexity of DNA physical mapping*, Advances in Applied Mathematics, 15 (1994), 251-261.
- [28] M.C. GOLUMBIC, H. KAPLAN & R. SHAMIR, *Graph sandwich problems*, Journal of Algorithms, 19 (1995), 449-473.
- [29] M.C. GOLUMBIC & R. SHAMIR, *Complexity and algorithms for reasoning about time: A graph-theoretic approach*, Journal of the ACM, 40 (1993), 1108-1133.
- [30] A. GRAVANO, *Estudio de problemas, propiedades y algoritmos en grafos arco-circulares y circulares*, Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación, Universidad de Buenas Aires (2001).
- [31] M. GROSHAUS, *Comunicación personal* (2003).
- [32] S. L. HAKIMI, E. F. SCHMEICHEL & N. E. YOUNG, *Orienting graphs to optimize reachability*, Information Processing Letters, 63 (1997), 229-235.
- [33] F. HARARY, *Graph Theory*, Addison-Wesley (1969).
- [34] H. KAPLAN & R. SHAMIR, *Pathwidth, Bandwidth and Completion Problems to Proper Interval Graphs with Small Cliques*, Proceedings of the 34th Symposium on Foundations of Computer Science (1994).
- [35] H. KAPLAN, R. SHAMIR & R.E. TARJAN, *Tractability of parameterized completion problems on chordal, strongly chordal and proper interval graphs: Minimum fill-in and physical mapping*, Proceedings of the 35th Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Science Press, Los Alamitos, California (1994), 780-791.
- [36] R. KARP, *Reducibility among combinatorial problems*, In R. Miller and J. Thatcher (eds.), Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York (1972), 85-103.
- [37] P. KOLAITIS & M. THAKUR, *Approximation Properties of NP Minimization Classes*, Journal of Computer and System Sciences, 50 (1995), 391-411.

- [38] V.B. LE & J. SPINRAD, *Consequences of an algorithm for bridged graphs*, manuscrito (1999).
- [39] J.M. LEWIS & M. YANNAKAKIS, *The node deletion problem for hereditary properties is NP-complete*, Journal of Computer and System Sciences 20 (1980), 219-230.
- [40] C. LUND & M. YANNAKAKIS, *The approximation of maximum subgraph problems*, Proceedings of International Conference on Automata, Languages and Programming (ICALP), volumen 700 de LNCS, Berlin, Alemania (1993), 40-51.
- [41] F. MARGOT, *Some complexity results about threshold graphs*, Discrete Applied Mathematics, 49 (1994).
- [42] R.M. MCCONNELL & J. SPINRAD, *Linear-time transitive orientation*, 8th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (1997), 19-25.
- [43] F. R. MCMORRIS, T. J. WARNOW & T. WIMER, *Triangulating vertex colored graphs*, SIAM J. Discrete Math., 7 (1994), 296-306.
- [44] A. NATANZON, R. SHAMIR & R. SHARAN, *A polynomial approximation algorithm for the minimum fill-in problem*, SIAM Journal of Computing 30(4) (2000), 1067-1069.
- [45] A. NATANZON, R. SHAMIR & R. SHARAN, *Complexity classification of some edge modifications problems*, Discrete Applied Mathematics 113 (2001), 109-128.
- [46] C. PAPADIMITRIOU & M. YANNAKAKIS, *Optimization, approximation, and complexity classes*, Journal of Computer and System Science 43 (1991), 425-440.
- [47] R. PEETERS, *The maximum edge biclique problem is NP-complete*, Research Memorandum 789, Tilburg University: Faculty of Economics and Business Administration (2000).
- [48] E. PRISNER, *Bicliques in Graphs I: Bound on their number*, Combinatorica 20 N. 1 (2000), 109-117.
- [49] E. PRISNER, *Bicliques in graphs II: Recognizing k-path graphs and underlying graphs of line digraphs*, Proc. WG97, Lect. Notes Comput. Sci. 1335 (1997), 273-287.
- [50] F.S. ROBERTS, *Indifference graphs*, Graph Theory and computing, páginas 139-146. Academic Press, N.Y. (1969).
- [51] J.D. ROSE, *A graph-theoretic study of the numerical solution of sparse positive definite systems of linear equations*, Graph Theory and Computing, páginas 183-217. Academic Press, N.Y. (1972).

- [52] R. SHAMIR, R. SHARAN & D. TSUR, *Cluster Graph Modification Problems*, Proceedings of 28th International WorkShop on Graph Theoretical Concepts in Computer Science (2002).
- [53] R. SHARAN, *Graph Modification Problems and their Applications to Genomic Research*, Tesis de Doctorado. Sackler Faculty of Exact Sciences, School of Computer Science. Tel-Aviv University (2002).
- [54] J.P. SPINRAD & R. SRITHARAN, *Algorithms for weakly triangulated graphs*, Discrete Appl. Math., 59 (1995), 181-191.
- [55] J. SZWARCFITER, *Recognizing clique-Helly graphs*, Ars Combinatoria 45 (1997), 29-32.
- [56] J. XUE, *Edge-maximal triangulated subgraphs and heuristics for the maximum clique problem*, Networks, 24 (1994).
- [57] M. YANNAKAKIS, *Computing the minimum fill-in is NP-complete*, SIAM J. Alg. Disc. Meth., 2(1) (1981), 77-79.
- [58] M. YANNAKAKIS, *Edge deletion problems*, SIAM Journal on Computing, 10(2) (1981), 297-309.
- [59] M. YANNAKAKIS, *Node-and edge-deletion NP-complete problems*, Proceedings Tenth ACM symposium on Theory of Computing (1978).