Tesis de Licenciatura
Sobre grafos perfectos, clique perfectos, K-perfectos y coordinados

Marina E. Groshaus
groshaus@dc.uba.ar
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA
Director: Guillermo A. Durán.

Diciembre de 2001

A ella...

Estoy aquí disfrutando del placer de participar con unas líneas, ocupando un humilde "lugar" en esta tesis.

No quisiera que nada, ni mis ojos empañen este gran momento al referirme a ella. Al amor que le tengo, agrego la admiración que siento por su inteligencia y su sentido del humor que utiliza para concebir el mundo.

¿Cómo fue que ella llegó hasta aquí?

¿Cómo es la historia que la convierte en el ser que es hoy?

Nació como todos los bebés, creció como todos los bebés crecen, comió, habló,..., como todos lo hacen. Recuerdo que fue excelente alumna, compañera y amiga.

Pero ella encontŕo algo en su vida: "las Matemáticas". Las abrazó, las conoció, las quiso y todo ello con una gran cuota de coraje. Dice un proverbio chino: " El coraje como el amor es hermano de la esperanza". Y ella lo tuvo. También como en el amor, sin esperar nada a cambio, se entregó al conocimiento, al razonamiento, con gran creatividad pero no sin esfuerzo y dedicación.

Hoy veo una mujer "integral", quizás "derivada" de sus conocimientos de las ciencias, o quizás de su propia riqueza interior o tal vez de todo ello junto. Pero sí estoy segura de una cosa, que ella ha conseguido el mejor título que se puede obtener en la vida, y es el de "Persona". Y esa dulce, interesante e inteligente personita es mi hija Marina. Lo dice su mamá,

Con mucho orgullo y emoción quiero decirle

"Gracias"

Quiero aprovechar esta oportunidad para decirles a todos,

A mi Director Guillermo Durán, o mejor dicho "Willy", quien se armó de mucha paciencia y me aguantó todos estos meses de trabajo, escuchándome y dándome la oportunidad de conocer y hasta "querer" la teoría de grafos. Gracias a él, ese momento tan temido para mi que era realizar una tesis, resultó una de las experiencias más gratificantes de mi carrera.

Al jurado, en especial a Juan Sabia, cuyo compromiso con la lectura fue mucho mayor al de un jurado.

A Flavia, con quien fue verdaderamente un honor trabajar, no sólo por su excelente calidad académica sino también por su inigualable calidad humana, y cuya colaboración en este trabajo resultó por demás indispensable.

A Javier, quien con su bondad habitual y su paciencia, me ayudó mucho más de lo que él imagina

A todos los que acudieron en mi ayuda a cada pedido de "socorro" al enfrentarme con las malas jugadas de la computadora, como mis compañeras de cuartito Rocío y Roxana, Agustín, entre otros.

A Leandro y Mariano, dos de los regalos más importantes que me dio esta facultad

A Agus, Manu, Pablín, Patu, Beto, Matilde, Gastón, y **todos** los que emprendieron este camino junto conmigo

A Julio y Julián, mis "guías espirituales" durante toda mi carrera

A mis alumnos, cuyo aliento constante siempre me dio muchas pilas para seguir

A Lu, quien estuvo en cada paso de mi carrera, y de mi vida

A Luly, quien en poco tiempo se supo ganar un lugar en mí

A mis amigas Karin, Cecy, Checha, Luciana y Diana, quienes me acompañaron en todo mi crecimiento

A Julián, quien me bancó, me apoyó y me incentivó incondicionalmente gran parte de mi carrera

A Coco, quien me enseñó y ayudó a confiar en mi

A mi papá y a mi hermano, quienes siempre me incentivaron para seguir adelante, a toda mi familia, mis tío/as, primas,

y especialmente a mi Mamá, quien sufrió conmigo cada parcial, quien a diferencia de muchas, siempre me decía "por qué no dejás un ratito de estudiar", de quien no faltaron nunca esas palabras mágicas y tranquilizadoras de aliento "Rutina Marina" antes de ir a rendir, quien se alegró con cada éxito y quien seguramente hoy, de alguna manera, se recibe conmigo.

A todos ellos y a TODOS,

Gracias

Resumen

Los grafos perfectos fueron introducidos por Berge en el año 1961 y se han convertido en una de las clases de grafos más estudiadas. Un teorema muy importante presentado por Chvátal en el año 1975 relaciona el poliedro generado por la matriz clique de un grafo con ciertas propiedades del grafo. Chvátal demostró que si A es la matriz clique de G, entonces el poliedro $\{x \in \Re^n / A \cdot x \leq 1, x \geq 0\}$ tiene extremos enteros si y sólo si el grafo es perfecto. Este resultado fue el que dio origen a esta tesis. Dado que los grafos clique perfectos están definidos de una manera muy similar a los grafos perfectos, planteamos la posibilidad de que un resultado equivalente podría relacionar estos grafos y el poliedro $\{x \in \Re^m / A^T \cdot x \leq 1, x \geq 0\}$. Luego de probar un teorema que relaciona la matriz clique traspuesta de G con la matriz clique de su grafo clique (capítulo 2), encontramos que plantear una relación entre el poliedro mencionado y propiedades de G es muy similar a relacionar propiedades del grafo con la posibilidad de que su grafo clique sea perfecto. Fue así como surgió la definición de los grafos coordinados (capítulo 2). Vimos cómo se relacionan los parámetros de estos grafos, de los clique perfectos y los parámetros de los perfectos en el grafo clique (capítulo 3). Dado que estas relaciones no se mantienen para los subgrafos inducidos, aparece la necesidad de definir los subgrafos clique que resultaron de suma importancia no sólo para este trabajo, sino que aparecen relacionados con los grafos clique Helly hereditarios y los grafos trivialmente perfectos. Finalmente, probamos un teorema similar al de Chvátal, que muestra que dentro de la clase de los grafos clique Helly hereditarios, los grafos $clique{-}perfecto_c$, los grafos $coordinado_c$ y aquéllos cuyo poliedro $\{x \in \Re^m / A^T \cdot x \leq 1, x \geq 0\}$ tiene extremos enteros, son equivalentes (capítulo 4). Este resultado junto con un teorema de F.Bonomo nos permitió caracterizar a los grafos clique de los grafos perfectos obteniendo como resultado que K(perfectos $\cap$ clique Helly) = K-perfectos $\cap$ clique Helly, y la clase K(perfectos $\cap$ clique Helly hereditarios) = $coordinados_c$ $\cap$ clique Helly hereditarios. .

Índice

Capítulo 1

Definiciones y conceptos previos

Definición 1.1 *Un grafo G=(V(G),E(G)) está definido por un conjunto finito V(G) de vértices y un conjunto E(G) de aristas, con E(G)* $\subseteq V(G) \times V(G)$ *donde se considera que el par* $(u,v) = (v,u)$ *y para todo* $v \in V(G)$*, el par* $(v,v) \notin E(G)$*.*

Si v y w son dos vértices de G, entonces el par no ordenado (v,w) *es la arista que une v y w. Los vértices v y w son adyacentes en G si* $(v,w) \in E(G)$*, es decir si en el grafo G, existe una arista que une v y w. Por último, si* (v,w) *es una arista de G, entonces v y w son los vértices en los que ésta incide. Dos vértices son independientes cuando no son adyacentes.*

Un vértice es universal, cuando es adyacente a todos los vértices del grafo.

Dado un grafo G=(V(G),E(G)), dibujamos los vértices de V(G) como puntos y unimos los vértices v y w si la arista (v,w) *pertenece a E(G).*

Definición 1.2 *Sea G=(V(G),E(G)) un grafo. Se denomina el complemento de G al grafo* $\overline{G} = (V(G),\overline{E(G)})$*, donde el conjunto* $\overline{E(G)}=\{(v,w),\ v \in V(G),\ w \in V(G),\ v \neq w,\ y\ (v,w) \notin E(G)\}$

Más claramente, en el grafo $\overline{G}$ están las aristas que no estaban en G y no están las aristas que estaban en G.

Definición 1.3 *Un grafo G es completo si todos los vértices de G son adyacentes entre sí. El grafo completo de n vértices se denota* K_n *(figura 1.1).*

Definición 1.4 *Sea G=(V(G),E(G)) un grafo.* G' *es un subgrafo de G si* $G' = (V'(G'), E'(G'))$ *donde* $V'(G) \subseteq V(G)$ *y* $E'(G) \subseteq E(G) \cap V'(G) \times V'(G)$*.*

Un grafo $G' = (V(G'), E(G'))$ *es un* ***subgrafo inducido*** *de G si es un subgrafo de G y además para todo par de vértices* $v,\ w \in V(G')$*, si la arista* $(v,w) \in E(G)$*, entonces la arista* $(v,w) \in E(G')$*: Es decir,*

$$E(G')=\{\ (v,w)\ /\ (v,w) \in E(G)\ ,\ v\ y\ w \in V(G')\}$$

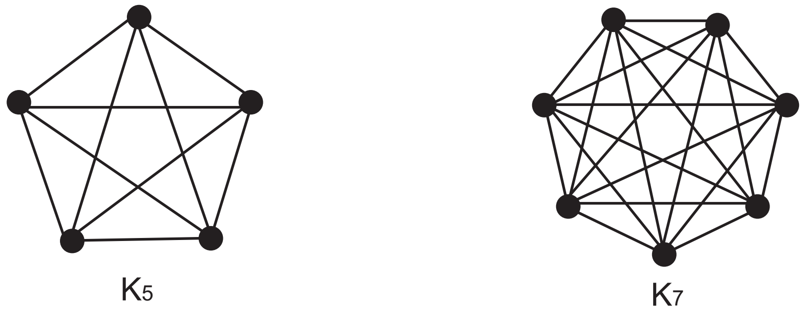


Figura 1.1: Grafos completos

Definición 1.5 *Sea G un grafo, entonces llamamos:*

***Clique**: Un subgrafo de G completo maximal, en el sentido que si se le agrega otro vértice de G con sus respectivas adyacencias, no resulta completo.*

***k-Ciclo** : Es una secuencia de vértices $v_1.....v_k$ distintos, donde v_i es adyacente a v_{i+1} y a v_{i-1} para todo $2 \leq i \leq k-1$, y a ningún otro vértice de la secuencia. Además v_k es adyacente a v_1. Los k-ciclos se denotan C_k (figura 1.2).*

Ejemplo 1.1 *En la figura 1.2 tenemos tres cliques en el grafo G: la formada por los vértices 1,2,3; la que forman los vértices 2,3,5,6; y por último la que forman los vértices 2,3,4 y 5.*

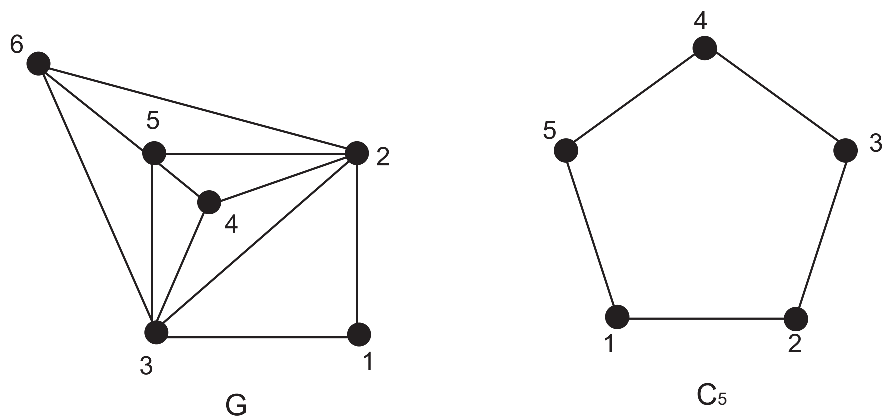


Figura 1.2: Cliques de un grafo y Ciclos

Definición 1.6 *Diremos que dos cliques de un grafo son independientes si no existe ningún vértice que pertenezca a ambas.*

Diremos que un vértice v es dominado por w o bien que w domina a v si toda clique que contiene a v, también contiene a w, o equivalentemente, si $F_v = \{Cliques\ que\ contienen\ a\ v\}$, entonces $F_v \subseteq F_w$.

Definición 1.7 *Una familia de conjuntos F se dice que tiene la propiedad de* ***Helly*** *si se verifica que: en toda subfamilia F' tal que para todo par de conjuntos pertenecientes a esta subfamilia tienen intersección no vacía (intersección dos a dos), entonces todos los conjuntos de F' tienen intersección total no vacía.*

Decimos que un grafo G es ***clique Helly*** *si la familia formada por las cliques de G tiene la propiedad de Helly.*

Definición 1.8 *Una propiedad P se dice hereditaria si para todo grafo G se cumple que siempre que P valga para G, entonces P vale para todo subgrafo inducido de G.*

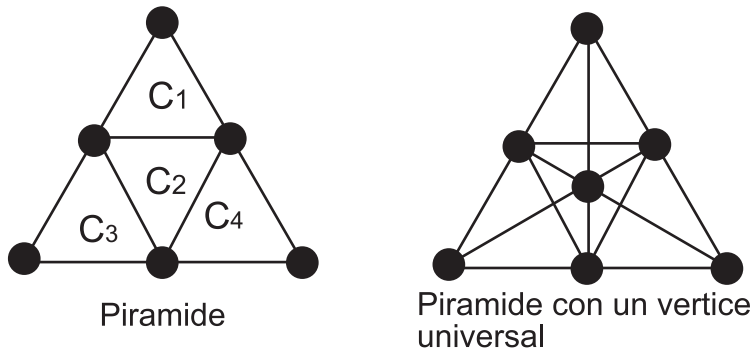


Figura 1.3: Grafos no clique Helly y clique Helly

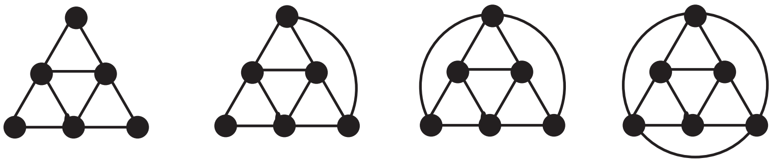
Observación 1.1 *La propiedad clique Helly* ***no*** *es hereditaria (figura 1.3). La pirámide no es clique Helly, pero si le agregamos un vértice universal sí lo es. Entonces, tiene sentido la siguiente definición:*

Definición 1.9 *Un grafo G es* ***clique Helly hereditario*** *(CHH) si todo subgrafo inducido es clique Helly.*

Los grafos clique Helly y los clique Helly hereditarios van a tener un rol muy importante en este trabajo.

Una manera muy utilizada para describir clases de grafos es mediante subgrafos prohibidos, es decir, pidiendo que ciertos grafos no aparezcan como subgrafos inducidos de G. Prisner ha dado una caracterización de los grafos clique Helly hereditarios mediante subgrafos prohibidos. Este resultado será de gran utilidad en el desarrollo del capítulo 4.

Teorema 1.1 *(Prisner) [44] Un grafo G es clique Helly hereditario si y sólo si no contiene como subgrafos inducidos a los siguientes grafos:*



Definición 1.10 *Sea un G=(V,E) un grafo. Una* ***matriz de incidencia*** *(aristas-vértices) de G es una matriz de valores 0-1 que tiene tantas columnas como el cardinal de V, y tantas filas como el cardinal de E, donde* $a_{ij} = 1$ *si la arista i incide en el vértice* v_j *y* $a_{ij} = 0$ *en caso contrario, para algún orden de los vértices y las cliques.*

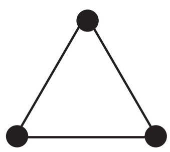
Ejemplo 1.2 *1.4 Una matriz de incidencia de la pirámide (figura 1.3) es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 1.11 *Sea G=(V,E) un grafo. Se denomina* ***matriz clique*** *de G a toda matriz de valores 0-1 que tiene tantas columnas como vértices de G y tantas filas como cliques de G, donde* $a_{ij} = 1$ *si el vértice* v_j *pertenece a la clique* C_i*, y* $a_{ij} = 0$ *en caso contrario , es decir, si es matriz de incidencia vértice-clique.*

Definición 1.12 *Sea A una matriz de valores 0-1 y sin columnas nulas. Definimos el* ***grafo inducido o derivado*** *de A como el grafo de n vértices* $v_1, v_2 \ldots v_n$*, donde* v_i *es adyacente a* v_j *si existe alguna fila k de A tal que* $a_{ki} = a_{kj} = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$Grafo\ derivado$

Observación 1.2 *Claramente, cada fila de A genera un subgrafo completo, pero no maximal. Dos matrices dististas pueden tener el mismo grafo derivado. Por ejemplo, una matriz clique de un grafo G y una matriz de incidencia (aristas-vértices) de un grafo G tienen a G como grafo derivado.*

Ejemplo 1.3 *Sea G el grafo pirámide, y sea A la siguiente matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad m.de\ incidencia(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$matriz\ clique(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estas tres matrices inducen el mismo grafo G.

Ya que, como vimos antes, matrices distintas pueden tener el mismo grafo derivado, resulta de interés tener alguna caracterización que distinga a las matrices clique de cualquier otra matriz. Para esto necesitamos algunas definiciones previas:

Definición 1.13 *Sea A una matriz de valores 0-1, y sea C_j una fila de la matriz. Se dice que C_j está incluida en otra fila C_k de A si para todo i tal que $a_{ji} = 1$, se cumple que $a_{ki} = 1$. Decimos que dos columnas tienen intersección no vacía si ambas tienen un 1 en la misma fila.*

Proposición 1.1 *Sea A una matriz de valores 0-1. Entonces A es matriz clique si y sólo si:*
i) A no tiene filas incluidas
ii) A no tiene columnas nulas
iii) El conjunto de columnas de A verifican la propiedad de Helly

Demostración:
$\Rightarrow$)

Si A es matriz clique, supongamos que tiene una fila incluida en otra. Eso implicaría que existe en G una clique incluida en otra. Si son iguales, estamos contando la misma clique dos veces (abs!) y si son distintas la que está incluida no sería maximal (abs!).

Todo vértice está en al menos una clique, luego no puede haber columnas nulas.

Sean K_{v_1}, ..., K_{v_k} una familia de columnas que se intersecan dos a dos. Que se intersequen dos columnas significa que existe una fila que tiene unos en esas posiciones, luego los vértices que corresponden a dichas columnas son adyacentes entre sí. Entonces $v_1, \ldots, v_k$ inducen un subgrafo completo, luego existe una clique que contiene a $v_1, ..., v_k$ lo cual significa que hay una fila en la que tienen un uno. Por lo tanto $K_{v_1}, ..., K_{v_k}$ tienen un elemento en común, es decir, verifican la propiedad de Helly.

$\Leftarrow$)

Sea A una matriz que verifica i), ii) y iii). Sea G el grafo inducido por A. Supongamos que A no es la matriz clique de G. Cada fila, por definición de grafo inducido, corresponde a un subgrafo completo, el cual, de no ser clique, está incluido en alguna.

Si toda clique a su vez estuviera en alguna fila, tendríamos que si hay una fila que no es clique entonces habría filas incluidas, pero A verifica i). Entonces basta ver que toda clique es una fila de A. Como no tiene columnas nulas, toda clique de un solo vértice está en A. Supongamos que hay una clique $v_1, ..., v_k$ $(k \geq 2)$ que no está en A y sean $c_1, ..., c_k$ las columnas correspondientes. Como en G dos vértices v_i, v_j son adyacentes sii c_i y c_j tienen intersección, tenemos que $c_1, ..., c_k$ tienen intersección dos a dos. Como A verifica iii), tienen intersección común, pero eso significa que hay una fila que tiene unos en todas las posiciones correspondientes a $v_1, ..., v_k$ y como $v_1, ..., v_k$ es completo maximal esa fila es la clique que no estaba (abs!). Luego A es una matriz clique de G. ∎

Muchas veces, la información que nos da la matriz clique de un grafo resulta de gran utilidad para resolver ciertos problemas de los grafos. Veremos más adelante de qué manera podemos aprovechar propiedades de la matriz y traducirlas a propiedades del grafo.

Definición 1.14 *Dado un grafo G, se define el grafo clique de un grafo como el grafo que resulta de tomar un vértice por cada clique de G, donde dos vértices son adyacentes si y sólo si las cliques correspondientes tienen intersección no vacía en G. El grafo clique de G se denota K(G).*

Definición 1.15 *Sea G un grafo, v un vértice de G, llamamos:*

- $k(G)$= *menor número de cliques necesarios para cubrir todos los vértices de G.*

- $\alpha(G)$= *cardinalidad de un conjunto de vértices independientes máximo.*

- $\omega(G)$= *cardinalidad de una clique máxima de G.*

- $\chi(G)$= *tamaño de un coloreo de vértices mínimo, es decir, de una partición de los vértices de G en conjuntos de vértices independientes.*

• *Se denomina* ***conjunto transversal de las cliques de G*** a un conjunto de vértices de G que interseca a todas las cliques del grafo.

• Un ***conjunto independiente de cliques de G*** es un subconjunto de cliques disjuntas dos a dos.

• $\tau(G)$ = tamaño de un *conjunto transversal de cliques de* G mínimo.

• $\alpha_C(G)$ = tamaño de un *conjunto independiente de cliques de* G máximo.

• $\mathbf{m(v)}$ = cantidad de cliques que contienen a v.

• $\mathbf{M(G)} = max_{v \in V(G)} m(v)$.

• **F(G)**= cardinalidad de un coloreo de cliques mínimo, es decir, tamaño de una partición mínima de las cliques del grafo en conjuntos de cliques independientes.

Definición 1.16 *Sea G un grafo,*

G *se dice perfecto* si $\omega(H) = \chi(H)$ $\forall$ H subgrafo inducido.

G se dice *coordinado* si $M(H) = F(H)$ $\forall$ H subgrafo inducido de G.

G se dice *clique perfecto* si $\alpha_C(H) = \tau(H)$ $\forall$ H subgrafo inducido de G.

G se dice K-perfecto si su grafo clique K(G) es perfecto.

1.0.1 Notación y grafos especiales

Notación:

G-e, representa el grafo G, al que se le quita la arista e.

K_n, es el grafo completo de n vértices.

C_n, ciclo de n vértices y n aristas.

$F - free$, es un grafo que no contiene como subgrafo inducido a F.

W_n, $n \geq 3$, denota el grafo C_n más un vértice universal.

$n - fan$, o abanico de n, es un camino de $n + 1$ vértices, unidos a un vértice universal.

En la figura 1.4 presentamos algunos grafos conocidos que aparecerán con frecuencia en los capítulos siguientes:

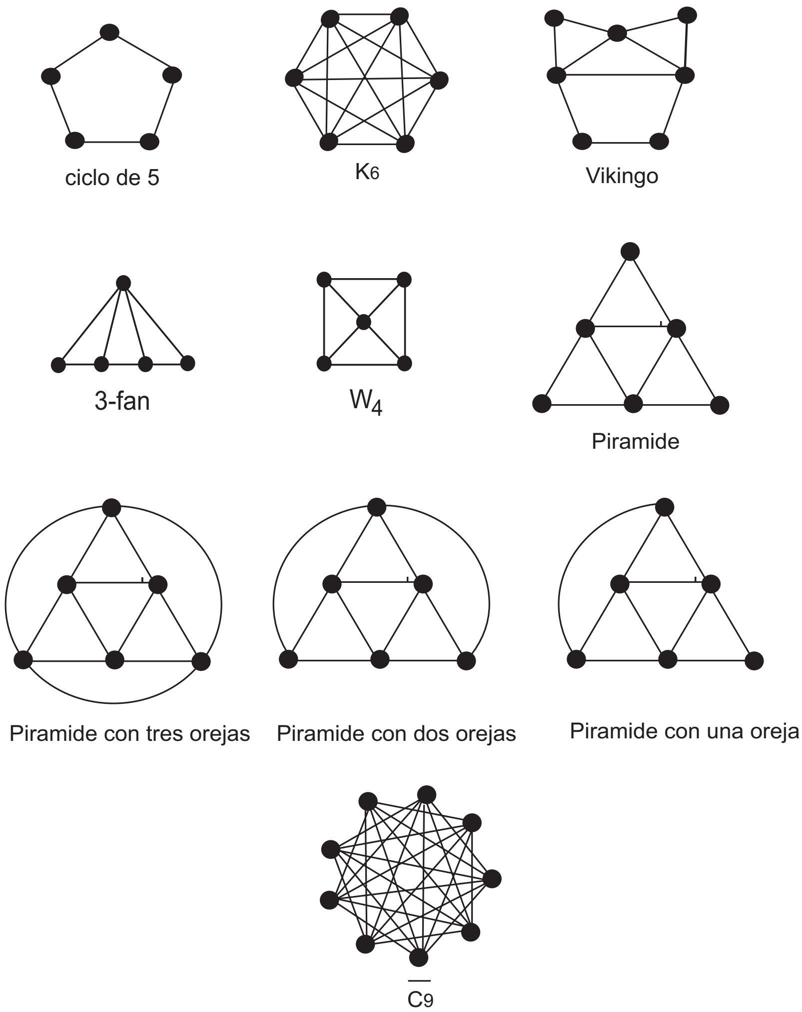


Figura 1.4: Ejemplos de grafos conocidos

1.1 Introducción a la teoría poliedral y programación lineal

Lo que sigue puede leerse más ampliado en [28].

Definición 1.17 *Un poliedro es un conjunto* $P(A) = \{x \in \Re^n : Ax \leq b\}$*, donde* $A \in \Re^{m \times n}$ *y* $b \in \Re^n$*.*

Definición 1.18 *El punto v es un extremo de P si v no puede ser escrito como combinación convexa propia de dos o más puntos en P.*

Notar que si $P = conv(K)$, entonces todo extremo de P es un punto de K (pero no a la inversa).

Lema 1.1 *Todo punto del poliedro se escribe como combinación convexa de extremos del poliedro.*

A partir de ahora, diremos que un poliedro P es entero si todos sus extremos lo son.

Un problema de programación lineal es un problema de maximización (o minimización) que tiene la siguiente forma:

$$z = \max\{cx : x \in P(A)\} \tag{1.1}$$

Donde $P(A) = \{x \in \Re^n : Ax \leq b\}$ es un poliedro, y $c \in \Re^n$.

El siguiente teorema es de vital importancia en programación lineal y puede ser usado para la resolución de problemas de complejidad computacional en problemas de grafos. En el capítulo 2 veremos cómo se pueden formular ciertos problemas de grafos como problemas de programación lineal entera.

Teorema 1.2 *Un óptimo del problema lineal (1.1), si existe, se encuentra en un extremo de $P(A)$.*

Observación 1.3 *Existen métodos que resuelven (1.1) en tiempo polinomial.*

Definición 1.19 *(problema dual) Dado un programa lineal* $\max\{cx : Ax \leq \bar{1},\ x \geq 0\}$, *definimos su problema dual como:* $\min\{y\bar{1} : yA \geq c,\ y \geq 0\}$.

Observación 1.4 *Si x es una solución factible del primal e y es una solución factible del dual, entonces $cx \leq y\bar{1}$. Por lo tanto, el óptimo del primal es menor o igual que el óptimo del dual.*

Teorema 1.3 *(Teorema de dualidad fuerte) El óptimo del problema primal tiene el mismo valor que el óptimo del problema dual.*

Muchas veces resulta más apropiado trabajar con el problema dual del problema que se quiere resolver. Gracias al teorema 1.3, podemos transformar nuestro problema en otro que eventualmente podría ser más cómodo de resolver.

Un problema de **programación lineal entera** es un problema de maximización que tiene la siguiente forma:

$$z = \max\{cx : x \in P,\ x \in Z^n\} \tag{1.2}$$

Donde $P(A) = \{x \in \Re^n : Ax \leq b\}$ es un poliedro y $c \in \Re^n$.

Teorema 1.4 *El problema de programación lineal entera general es NP-Hard.*

El problema de programacón lineal entera ha sido y sigue siendo muy estudiado en el presente. Debido al resultado del teorema 1.4 se ha tratado de buscar métodos heurísticos altenativos para encontrar soluciones aproximadas en tiempo polinomial. Claramente, si los extremos de $P(A)$ son enteros, es decir si $P = conv(P \cap Z^n)$, entonces el problema es lineal y puede resolverse en tiempo polinomial.

Capítulo 2

Clasificación de grafos

En este capítulo nos vamos a referir a cuatro clases disintas de grafos. En primer lugar, los grafos *perfectos* , que fueron introducidos por Berge en el año 1960 y que han tenido una gran importancia en la teoría de grafos. Veremos algunos de los resultados más trascendentes, como el teorema de Chvátal, que da una caracterización de estos grafos desde el punto de vista de la teoría poliedral. Luego trataremos a los grafos *clique perfectos* . Estos grafos fueros introducidos en el año 1999 por V. Guruswami y C. Pandu Rangan [30] como una variante de los grafos perfectos. En este capítulo veremos algunos ejemplos de estos grafos y sus diferencias con los grafos perfectos. Luego introduciremos a los grafos *coordinados*. Más adelante, en los capítulos siguientes, veremos por qué surge esta nueva definición de grafos y cuál es su relación con los perfectos. Por último hablaremos de los grafos K-perfectos, es decir, aquellos grafos cuyo grafo clique es perfecto. Los grafos clique han sido muy estudiados a lo largo del tiempo. En este capítulo estudiaremos las matrices clique de los grafos clique y presentaremos un resultado que fue sumamente importante en la evolución de nuestro trabajo.

2.1 Grafos Perfectos

Los grafos perfectos fueron presentados por Claude Berge en el año 1960. Su fama ha ido creciendo desde entonces, siendo estos grafos protagonistas de innumerables trabajos. Cabe mencionar la monografía de Golumbic [28], los trabajos de Fulkerson [22, 23, 24] y los importantísimos aportes de Lovász y Chvátal [17, 36, 37] entre otros. Recordemos algunas definiciones para un grafo G:

$\omega(G)$: Tamaño de una clique máxima de G.

$\chi(G)$: Número cromático, es el menor número de colores necesarios para pintar los vértices de un grafo, de tal manera que dos vértices adyacentes tengan asignados colores distintos; o equivalentemente, la menor partición de los vértices del grafo en conjuntos de vértices independientes.

$\alpha(G)$: Tamaño del conjunto de vértices independientes máximo en G.

$k(G)$: Menor número de cliques necesarias para cubrir todos los vértices del grafo G.

Notemos que para cualquier grafo G, se verifica:

$\omega(G) \leq \chi(G)$
$\alpha(G) \leq k(G)$

y además,

$\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ y $k(G) = \chi(\overline{G})$.

Definición 2.1

$G\ es\ \chi - perfecto\ si\ \omega(H) = \chi(H),\ para\ todo\ subgrafo\ inducido\ H,$
$G\ es\ \alpha - perfecto\ si\ \alpha(H) = k(H)\ para\ todo\ subgrafo\ inducido\ H.$

En el capítulo introductorio, se definieros los grafos perfectos igual que a los $\chi - perfectos$. Esto se debe a un resultado muy importante acerca de estos grafos que fue conjeturado primero por Berge [1961], luego tratado por Fulkerson [25, 26, 27] y finalmente demostrado por Lovász [36]. Este resultado es conocido como *El Teorema de los Grafos Perfectos* , que exponemos a continuación.

Teorema 2.1 *(PGT) Teorema de los Grafos Perfectos (Lovász,[37]) Sea G un grafo, entonces,*

$$G\ es\ \chi - perfecto \Longleftrightarrow G\ es\ \alpha - perfecto$$

$$\Longleftrightarrow \textit{para todo subgrafo inducido } H \textit{ de } G, \textit{ se verifica}$$
$$\mid V(H) \mid \leq \omega(H) \cdot \alpha(H)$$

Debido a este resultado, de ahora en más cuando mencionemos a los grafos perfectos nos referiremos indistintamente a cualquiera de las tres definiciones equivalentes. Cabe mencionar que la tercera equivalencia que aparece en el teorema, surgió justamente cuando Lovász demostró la equivalencia entre las dos primeras definiciones.

Definición 2.2 *Diremos que un grafo G es Berge si no contiene como subgrafos inducidos a los grafos C_{2k+1} y a $\overline{C_{2k+1}}$ $(k \geq 2)$, es decir G y $\overline{G}$ no contienen a C_{2k+1}, $(k \geq 2)$.*

Dado que los grafos C_{2k+1} y $\overline{C_{2k+1}}$ ($k \geq 2$) no son perfectos es claro que los grafos perfectos son necesariamente Berge. Una pregunta interesante es si los grafos Berge son todos perfectos.

Conjetura 2.1 *(SPGC) Si G es un grafo Berge, entonces es perfecto .*

La *conjetura fuerte de los grafos perfectos* (SPGC) presentada por Berge en el año 1961 [7], intenta responder esta pregunta. Si bien aún no ha sido probada para el caso general se demostró que la conjetura es cierta para una gran cantidad de clases de grafos, que veremos más adelante. En 1992 Prömel y Steger [46] mostraron que la SPGC es asintóticamente verdadera: si denotamos por $P(n)$ y $B(n)$ al conjunto de los grafos de n vértices perfectos y al conjunto de los grafos Berge respectivamente, se cumple que $lim_{n\to\infty}\frac{|P(n)|}{|B(n)|} = 1$.

Definición 2.3 *Un grafo G es minimalmente imperfecto si no es perfecto, pero todos sus subgrafos inducidos lo son.*

Este concepto ha jugado un papel muy importante en los intentos de prueba de la SPGC. Esta nueva definición da lugar a una versión equivalente de la conjetura.

Conjetura 2.2 *(SPGC, segunda versión) Los únicos grafos minimalmente imperfectos son los grafos C_{2k+1} y $\overline{C_{2k+1}}$.*

Esta versión de la conjetura dice que no existen grafos *Berge minimalmente imperfectos* . Un grafo con esas características se conoce con el nombre de *monstruo* . Gurvich y Hougardy [31] y Gurvich y Udalov (citado en [16]), demostraron que un *monstruo*, de existir, debe tener por lo menos 25 vértices, superando un resultado previo de Lam et al [34].

Muchas versiones equivalentes de la SPGC han sido estudiadas. En este trabajo veremos algunas de ellas. Decimos que dos vértices $v \neq w$ de G forman una dupla impar si todo camino sin cuerdas en el grafo G-(v, w) tiene un número impar de aristas. Mayniel y Olariu [41] presentaron la siguiente reformulación:

Conjetura 2.3 *(La Conjetura de las duplas impares) Ningún grafo minimalmente imperfecto contiene una dupla impar.*

En [41] se prueba que la *conjetura de las duplas impares* es equivalente al siguiente enunciado:

Un grafo G minimalmente imperfecto contiene una arista que no pertenece a ningún triángulo si y sólo si G es de la forma C_{2k+1}.

En relación a esto, De Simone y Galluccio [19] dieron una interesante reformulación de la SPGC:

Conjetura 2.4 *Sea G un grafo minimalmente imperfecto, entonces G o su complemento contienen una arista que no pertenece a ningún triángulo.*

Presentamos aquí algunas clases de grafos para las cuales se ha probado la SPGC:

Una manera muy utilizada para buscar grafos que verifiquen la SPGC es definir grafos que no contienen como subgrafo inducido algún grafo en particular F, estos son los grafos $F - free$. Observemos que gracias a las relaciones: $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ y $k(G) = \chi(\overline{G})$, tenemos que la SPGC se verifica para grafos $F - free$ si y sólo si se verifica para grafos $\overline{F} - free$.

Para el caso en que $\mid V(F) \mid= 4$, la SPGC está probada para:

- $P_4 - free$, por Seinsche [49], (figura 1.4).
- $(3 - pan\ o\ paw) - free$, por Parthasarathy y Ravindra [43], Hsu [33], (figura 1.4).
- $(K_4 - e) - free$ (*o sin diamantes*), probado por Tucker [55] y Conforti [15].
- $K_4 - free$, por Tucker [57, 59, 58].

El único caso que quedaba abierto hasta el año pasado para $\mid V(F) \mid= 4$ era el de $F = C_4$, que fue demostrado por Cornuèjols, Conforti y Vusković [14].

Para el caso $\mid V(F) \mid= 5$, la conjetura está probada para:

- $bull - free$, por Chvátal y Sbihi [18], (figura 1.4).
- $dart - free$, probado por Sun [52], (figura 1.4).
- $chair - free$, por Sassano [48], (figura 1.4).

La SPGC sigue abierta para otros grafos prohibidos F de 5 vértices. El caso más estudiado es el de $F = P_5$, sobre el cual han trabajado Olariu [42] Mafrey y Preissmann [38], y Barré junto a Fouquet [5] , entre otros.

Otra manera de restringir las clases de grafos para atacar el problema de la validez de la SPGC es mediante el uso de operadores. Dependiendo del operador Φ, el grafo $\Phi(G)$ puede tener propiedades que faciliten la prueba de la SPGC. Veremos ahora ejemplos de operadores para los cuales el conjunto de los grafos $\Phi(G)$ es una clase donde vale la SPGC.

• *Grafos Línea* , basado en resultados sobre grafos $K_{1,3} - free$. El grafo Línea de un grafo tiene un vértice por cada arista de G y dos vértices son adyacentes en L(G) si las aristas correspondientes comparten un vértice en G.

• *Grafos Totales* , por Rao y Ravindra [47]. El *grafo total T(G)* de un grafo G=(V,E) tiene como conjunto de vértices a $V \cup E$, y dos elementos v, w son adyacentes si, o bien lo son en G, o bien uno es una arista que incide en el otro vértice, o bien son dos aristas que comparten algún vértice.

• *Grafos Triangulados* , por Le [35]. El grafo triangular de G, $L_3(G)$, tiene un vértice por cada triángulo de G, donde dos vértices son adyacentes en $L_3(G)$ si los triángulos correspondientes de G tienen una arista en común.

Por último, listamos otras clases de grafos en las cuales vale la SPGC:
• *Grafos circulares*, es decir, grafos de intersección de cuerdas en un círculo, de Buckyngham y Golumbic [10, 11].
• *Grafos planares*, por Tucker [56, 12].
• Grafos con grado máximo menor que 7, (donde el grado de un vértice es la catidad de vétices adyacentes a él) por Grinstead [29].
• *Grafos pretty* , es decir, grafos tales que todo subgrafo inducido tiene una vecindad (conjunto de vértices adyacentes a él) sin P_4 ni $2k_2$, por Maffray, Porto y Preissmann [39].

Existe una versión más débil de la SPGC que también se mantiene abierta hasta el presente.

Conjetura 2.5 *(WSPGC) Existe una función f tal que para todo grafo G Berge G, $\chi(G) \leq f(\omega(G))$*

Esta función f claramente debe satisfacer $f(x) \geq x$. Notemos que la SPGC dice que la mejor función a la que puedo aspirar es la identidad. Esta conjetura fue realizada en 1987 por Gyarfas [32]. Algunos resultados sobre los problemas abiertos mencionados anteriormente, fueron tratados a partir de esta nueva conjetura. Wagon [60] en primer lugar y Gyarfas [32], llegaron a los siguientes resultados:
• Para todo grafo G, $C_4 - free$ (no necesariamente Berge),

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2}\omega(G)(\omega(G)+1)$$

• Para todo grafo G, $P_5 - free$ (no necesariamente Berge)

$$\chi(G) \leq 4^{\omega(G)-1}$$

La importancia de los grafos *perfectos*, dio lugar a que muchos investigadores definieran diversas variantes de estos grafos.

Definición 2.4 *Un grafo G se denomina trivialmente perfecto si, para todo subgrafo inducido H, se verifica* $\alpha(H) = |C(H)|$ *(donde* $|C(H)|$ *es el número de cliques de H).*

Wolk [61] y Golumbic [28] probaron un resultado que va a tener un rol importante en el estudio del capítulo 4 de este trabajo.

Teorema 2.2 *Sea G un grafo, entonces son equivalentes:*

1. *G no contiene a* P_4 *y a* C_4 *como subgrafos inducidos;*
2. *G es trivialmente perfecto.*

Claramente, los grafos *trivialmente perfectos* son *perfectos*. Berge, en los años 60's probó que muchas clases de grafos conocidas son perfectas, como los grafos de comparabilidad, los grafos bipartitos, los cordales o triangulados y todos sus complementos [6, 7].

2.1.1 Parámetros $\alpha(G)$ y $k(G)$

El problema de encontrar los parámetros $\alpha(G)$ y $k(G)$ se puede formular como un problema de programación entera de la siguiente manera:

Sea A una *matriz clique* del grafo G. Sea n el número de vértices y k el número de cliques de G. Sea 1_k el vector de k 1's. Entonces vale que $k(G)$ es igual a:

$$Min \sum_{i=1}^{k} x_i$$
$$A^T x \geq 1_n$$
$$x \in \{0,1\}^k$$

Por otro lado, el valor de $\alpha(G)$ es:

$$Max \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$Ay \leq 1_k$$
$$y \in \{0,1\}^n$$

donde A^T es la matriz transpuesta de A.

Observación 2.1 *: Debido a estas formulaciones, sabemos que si los poliedros*

$$\{x \in \Re^k / A^T \cdot x \geq 1, x \geq 0\}$$

$$y$$

$$\{x \in \Re^n / A \cdot x \leq 1, x \geq 0\}$$

donde A es matriz clique de un grafo G, tienen extremos enteros, entonces el problema de encontrar los parámetros $\alpha(G)$ y $k(G)$ se resuelven con métodos de programación lineal.

En relación a esto, Chvátal demostró un teorema que además de dar una caracterización desde un enfoque distinto para los grafos *perfectos*, ha sido de vital importancia para la resolución de estos problemas.

Teorema 2.3 *(Chvátal,[17]) Sea G un grafo y sea A_G una matriz clique, entonces*

1. *G es perfecto si y sólo si el poliedro*

$$\{x \in \Re^n / A_G \cdot x \leq 1, x \geq 0\} \text{ tiene extremos enteros}$$

2. *Sea M una matriz y G su grafo derivado. Si el poliedro*

$$\{x \in \Re^n / M \cdot x \leq 1, x \geq 0\} \text{ tiene extremos enteros,}$$

   entonces G es perfecto y la matriz M sin filas incluidas, resulta ser matriz clique de G.

Este teorema dice que si el grafo G es perfecto, los parámetros $\alpha(G)$ y $k(G)$ los podemos encontrar en tiempo polinomial en el tamaño de la matriz.

2.2 Grafos Clique Perfectos

Los grafos clique perfectos fueron definidos en el año 1999 y todavía no se conocen muchos resultados en este tema. Propiedades sobre los conjuntos transversales de cliques mínimo y los conjunto independiente de cliques máximo han sido estudiadas anteriormente [1, 2, 3]. Jayme Szwarcfiter [53] comenzó a buscar una caracterización de los grafos clique perfectos mediante subgrafos prohibidos . En este trabajo hemos avanzado en esta búsqueda, pero aún sigue abierto este problema. Recordemos algunas definiciones:

Definición 2.5 *Sea G un grafo, v un vértice de G.*

Se denomina conjunto transversal de cliques de G a un conjunto de vértices de G que interseca a todas las cliques del grafo.

Un conjunto independiente de cliques es un subconjunto de cliques disjuntas dos a dos.

Llamamos

$\tau(G)$= *tamaño de un conjunto transversal de cliques mínimo*

$\alpha_C(G)$ = *tamaño de un conjunto independiente de cliques máximo*

G se dice ***clique perfecto*** *si* $\alpha_C(H) = \tau(H)\ \forall$ *H subgrafo inducido de G*

Observación 2.2 $\alpha_C(G) \leq \tau(G)$ *para todo grafo G*

Veamos algunos ejemplos de grafos clique perfectos, y grafos que no lo son:

Ejemplo 2.1 *El grafo* C_5 *no es clique perfecto* , ya que α_C(G)= 2, y τ(G)=3. El grafo W_4 es clique perfecto (figura 2.1).

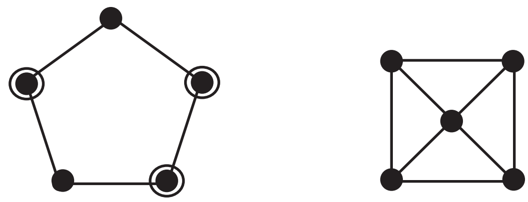


Figura 2.1: Ejemplos de un grafo no clique perfecto y un grafo clique perfectos.

Con la intención de conseguir una caracterización de los grafos clique perfectos mediante subgrafos prohibidos, intentamos identificar familias de grafos que no son clique perfectos.

Teorema 2.4 *Todo grafo* C_{2r+1}*, con* $r \geq 1$*, no es clique perfecto.*

Demostración: Veamos que $\alpha_C(C_{2r+1})$=r, y $\tau(C_{2r+1})$=r+1. Sea G el grafo C_{2r+1}. En primer lugar, observemos que las cliques de G son las 2r+1 aristas de G. Cada vértice de G cubre a lo sumo dos cliques, entonces $\tau(G){\cdot}2 \geq 2r{+}1$. Luego, $\tau(G) \geq r + 1$. Finalmente, los r+1 vértices $\{v_{2j+1}, j = 0...r\}$ forman un *conjunto transversal de cliques*. A su vez, como cada clique contiene dos vértices, entonces α_C(G)$\cdot 2 \leq 2r + 1$. Luego $\alpha_C(G) \leq r$. Finalmente, las r cliques $\{(v_{2j}, v_{2j+1})\}$ forman un *conjunto independiente de cliques*. ■

Teorema 2.5 *Sea G un grafo que contiene como subgrafo un ciclo impar (no necesariamente inducido) de tal manera que verifica:*

1) Para todo par de vértices adyacentes consecutivos del ciclo, existe una clique en G cuya intersección con el ciclo son exactamente esos dos vértices.

2) Toda clique de G contiene por lo menos dos vértices consecutivos del ciclo.

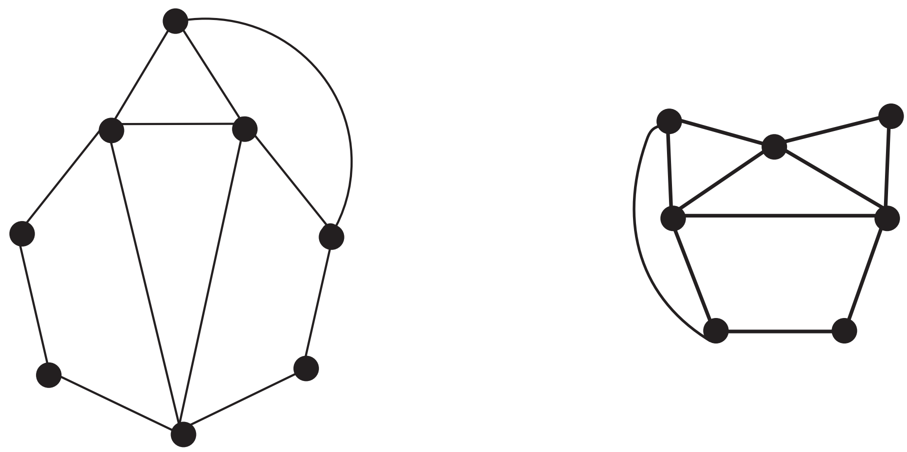


Figura 2.2: Grafos no clique perfectos que verifican las tres propiedades

3) Para cada vértice de G, si se consideran todas las cliques que contienen a ese vértice, a lo sumo 2 de ellas intersecan al ciclo en exactamente dos vértices.

Entonces, G no es clique perfecto.

Demostración: Sea G un grafo que contiene un ciclo de 2r+1 vértices como subgrafo, tal que verifica las tres condiciones. Por la condición 2), tenemos que $\alpha_C(G) \leq \alpha_C(C_{2r+1})$. Por la condición 1), sabemos que la cantidad de cliques de G es mayor o igual que $2{\cdot}r+1$. La condición 3) dice que con $\tau(G)$ vértices podemos cubrir a lo sumo $2 \cdot \tau(G)$ de las $2 \cdot r + 1$ cliques que intersecan al ciclo en exactamente dos vértices consecutivos. Entonces, tenemos que $2 \cdot \tau(G) \geq 2 \cdot r + 1$, pero esto es lo mismo que decir que $\tau(G) \geq r + 1$. Finalmente tenemos $\alpha(G) \leq \alpha(C_{2r+1}) < \tau(C_{2r+1}) = r + 1 \leq \tau(G)$. ■

Ejemplo 2.2 *En ambos grafos no clique perfectos de la figura 2.2 podemos identificar claramente dos ciclos, el primero (izquierda) de 7 vértices y el segundo (derecha) de 5 vértices. Ambos ciclos no son inducidos y verifican las condiciones 1), 2) y 3) del teorema 2.5.*

Observación 2.3 *Existen grafos que no verifican alguna de estas tres propiedades y que no son clique perfectos* (figura 2.3). Observar que ambos grafos contienen un ciclo de 5 vértices como subgrafo inducido.

Definición 2.6 *Un r-sol generalizado es un grafo compuesto por un ciclo impar (no necesariamente inducido) que verifica que cada vez que dos vértices adyacentes consecutivos del ciclo forman una clique con algún otro vértice del*

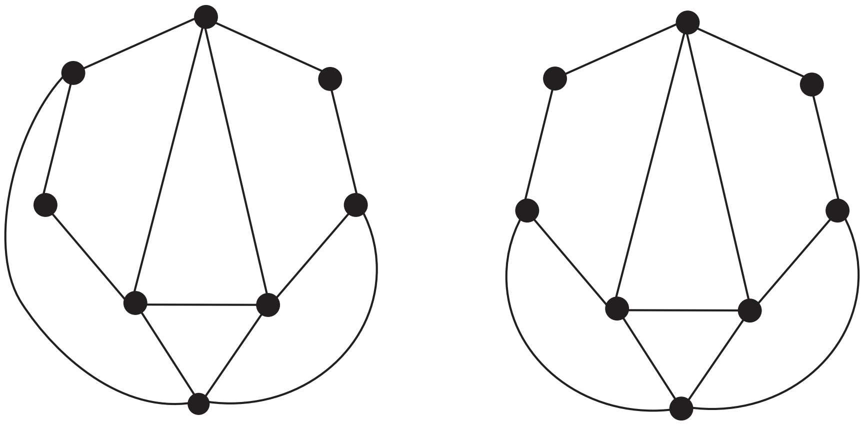


Figura 2.3: El primero, no verifica la propiedad 2), ya que hay una clique formada por dos vértices, uno perteneciente al ciclo de 7, y otro no. El segundo no verifica 3), ya que hay un vértice que pertenece a tres cliques que contienen dos vértices del ciclo.

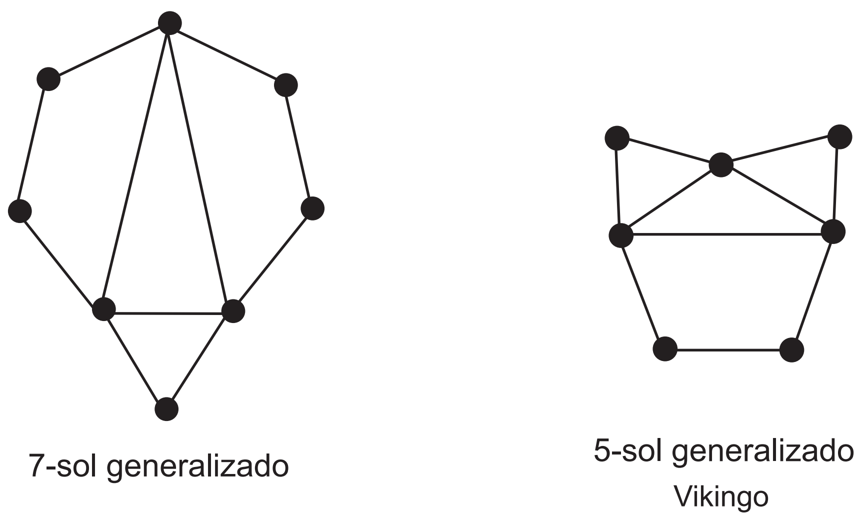


Figura 2.4: Ejemplos de r-soles generalizados.

ciclo, existe un único vértice fuera del ciclo que es adyacente solamente a esos dos vértices. Además, todo vértice o bien forma parte del ciclo, o bien forma clique con dos vértices adyacentes consecutivos del ciclo (figura 2.4).

Teorema 2.6 *Para todo $r \in N$ impar ≥ 3 , el grafo r-sol generalizado* no es *clique perfecto* .

Demostración: De la definición se sigue que un *(2r+1)-sol generalizado* cumple las condiciones 1), 2) y 3) del teorema 2.5. ■

Teorema 2.7 *[20] Los grafos $\overline{C_{2r+1}}$, con 2r+1 no múltiplo de 3, no son clique perfectos*

Teorema 2.8 *[20] Los grafos $\overline{C_{2r+1}}$, con 2r+1 múltiplo de 3, son clique perfectos*

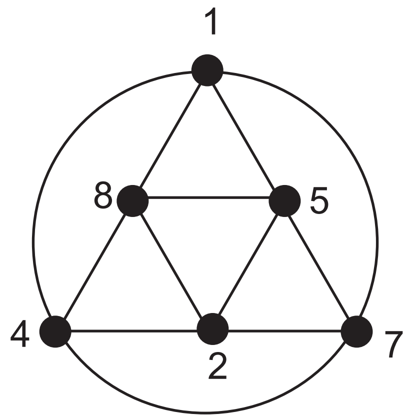
Observación 2.4 *No todos los grafos perfectos son clique perfectos (el grafo Vikingo, figura 2.4, es perfecto). El teorema 2.8 dice que no todos lo grafos clique perfectos son perfectos.*

Si miramos los ejemplos de grafos no clique perfectos del teorema 2.5, podemos observar que ambos grafos contienen ciclos impares como subgrafos inducidos. Dado que los que los ciclos impares son ejemplos de soles generalizados, y siguiendo la idea que Jayme Szwarcfiter [53] había comenzado sobre la caracterización de los grafos clique perfectos por subgrafos prohibidos, nos preguntamos si existirán grafos que no son clique perfectos y que no contienen un sol generalizado o el complemento de un ciclo impar no múltiplo de 3 como subgrafo inducido. Responder a esto es equivalente a validar o refutar la siguiente conjetura:

Conjetura 2.6 *Un grafo es clique perfecto si y sólo si no contiene soles generalizados ni complementos de ciclos impares no múltiplos de 3 como subgrafos inducidos.*

Proposición 2.1 *Si la conjetura fuerte sobre grafos perfectos (SPGC) es cierta, entonces todo grafo G clique perfecto y clique Helly hereditario es perfecto.*

Demostración: Supongamos que es clique perfecto y clique Helly hereditario y no perfecto. Entonces si la SPGC es cierta, G tiene como subgrafo inducido un ciclo impar o un complemento de un ciclo impar. Pero como G es clique perfecto, no tiene ciclos impares ni complementos que no sean múltiplos de 3 (teorema 2.8). Luego G debe tener el complemento de un ciclo impar múltiplo de 3, o sea un $\overline{C_n}$ con n impar y múltiplo de 3 como subgrafo inducido. Luego $n \geq 9$.



Pero entonces el subgrafo inducido en $\overline{C_n}$ por los vértices $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ es uno de los subgrafos prohibidos para los grafos clique Helly hereditarios (teorema 1.1), lo cual es un absurdo. ∎

Se han estudiado en la literatura algunas clases de grafos que resultan ser clique perfectas:

- En [30], se prueba que la clase de los grafos fuertemente cordales es *clique perfecta*, es decir, los grafos cordales que no tienen un s-sol como subgrafo inducido, para $s \geq 3$.
- En [4] se menciona que los grafos de comparabilidad son *clique perfectos*
- En [20], se prueba que la clase $\mathcal{G}$ es *clique perfecta* , es decir la clase de grafos que no contienen a los grafos 3-fan y 4-wheel como subgrafo inducido, y además todo ciclo impar tiene una cuerda corta (figura 1.4).

2.2.1 Parámetros $\alpha_C(G)$ y $\tau(G)$

El problema de encontrar los parámetros $\alpha_C(G)$ y $\tau(G)$ se puede formular de la siguiente manera [20]:

Sea A una *matriz clique* del grafo G. Sea n el número de vértices y k el número de cliques de G . Sea 1_k el vector de k 1's. Entonces vale que $\tau(G)$ es igual a:

$$Min \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$Ax \geq 1_k$$
$$x \in \{0, 1\}^n$$

Por otro lado, el valor de $\alpha_C(G)$ es:

$$Max \sum_{i=1}^{k} y_i$$

$$A^T y \leq 1_n$$
$$y \in \{0,1\}^k$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A.

Observación 2.5 *Por esta formulación, sabemos que si A_G es la matriz clique de un grafo G y los poliedros*

$$\{x \in \Re^k / A_G^T \cdot x \leq 1, x \geq 0\} \text{ y } \{x \in \Re^n / A_G \cdot x \geq 1, x \geq 0\}$$

tienen extremos enteros, entonces el problema de encontrar los parámetros $\alpha(G)$ y $\tau(G)$ se resuelven con métodos de programación lineal.

2.3 Grafos Coordinados

En esta sección vamos a presentar una nueva clase de grafos, los grafos *coordinados* . Consideremos el siguiente problema:

En una fiesta se quieren sacar fotos a los grupos de amigos que asistieron. Para esto se dispone de tantos fotógrafos como personas en la fiesta, quienes pueden sacar fotos simultáneamente. Claramente, si alguna persona pertenece a dos grupos de amigos distintos, deberá sacarse cada foto en momentos distintos. Las preguntas que nos interesan responder en este caso son:

1) ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos de amigos a los que pertenece una misma persona?

2) ¿Cuál es la menor cantidad de horas que deben emplearse para realizar estas fotografías, suponiendo que cada una requiere de una hora?

Ahora bien, si estos dos valores coincidieran, sabríamos que existe una persona que aparece en todas las fotos de la fiesta.

Queremos plantear esta situación como un problema de grafos.

Pongamos un vértice por cada persona de la fiesta y digamos que dos vértices son adyacentes si y sólo si las personas correspondientes son amigos. Claramente, en este nuevo grafo G que armamos, las cliques representan los distintos grupos de amigos, ya que si en un grupo de chicos todos son amigos entre sí, constituyen un grupo de amigos y a su vez si alguna persona es amiga de todas las personas de un grupo de amigos, entonces forma parte del grupo. Es decir, los grupos de amigos constituyen conjuntos completos maximales. Entonces, si miramos el grafo G, la cantidad de grupos de amigos a las que pertenece cada persona se traduce como:

$$m(v) = \text{ cantidad de cliques que contienen a } v$$

El máximo de estos valores, lo definimos como:

$$M(G) = max_{v \in V(G)} m(v)$$

Y por último, la cantidad de horas necesarias para poder sacar todas las fotografías se define en G como:

F(G)= tamaño de una partición mínima de los cliques del grafo en conjuntos de cliques independientes, es decir, coloreo mínimo de las cliques de G.

Observación 2.6 *$M(G) \leq F(G)$ $\forall$ G*

Definición 2.7 *G se dice* ***coordinado*** *si $M(H) = F(H)$ $\forall$ H subgrafo inducido de G y llamamos coordinador a todo vértice v de G tal que $m(v) = M(G)$.*

La figura 2.5 muestra algunos ejemplos de grafos coordinados y no coordinados.

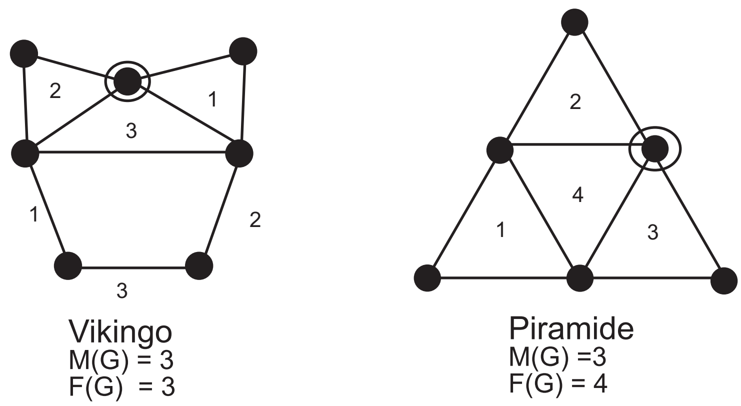


Figura 2.5: Ejemplos de grafos coordinados y no coordinadsos. Los números corresponden a los conjuntos de la partición de las cliques y está marcado el vértice coordinador.

Teorema 2.9 *Los grafos C_{2r+1} no son coordinados.*

Demostración: Claramente, todos los vértices pertenecen a dos cliques, entonces vale que M(C_{2r+1})= 2. Por otro lado, si pensamos en asignarles colores a cada familia de cliques independientes, es claro que necesitamos 3 colores, por lo tanto, F(C_{2r+1})=3. ∎

Teorema 2.10 *Los grafos C_{2k} son coordinados.*

Demostración: Al igual que en el teorema anterior, vale que $M(C_{2k}) = 2$. Es claro que asignando alternadamente 2 colores a las 2k cliques, resulta que $F(C_{2k}) = 2$. Observemos que si H es un subgrafo inducido, sus cliques son vértices o son las cliques de C_{2k}.

Sea H un subgrafo inducido de C_{2k}, entonces existen dos posibles casos: $M(H) = 1$ o bien $M(H) = 2$. En el primer caso H está compuesto por vértices aislados y/o aristas independientes y claramente $F(H) = 1$. Si $M(H) = 2$, pintando todos los vértices aislados del mismo color y las demás cliques de la misma manera en que estaban pintadas en C_{2k}, resulta que F(H)=2. ∎

2.4 Grafos K-perfectos

Los grafos de intersección han jugado un rol importante en la teoría de grafos desde hace más de sesenta años. Los grafos clique de un grafo constituyen una clase de grafos de intersección que han sido estudiados no sólo dentro de ese contexto sino también dentro de la teoría de operadores de grafos [45]. Muchos resultados pueden obtenerse como resultado de analizar el grafo clique de un grafo. Algunos de estos pueden encontrarse en los libros [9], [40] y [45].

En esta sección definimos los grafos K-perfectos, los cuales combinan dos clases de grafos muy estudiadas en la literatura de teoría de grafos. Presentaremos un teorema que relaciona la matriz clique de un grafo con la matriz clique del grafo clique y los grafos perfectos.

Definición 2.8 *Consideremos una familia finita de conjuntos no vacíos. El grafo de intersección de esta familia se obtiene representando cada conjunto por un vértice, donde dos vértices son adyacentes si los conjuntos correspondientes se intersecan. El grafo clique K(G) de un grafo G es el grafo de intersección de la familia de cliques de G.*

Ejemplo 2.3 *En la figura 2.6 se construyen los grafos K(G) de dos grafos. Se numeran los vértices de K(G) de la misma manera que se numeran las cliques a las que corresponden en G.*

Teorema 2.11 *Sea G un grafo clique Helly de n vértices, y sea A una matriz clique. Entonces vale:*

1. *La matriz A^T contiene como submatriz a la matriz clique de K(G) que resulta de eliminar las filas incluidas de A.*

2. *El grafo inducido por A^T es el grafo K(G)*

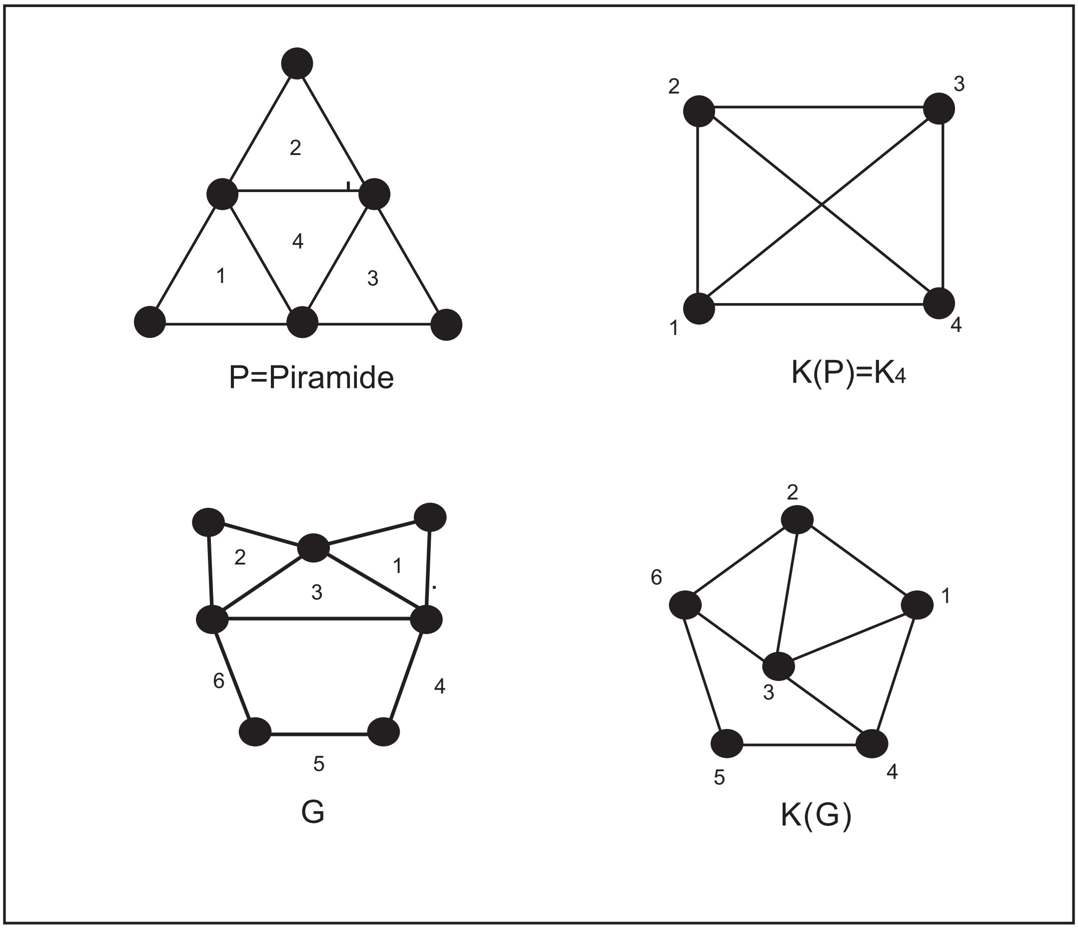


Figura 2.6: Ejemplos de grafos clique

3. *El poliedro* $\{x \in \Re^m / A^T \cdot x \leq 1, x \geq 0\}$ *es igual al poliedro* $\{x \in \Re^m / A_{K(G)} \cdot x \leq 1, x \geq 0\}$.

Demostración: Para probar 1), veamos que toda fila de $A_{K(G)}$ es una columna de la matriz A. Sea F_i una fila de $A_{K(G)}$, correspondiente a una clique en $K(G)$. Si miramos los vértices de esa clique, corresponden a cliques del grafo G que se intesecan dos a dos, digamos $C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_k}$. Como G es clique Helly, existe un vertice v_{j_i} en G que pertenece a todas estas cliques. Por lo tanto, la j_i-ésima columna de A tiene 1's en las filas $i_1, i_2, ..i_k$. Por otro lado, si esta columna tuviera un 1 en alguna otra fila, supongamos m, la clique C_m intersecaría a las anteriores, de modo que el conjunto de cliques $C_{i_1}, C_{i_2}, ...C_{i_k}$ de G no formarían una clique en $K(G)$ y tendríamos un absurdo. Entonces la j_i-ésima columna tiene 1's exactamente en las filas $i_1, i_2, ..i_k$, ie., la fila F_i de $A_{K(G)}$ es la columna j_i de A, traspuesta. Sólo resta ver que las filas sobrantes de A^T son filas incluidas en las anteriores. Para esto vamos a ver que las filas sobrantes corresponden a las columnas de vértices dominados. Sea w

un vértice cuya columna K_w traspuesta no es igual a ninguna fila de $A_{K(G)}$. Sean $i_1, i_2, ..., i_j$ las filas que contienen un 1 en esa columna. Si $C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_j}$ son las cliques correspondientes a esas filas, éstas forman un subgrafo completo en K(G). Si fueran una clique de K(G), en $A_{K(G)}$ habría una fila con 1's exactamente en esos lugares, pero supusimos que esa columna traspesta no era igual a ninguna fila de esa matriz. Entonces, forman un completo en K(G) que no es una clique y está contenido en una clique de K(G), con K_w^T contenida en esa fila. Como esta clique tiene un vértice v en G cuya columna correspondiente en A es igual a la fila correspondiente a esa clique, entonces K_w esta contenida en K_v. Esto nos dice que v dominaba a w (v pertenece a todas las cliques a las que pertenece w).
El punto 2) se sigue directamente del punto 1).

Para probar 3), solo resta observar que si tenemos un sistema de inecuaciones con las misma restricción para todas y variables positivas, entonces las inecuaciones incluidas se pueden omitir. ∎

Ejemplo 2.4 *Para el grafo G vikingo (figura 2.4), tenemos las siguientes matrices:*

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{K(G)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación 2.7 *El resultado anterior no es válido si no pedimos la condición Helly para las cliques del grafo. Por ejemplo, la matriz clique del grafo clique de la pirámide no es una submatriz de A^T.*

$$A_G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{K(G)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como corolario del teorema 2.11 obtenemos el siguiente resultado, que ha sido demostrado anteriormente por Escalante [21].

Corolario 2.1 *Dado un grafo G, si G es clique Helly, entonces K(G) es clique Helly.*

Demostración: Sea A una matriz clique de G. Por el teorema 2.11 sabemos que la matriz A^T sin sus filas incluidas es matriz clique de K(G). Para ver que K(G) es clique Helly, basta ver que la familia de las filas de esta matriz verifica la propiedad de Helly. Miremos a estas filas como columnas de A. Éstas representan a los vértices de G en el sentido que si $a_{ij} = 1$, el vértice v_j pertenece a la clique C_i. Es decir que si dos columnas de A tienen intersección común, entonces los vértices correspondientes pertenecen a alguna clique y por lo tanto son adyacentes. Entonces, si una subfamilia de columnas de A tiene intersección dos a dos, significa que todos los vértices correspondientes a esas columnas son adyacentes entre sí y por lo tanto debe existir en G una clique que los contenga. Es decir, existe una fila en A que tiene 1's en todas las columnas correspondientes a esos vértices y por lo tanto la subfamilia de columnas tiene intersección común. ∎

Corolario 2.2 *[8] Dado un grafo G, si G es clique Helly hereditario, entonces K(G) es clique Helly hereditario.*

El resultado que sigue fue probado anteriormente por Escalante [21]. Damos aquí una demostración alternativa utilizando el teorema 2.11

Corolario 2.3 *Si G es un grafo clique Helly, entonces el grafo $K^2(G)$, es decir el grafo clique del grafo clique de G, es un subgrafo inducido de G.*

Demostración: Sea A una matriz clique de G. Por el corolario 2.1, K(G) es clique Helly. El teorema 2.11 dice que su matriz clique contiene como columnas, las filas de A, y como filas, las columnas correspondientes a los vértices de G, salvo los vértices dominados. Si volvemos a aplicar el teorema 2.11 al grafo K(G), obtenemos que el nuevo grafo K^2(G) tiene como matriz clique a la submatriz de $(A_{K(G)})^T$, que resulta de eliminar las filas incluidas. Concluimos entonces que la matriz de K^2(G) es una submatriz de A donde se eliminaron columnas incluidas y luego filas incluidas. Claramente esta matriz tiene un subgrafo inducido de G como grafo derivado. ∎

Recordando el teorema de Chvátal presentado en la sección de los grafos perfectos, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.4 *(del teorema de Chvátal) Sea G un grafo y sea A una matriz clique, entonces:*

G es clique Helly y K-perfecto $\Leftrightarrow$ *el poliedro* $\{\ x \in \Re^n\ /\ A_G^T \cdot x \leq 1,\ x \geq 0\ \}$ *es entero.*

Demostración: $\Rightarrow$) Por el teorema de Chvátal 2.3, G es K-perfecto $\Leftrightarrow$ el poliedro con la matriz $A_{K(G)}$ es entero. El teorema 2.11 dice que si G es clique Helly, el poliedro que genera A_G^T es el mismo que genera $A_{K(G)}$.

$\Leftarrow$) El teorema de Chvátal asegura que si el poliedro $\{ x \in \Re^n \ / \ A_G^T \cdot x \leq 1, x \geq 0 \}$ es entero, entonces el grafo derivado G' de A_G^T es perfecto. Además este teorema dice que si quitamos las filas incluidas de A_G^T, ésta resulta ser una matriz clique de G'. La proposición 1.1 asegura que entonces, las columnas de A_G^T sin filas incluidas verifican la propiedad de Helly. Observemos que agregar filas incuidas no altera esta propiedad, ya que siempre que dos columnas tengan intersección no vacía en alguna fila de las que agregamos, esta intersección va a darse también en otra fila que incluya a esta. Por lo tanto, las columnas de A_G^T verifican la propiedad de Helly. Para concluir que G es clique Helly, basta recordar que las columnas de la matriz A_G^T son las cliques de G. Ahora, por el teorema 2.11, sabemos que si G es clique Helly, A_G^T induce el grafo K(G) y por lo tanto K(G)=G' y es perfecto. $\blacksquare$

Capítulo 3

Grafos Pseudos-perfectos, sus variantes y relaciones

En este capítulo nos referiremos a los grafos *pseudo-perfectos* y sus variantes. Estos grafos se definen del mismo modo que los grafos del capítulo anterior, pero pidiendo, en cada caso, que se verifiquen las igualdades de los parámetros solamente para el grafo G. Vamos a ver también que dentro de estos grafos, las tres maneras de definir a los grafos perfectos dejan de ser equivalentes. Veremos algunas relaciones que existen entre los parámetros de los grafos perfectos y coordinados, con los parámetros de los grafos perfectos en su grafo clique. Daremos algunas caracterizaciones de algunas de estas clases y terminaremos probando que dentro de la clase de grafos clique Helly, las clases de grafos *Pseudo-Coordinados* y los grafos cuyo grafo clique es $Pseudo_\chi - Perfecto$ son las mismas, como así también la clase de grafos *Pseudo-Clique Perfectos* y la clase de grafos cuyo grafo clique es $Pseudo_\alpha - Perfecto$.

Definición 3.1

P_1: *G se dice* $Pseudo_\chi$*-perfecto si* $\chi(G)=\omega(G)$

P_2: *G se dice* $Pseudo_\alpha$*-perfecto si* $\alpha(G)=k(G)$

P_3 : *G se dice* $Pseudo_{P_3}$*-perfecto si* $|V_G|\leq\omega(G)\cdot\alpha(G)$

G se dice Pseudo-perfecto si verifica P_1*,* P_2 *y* P_3*.*

Observación 3.1 *Como vimos en el capítulo anterior, se verifica que G es* $Pseudo_\alpha$*-perfecto si y sólo si* $\overline{G}$ *es* $Pseudo_\chi$*-perfecto.*

Proposición 3.1 *Para todo grafo G, si se verifica la propiedad* P_1 *entonces se verifica* P_3*. Análogamente, si se verifica la propiedad* P_2 *entonces también se verifica* P_3*.*

Demostración: Supongamos que G verifica P_1. Como a lo sumo hay $\alpha(G)$ vértices en cada uno de los $\chi(G)$ conjuntos independientes de la partición de los vértices del grafo, se cumple que:

$$|\mathrm{V(G)}| \leq \alpha(G) \cdot \chi(G)$$

De donde si $\chi(G) = \omega(G)$, obtenemos la desigualdad que buscábamos.

Análogamente supongamos que G verifica la propiedad P_2. Si observamos que por cada una de las $k(G)$ cliques cubrimos a lo sumo $\omega(G)$ vértices, entonces se cumple que:

$$|\mathrm{V(G)}| \leq \omega(G) \cdot k(G)$$

Como antes, si G satisface P_2, P_3 se sigue directamente. ■

Observación 3.2 P_1, P_2 y P_3 no son equivalentes. En la figura 3.1 podemos ver ejemplos de cada clase:

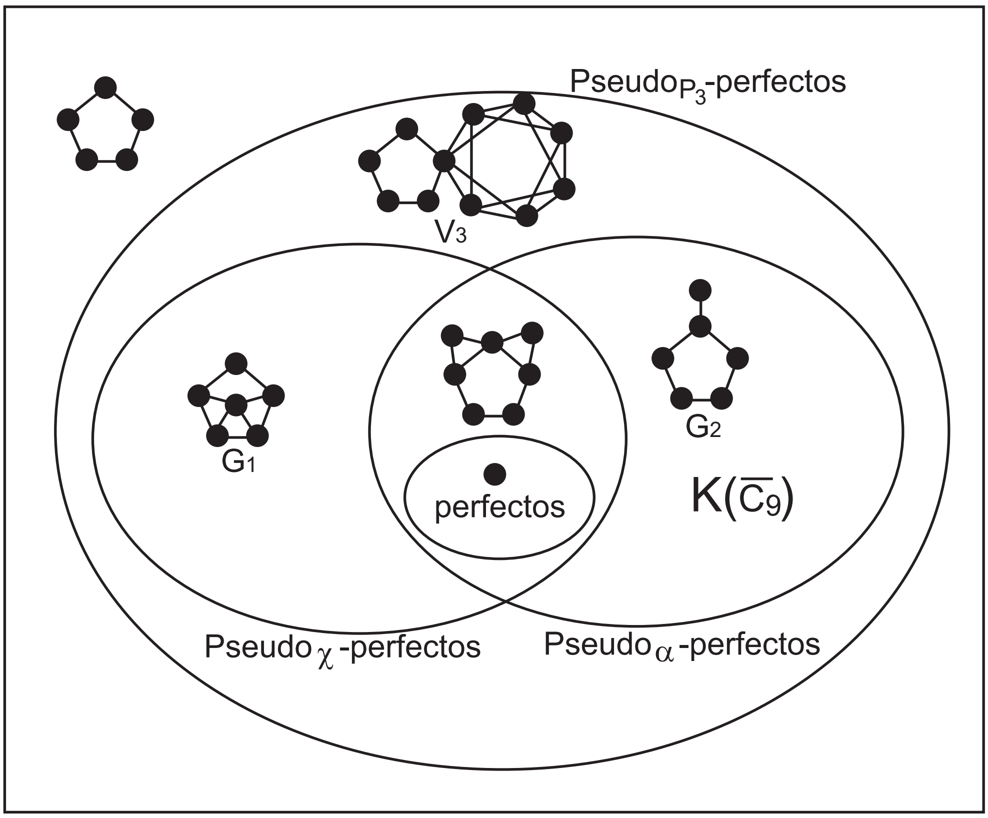


Figura 3.1: Intersecciones entre las clases de Pseudo-Perfectos

En la figura 3.1 el grafo G_1 es el grafo clique del grafo *Vikingo* y G_2 es el grafo clique de V_2 de la figura 3.2 (G_1 es $\overline{G_2}$). El primero es $pseudo_\chi$-perfecto y no satisface P_2 y el segundo es $pseudo_\alpha$-perfecto pero no satisface P_1. G_3 (es un C_5 unido por un vértice a un $\overline{C_7}$ verifica P_3 pero no P_1 ni P_2, ya que $\mid V(G_3) \mid = 11$, $\omega(G_3)$=3, $\alpha(G_3)$=4, $\chi(G_3)$=4 y $k(G_3)$=5 (G_3 es clique Helly).

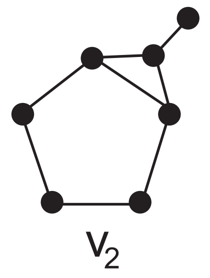


Figura 3.2:

El teorema que sigue nos da una caracterización de los grafos $pseudo_\chi - perfectos$:

Teorema 3.1 *Sea G un grafo, entonces G es $Pseudo_\chi - Perfecto \Leftrightarrow$ existe una sucesión de subgrafos inducidos H_0=G $\supset H_1 ... \supset H_{\omega(G)-1}$ que verifican:*

1. *$V(H_{i+1}) = V(H_i)$ - A , donde A es un conjunto de vértices independientes*
2. *$\omega(H_{i+1})$=$\omega(H_i) - 1$*

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos G es $Pseudo_\chi - Perfecto$. Sean $F_1 ... F_{\omega(G)}$ una partición de los vértices de G en ω conjuntos de vértices independientes. Definamos la sucesión: $H_0 = G$, H_1 lo definimos como el subgrafo inducido que contiene solamente a todos las vértices de G excepto los vértices que pertenecen a F_1, H_2 lo definimos como el grafo inducido que contiene únicamente a todos los vértices de H_1 excepto los vértices del conjunto F_2, y asi recursivamente, definimos el grafo H_i como el grafo inducido que contiene únicamente a los vértices de H_{i-1} excepto los vértices del conjunto F_{i-1}. Veamos que esta sucesión verifica las condiciones. Por construcción, claramente $H_i \supset H_{i+1}$. Resta ver que $\omega(H_{i+1})$=$\omega(H_i) - 1$. Primero observemos que $V(H_{\omega(G)-1})$=$F_{\omega(G)}$, ya que la familia F_1,...,$F_{\omega(G)}$ es una partición en conjuntos independientes de todos los vértices de G. Como $F_{\omega(G)}$ es un conjunto independiente, entoces $\omega(H_{\omega(G)-1})$=1. Por otro lado, dado que los vértices que diferencian H_i de H_{i+1} constituyen un conjunto independiente, la diferencia entre $\omega(H_i)$ y $\omega(H_{i+1})$ o bien es 0, o bien es 1. En la sucesión $H_0 ... H_{\omega(G)-1}$ tenemos $\omega(G) - 1$ pasos para llegar de $\omega(G)$ a 1, pudiendo en cada paso igualar el valor anterior o disminuirlo en 1. Es claro que para que esto suceda, la diferencia entre $\omega(H_i)$ y $\omega(H_{i+1})$ debe ser siempre 1.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión H_0=G $\supset H_1$.....$\supset H_{\omega(G)-1}$ que verifica las condiciones del teorema. Definamos F_1 como el conjunto de vértices que pertenece a H_0 y no pertenece a H_1, análogamente, para todo i menor que $\omega(G)$ definamos F_i como el conjunto de vértices que pertenece a H_{i-1} y no pertenece a H_i. Oservemos ahora que como por hipótesis $\omega(H_i)$ - $\omega(H_{i+1})$=1, entonces $\omega(H_{\omega(G)-1})$=1. Esto nos dice que todos los vértices de $H_{\omega(G)-1}$ son independientes, entonces definiendo $F_{\omega(G)}$ como el conjunto de vértices de $H_{\omega(G)-1}$ obtenemos que F_1....$F_{\omega(G)}$ es una partición de los vértices de G en $\omega(G)$ conjuntos de vértices independientes, y G resulta $pseudo_\chi - Perfecto$. ∎

Definición 3.2

G se dice Pseudo-Coordinado si $M(G) = F(G)$

G se dice Pseudo-Clique Perfecto $\alpha_C(G) = \tau(G)$

G se dice K-Pseudo-Perfecto si K(G) es *Pseudo-Perfecto*

Una caracterización similar al teorema 3.1 se dará para los grafos pseudo-coordinados en el capítulo siguiente.

Dado que los parámetros M y F de los grafos coordinados, y α_C y τ de los clique perfectos se refieren a las cliques del grafo y los parámetros χ, ω, α y k tienen que ver con analizar los vértices del grafo, resulta natural plantearse la relación que puede haber entre los primeros parámetros mirados en un grafo G y los segundos mirados en su grafo clique K(G):

Proposición 3.2 *Sea G un grafo:*

1. $F(G) = \chi(K(G))$

2. $M(G) \leq \omega(K(G))$

3. *G clique Helly entonces* $M(G) = \omega(K(G))$

Demostración:

1. Sea una partición en cliques independientes F_1, $F_2 ... F_{F(G)}$. Cada clique de G se corresponde con un vértice de K(G), y cliques independientes se corresponden con vértices independientes. Con lo cual si miramos esta partición, pero ahora como vértices de K(G), es una partición de los vértices de K(G) en conjuntos independientes y vemos que $F(G) \geq \chi(\mathrm{K(G)})$. Análogamente, sea F_1', $F_2' ... F_{\chi(K(G))}'$ una partición de vértices en conjuntos independientes en K(G), entonces si miramos a los vértices como cliques en G, ésta es una partición de las cliques de G en conjuntos independientes, entonces $\chi(\mathrm{K(G)}) \geq F(G)$. Luego se verifica la igualdad.

2. Primero observemos que $m(v) \leq \omega(\mathrm{K(G)})\ \forall\ v$, ya que todas las cliques que contienen a v forman un completo en K(G). En particular, $M(G) \leq \omega(\mathrm{K(G)})$.

3. Veamos entonces que si G es clique Helly, $\omega(\mathrm{K(G)}) \leq \mathrm{M(G)}$. Sean $C_1, ... C_{\omega(K(G))}$ las cliques de G cuyos vértices correspondientes en K(G) forman la clique máxima de K(G). Como forman una clique en K(G), entonces sabemos que todas tienen intersección no vacía dos a dos. Ya que G es clique Helly, existe un vértice v en G tal que está contenido en todas esas cliques, y por lo tanto $M(G) \geq m(v) \geq \omega(\mathrm{K(G)})$, como queríamos probar. ■

Proposición 3.3 *Sea G un grafo:*

1. $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$
2. $\tau(G) \geq k(K(G))$
3. *G clique Helly entonces* $\tau(G) = k(K(G))$

Nota: Para facilitar la demostración, notaremos las cliques del grafo G como C y las del grafo K(G) como K.

Demostración:

1. Se sigue del hecho de que cliques independientes en G, se corresponden con vértices independientes en K(G), y análogamente, vértices independientes en K(G) corresponden a cliques disjuntas en G.

2. Sea v_1,...,$v_{\tau(G)}$ los vértices que cubren todas las cliques de G. Si para cada i miramos los vértices en K(G) correspondientes a las $m(v_i)$ cliques que contienen al vértice v_i resulta que forman un completo en K(G), que está contenido en alguna clique K_i de K(G). Observemos que estas cliques no son necesariamente todas distintas, pero sabemos que a lo sumo hay $\tau(G)$ cliques en K(G). Veamos que estas a lo sumo $\tau(G)$ cliques son un cubrimiento por cliques de los vértices de K(G). Sea w un vértice en K(G), entonces w corresponde a una clique C_w de G. Como v_1,...,$v_{\tau(G)}$ forman un cubrimiento de las cliques de G, existe un índice j para el cual el vértice v_j pertenece a la clique K_w. Esto nos dice que el vértice correspondiente a la clique C_w en K(G) forma parte de la clique K_j, es decir, $w \in C_j$, como queríamos probar. Entonces, el tamaño de un cubrimiento mínimo de vértices por cliques en K(G) es a lo sumo tamaño de este cubrimiento que es menor o igual a $\tau(G)$.

3. Resta ver que si G es clique Helly, τ(G)$\leq$ k(K(G)). Sea K_1,...,$K_{k(K(G))}$ un cubrimiento por cliques de K(G). Para cada i, miremos las cliques en G correspondientes a los vértices que forman parte de la clique K_i. Como K_i es un completo, las clique correspondientes en G tienen todas intersección dos a dos. Por hipótesis G es clique Helly, entonces sabemos que existe un vértice v_i que pertenece a la intersección de todas estas cliques en G. Veamos que estos $v_1 ... v_{k(K(G))}$ vértices cubren todas las cliques de G. Como en el item anterior, basta con saber que la cantidad de estos vértices distintos es a lo sumo $k(K(G))$. Probemos esto: Sea C una clique de G, entonces existe un índice j para el cual la clique K_j contiene al vértice v_C correspondiente en K(G), ya que $K_1 ... K_{k(K(G))}$ constituyen un cubrimiento de vértices en K(G). Como el vértice v_j pertenece a todas las cliques cuyos vértices correspondientes en K(G) pertenecen a K_j, se sigue que v_j pertenece a C.

   Observación: Si bien para esta demostración no era necesario, se puede ver que si G es clique Helly, estos vértices $v_1 ... v_{k(K(G))}$ son todos distintos. Esto está demostrado en el lema 4.1 del capítulo 4. ∎

Proposición 3.4 *Sea G un grafo, esntonces:*

1. *Si G es pseudo* $-$ *coordinado* $\Rightarrow$ *K(G) es* $pseudo_\chi - perfecto$.
2. *Si G es clique Helly y K(G) es* $pseudo_\chi - perfecto \Rightarrow$ *G pseudo* $-$ *coordinado.*

Demostración: Por la proposición 3.2 tenemos que $M(G) \leq \omega$(K(G))$\leq$ χ(K(G))= $F(G)$. Como G es pseudo-coordinado, $F(G)$=$M(G)$ y en consecuencia ω(K(G))=χ(K(G)). Esto demuestra 1).

Si G es clique Helly y K(G) $pseudo_{\chi} - perfecto$, la proposición 3.2 dice que $M(G)$=ω(K(G))= χ(K(G))=$F(G)$. Entonces, $M(G)$=$F(G)$ y G resulta $pseudo - coordinado$. Queda demostrado 2). ■

Proposición 3.5 *Sea G un grafo y K(G) su grafo clique. Entonces,*

1. *Si G es pseudo-clique perfecto entonces K(G) es pseudo$_{\alpha}$-perfecto.*
2. *Si G es clique Helly y K(G) $pseudo_{\alpha} - perfecto$, entonces G es pseudo-clique perfecto.*

Demostración: Por la proposición 3.3 tenemos que $\tau(G) \geq k$(K(G))$\geq \alpha(K(G))$ $= \alpha_C(G)$. Como G es $pseudo - clique$ perfecto, $\tau(G)$=$\alpha_C(G)$ y en consecuencia $k(K(G))$=$\alpha(K(G))$.

Si G es clique Helly y K(G) $pseudo_{\alpha} - perfecto$, la proposición 3.3 dice que $\tau(G)$=$k(K(G))$= $\alpha(K(G))$=$\alpha_C(G)$. Entonces, $\tau(G)$=$\alpha_C(G)$ y G resulta $pseudo - clique$ perfecto. ■

Observación 3.3 *El punto 3) de la proposición 3.4 y de la proposición 3.5 no vale sin la condición clique Helly. La pirámide (figura 1.4) es un grafo que tiene como grafo clique a un grafo completo, con lo cual es perfecto. Pero la pirámide no es un grafo $pseudo - coordinado$ y tampoco $pseudo - clique$ perfecto: $M(G)$=3 y $F(G)$=4 ya que no tiene dos cliques independientes, $\alpha_C(G) = 1$, $\tau(G) = 2$.*

Corolario 3.1 *Sea G un grafo y sea A su matriz clique. El poliedro { $x \in \Re^m$ / $A^T \cdot x \leq 1$, $x \geq 0$ } es entero $\Rightarrow$ G es $pseudo - coordinado$ y $pseudo - clique$ perfecto*

Demostración: Si el poliedro es entero, entonces por el corolario 2.4, K(G) es perfecto y G es clique Helly. La proposición 3.4 y 3.5 dice que como G es clique Helly, entonces G es $pseudo - coordinado$ y $pseudo - clique$ perfecto.■

Proposición 3.6 *Si G es $pseudo - coordinado$, entonces se verifica la siguiente desigualdad:*

$$|C(G)| \leq \alpha_C(G) \cdot M(G)$$

donde $|C(G)|$= cantidad de cliques de G.

Demostración: Si G es *pseudo-coordinado*, existe una partición de las |C(G)| cliques en $M(G)$ conjuntos, cada uno con cliques independientes. Como la cantidad de cliques independientes en cada conjunto es menor o igual que $\alpha_C(G)$, tenemos que $|C(G)| \leq \alpha_C(G) \cdot M(G)$. ∎

Proposición 3.7 *Si G es pseudo – clique perfecto, entonces G verifica la desigualdad anterior.*

Demostración: Como cada vértice de G puede cubrir a lo sumo $M(G)$ cliques, es claro que $|C(G)| \leq M(G) \cdot \tau$(G). De aquí que si τ(G)=$\alpha_C(G)$, se verifica la desigualdad que queríamos. ∎

Observación 3.4 *En ninguno de los casos anteriores vale la recíproca. El grafo $\overline{C_9}$ verifica la desigualdad por ser clique perfecto, pero no es pseudo – coordinado: Es fácil ver que $M(\overline{C_9})$=5. Como solamente hay un conjunto independiente de tres cliques, al partir las 12 cliques en conjuntos independientes podemos tener como máximo un conjunto de 3 cliques y el resto de a lo sumo 2 cliques. Tenemos que 3+2+2+2+2= 11 $\leq$ 12, con lo cual $F(\overline{C_9}) > 5$, y resulta que $\overline{C_9}$ no es coordinado. El grafo Vikingo (figura 1.4) cumple la desigualdad, pero no es pseudo – clique perfecto: $|C(G)|$=6, $\tau(G)$= 3 y $\alpha_C(G)$=2.*

Observación 3.5 *Utilizando la desigualdad de la proposición 3.6, se prueba fácilmente que los grafos C_{2r+1} no son clique perfectos ni coordinados, ya que $|C(C_{2r+1})|$=2r+1, $M(C_{2r+1})$=2 y $\alpha_C(C_{2r+1})$=r, y claramente no satisface la desigualdad anterior.*

En la figura 3.3 mostramos algunos ejemplos de estas clases y sus intersecciones con los grafos $pseudo_\alpha$-perfectos y $pseudo_\chi$-perfectos. En la figura, el grafo G es El grafo G es la unión de $K(\overline{C_9})$, $F(K(\overline{C_9}))-star$ y la pirámide, donde una r-star es un grafo con un vértice adyacente a r vértices independientes entre sí. $K(\overline{C_9})$ es $\overline{C_9}$ cuyos vértices están todos unidos por aristas a tres vértices nuevos, que no son adyacentes entre sí. El grafo $\overline{C_9}+u$ representa el grafo al que se le agrega un vértice universal.

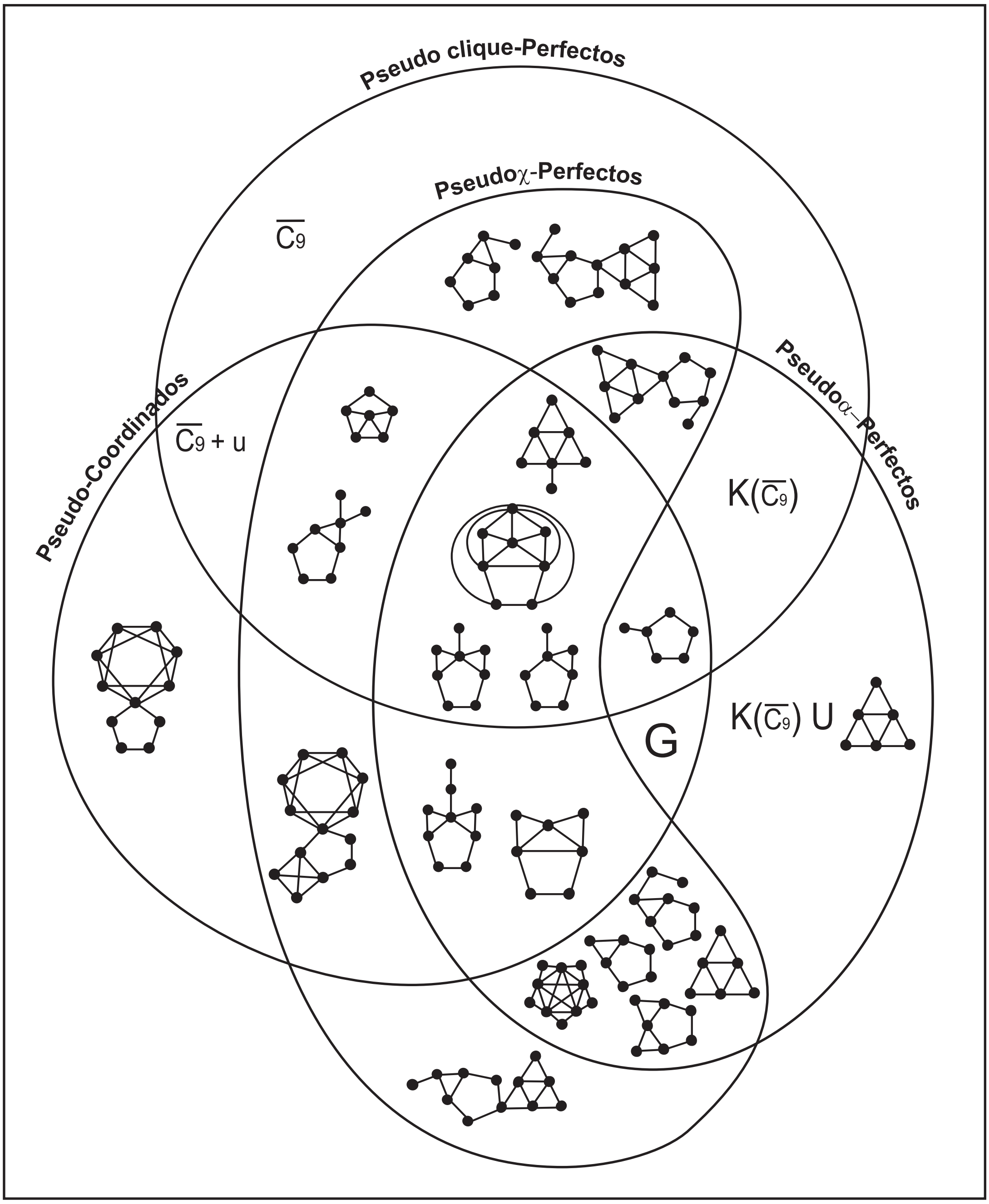


Figura 3.3: Intersección de todas las clases de grafos pseudo.

Capítulo 4

Grafos $Clique - Perfectos_C$, $Coordinados_C$, $K - Perfectos$. Grafos $\chi - perfectos_C$ y $\alpha - perfectos_C$

Como vimos en el capítulo anterior, existen ciertas relaciones entre los parámetros α_C(G), $\tau(G)$, $M(G)$ y $F(G)$ de un grafo G y los parámetros $\alpha(K(G))$, $k(K(G))$, $\omega(K(G))$ y $\chi(K(G))$ en su grafo clique K(G). Frente a estos resultados, resulta de interés estudiar qué sucede cuando miramos no sólo el grafo G, sino también los subgrafos inducidos. Nos preguntamos si es cierto que todo grafo clique de un grafo *clique perfecto* es *perfecto*. Encontramos que esto no es cierto (figura 4.1) y resulta de interés ver por qué falla esta implicación:

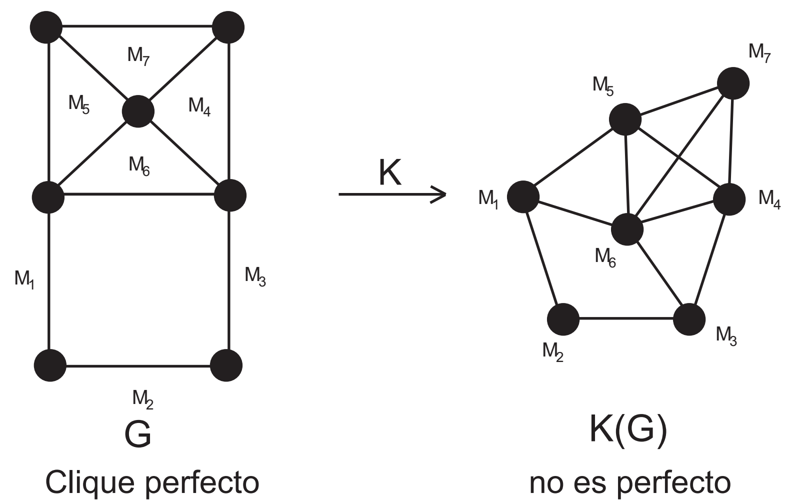


Figura 4.1: Ejemplo de un grafo clique perfecto cuyo grafo clique no es perfecto.

Si observamos la figura 4.1, el grafo K(G) contiene un ciclo impar como subgrafo inducido y por lo tanto no es perfecto, mientras que el grafo G es clique perfecto. Notemos que en el grafo G no hay ningún subgrafo inducido cuyo grafo clique sea C_5. Es por esto que no tenemos ningún control sobre $\alpha(C_5)$ ni $k(C_5)$, a pesar de que sabemos acerca de los parámetros $\alpha_C(H)$ y $\tau(H)$ para todo H subgrafo inducido.

En este punto cabe la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los subgrafos de G tales que todo subgrafo inducido de K(G) es el grafo clique de alguno de ellos?

Esta pregunta dio origen a una nueva definición de subgrafos, los *subgrafos clique* y a dos nuevas variantes de grafos, los $clique - perfectos_c$ y los $coordinados_c$. Probaremos entonces que para la clase de grafos clique Helly hereditarios, estas clases que mencionamos y la clase de grafos para la cual su grafo clique es perfecto resultan equivalentes. Gracias a este resultado obtenemos una caracterización de la clase de grafos cuya matriz clique genera un poliedro $\{ x \in \Re^m / \ A^T \cdot x \leq 1 \}$ entero. Además, esto da lugar al estudio de los los grafos clique de los grafos perfectos clique Helly y clique Helly hereditarios. Probaremos que la clase K(perfectos $\cap$ clique Helly) = K-perfectos $\cap$ clique Helly, y la clase K(perfectos $\cap$ clique Helly hereditarios) = $coordinados_c$ $\cap$ clique Helly hereditarios.

En la segunda parte analizamos también la relación que tienen los parámetros $\alpha(G)$, $k(G)$, $\chi(G)$ y $\omega(G)$ con parámetros $\alpha_C(K(G))$, $\tau(K(G))$, $M(K(G))$ y $F(K(G))$ en el grafo clique.

4.1 Grafos $Clique - Perfectos_c$, $Coordinados_c$ y $K - Perfectos$

Definición 4.1 *Sea G un grafo y sean $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ las cliques de G. Sea $G_{i_1,\ldots,i_s}$ el grafo formado por los vértices y las aristas que aparecen en $C_{i_1}, \ldots, C_{i_s}$.*

$G_{i_1,\ldots,i_s}$ es un ***subgrafo clique*** *de G si y sólo si toda clique de $G_{i_1,\ldots,i_s}$ es una clique de G.*

Observación 4.1 *No todo subgrafo es subgrafo clique (H_2, figura 4.2).*

No todo subgrafo inducido es subgrafo clique (T_1, figura 4.2).

No todo subgrafo clique es inducido (H_1, figura 4.2).

No todo subconjunto de cliques forman un subgrafo clique (G', figura 4.2).

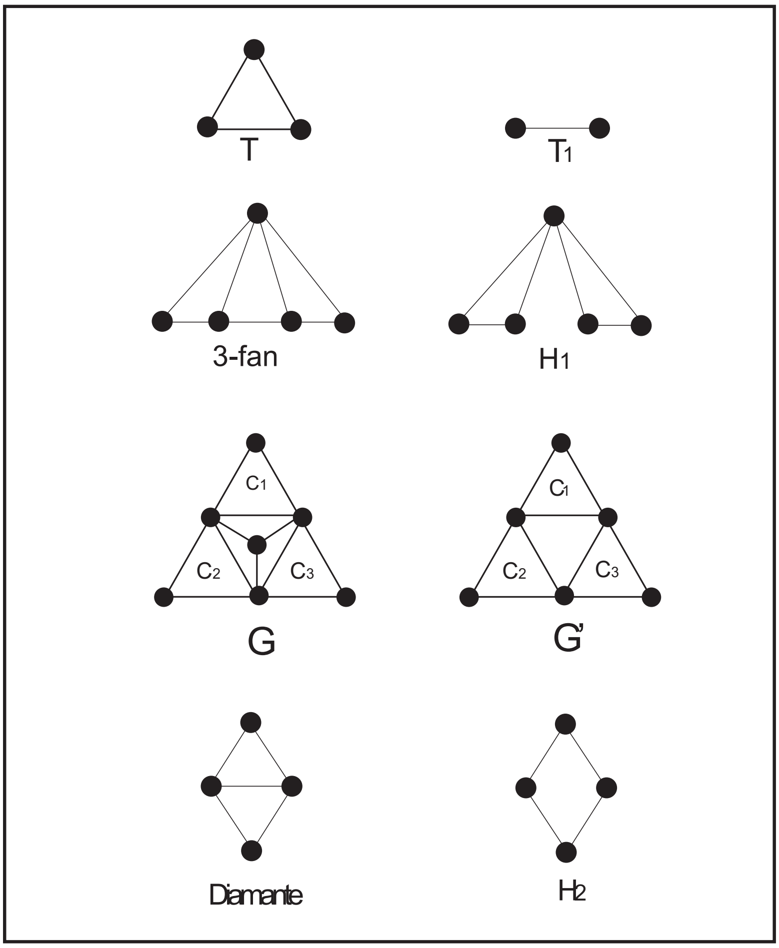
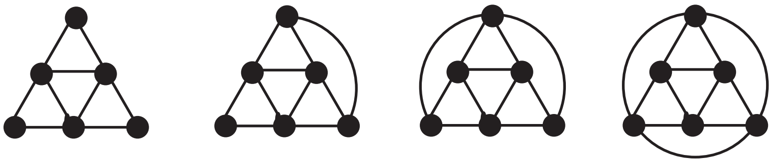


Figura 4.2: Ejemplos de subgrafos

Definición 4.2 *G se dice clical si para todo subconjunto* $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$*, las cliques de* $G_{i_1,\ldots,i_s}$ *son exactamente* $C_{i_1}, \ldots, C_{i_s}$.

Ejemplo 4.1 *No todo grafo es clical. Por ejemplo en la pirámide, el subgrafo clique* $G_{1,2,3}$ *contiene también a* C_4 *como clique (figura 4.3).*

Teorema 4.1 *G es clical si y sólo si G no contiene como subgrafo inducido a ninguno de los siguientes:*



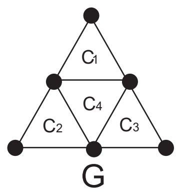
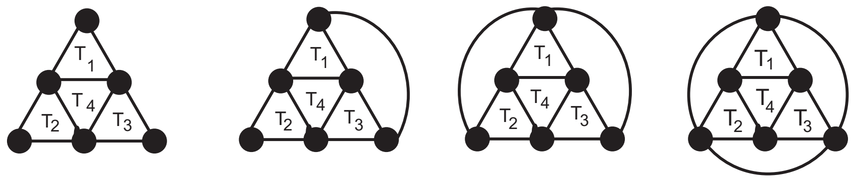


Figura 4.3: Grafo no clical

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que G contiene como subgrafo inducido a alguno de los grafos de la figura.



Existen tres cliques en G, $C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3}$ que contienen a T_1, T_2, T_3 respectivamente. Claramente T_4 no está contenida en ninguna de ellas.

Entonces en G_{i_1,i_2,i_3} el triángulo T_4 pertenece a una clique distinta de C_{i_1}, C_{i_2} y C_{i_3}, y G no resulta clical.

$\Leftarrow$) Supongamos que G no es clical. Entonces existe un subconjunto $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, tal que las cliques de $G_{i_1,\ldots,i_s}$ no son solamente $C_{i_1}, \ldots, C_{i_s}$.

Llamemos H a $G_{i_1,\ldots,i_s}$ y M al conjunto $\{C_{i_1}, \ldots, C_{i_s}\}$. Como $C_{i_1}, \ldots, C_{i_s}$ son cliques de H, existe C clique de H tal que C no está en M. Sea $m = |C|$.

Consideremos el conjunto $A = \{j : 1 \leq j \leq m$ *tales que* $\forall U \subseteq C, |U| = j$, *se cubre con una clique de* $M\}$. A es un conjunto acotado y no vacío, ya que por definición todo vértice de H está en alguna clique de M, luego podemos considerar $r = max_j\{j \in A\}$.

Podemos ver que $r \geq 2$, porque todo subconjunto de C de tamaño 2 es una arista de H, que por definición proviene de una clique de M, luego se cubre con una clique de M. También vale $r < m$ ya que si C se cubriera con una clique de M, por maximalidad debería ser igual a ella, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Por lo tanto existe un subconjunto $R \subseteq C$ de tamaño $r + 1$ que no puede ser cubierto por una clique de M. Como $r + 1 \geq 3$, existen $u, v, w \in R$ distintos entre sí. Como $r \in A$, $R - \{u\}$ se cubre con una clique C_u de M y $u \notin C_u$, luego existe un vértice $u' \in C_u$ no adyacente a u en G (en caso contrario, C_u no sería clique). Análogamente, $R - \{v\}$ se cubre con una clique C_v de M y $v \notin C_v$, existe $v' \in C_v$ no adyacente a v en G, y $R - \{w\}$ se cubre con una clique C_w de M y $w \notin C_w$, existe $w' \in C_w$ no adyacente a w en G.

Luego u, v, w, u', v', w' inducen en G alguno de los grafos que buscábamos según sean adyacentes o no entre si u' ,v' y w' (figura 4.4). ∎

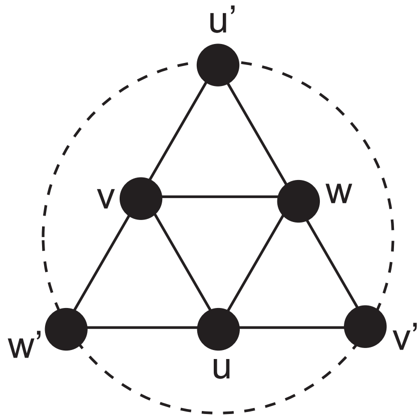


Figura 4.4:

Corolario 4.1 *G es clical $\Leftrightarrow$ G es clique Helly Hereditario.*

Demostración: La caracterización de los grafos clicales coincide con la caracterización de Prisner [44] de los grafos clique Helly hereditarios. ■

Corolario 4.2 *G es clical $\Leftrightarrow$ todo subgrafo inducido de G es clical.*

Definición 4.3 *Un subgrafo clique inducido de G es un subgrafo clique de G que además es subgrafo inducido de G.*

Dado que comúnmente se estudian propiedades sobre los subgafos inducidos de un grafo, resulta de interés relacionar a estos con los subgrafos clique. El teorema que sigue responde a esta cuestión:

Teorema 4.2 *Un grafo cumple que todos sus subgrafos clique son inducidos si y sólo si no contiene a P_4 ni C_4 como subgrafos inducidos (figura 4.5).*

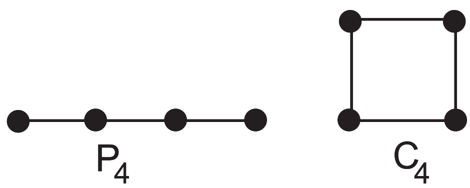
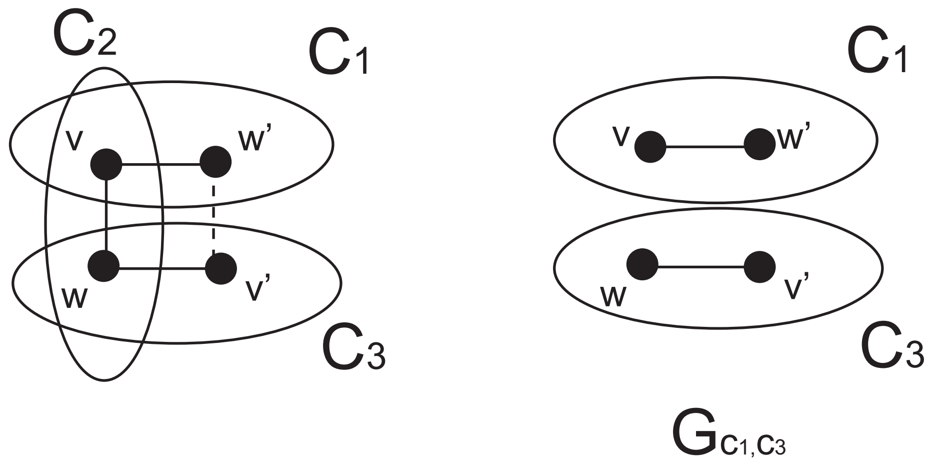
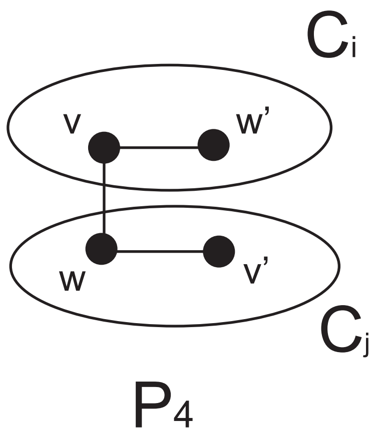


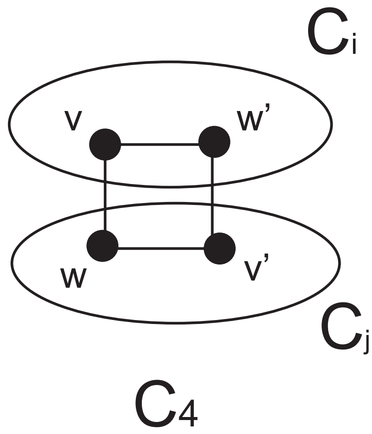
Figura 4.5: P_4 y C_4.

Demostración: $\Rightarrow$) Supongamos que G contiene a P_4 como subgrafo inducido, entonces cada una de estas tres aristas corresponden a cliques distintas C_1, C_2 y C_3 (ver figura). Tomemos G_{C_1,C_3} el subgrafo formado por C_1 y C_3. Entonces, este grafo tiene como únicas cliques a éstas y es un subgrafo clique que no contiene la arista (v, w) de G, es decir G tiene un subgrafo clique que no es inducido. Análogamente, si G contiene a C_4 como subgrafo inducido, tres de sus aristas están en cliques distintas y como en el caso anterior obtenemos un subgrafo clique que no es inducido.



$\Leftarrow$) Supongamos que G tiene un subgrafo clique H que no es subgrafo inducido. Queremos ver que entonces contiene a P_4 o a C_4 como subgrafo inducido. Sean C_1,...,C_K las cliques de H. Entonces existe (v, w) en $E(G)$ que no pertenece a $E(H)$, con v, w en $V(H)$. Como estos dos vértices no son adyacentes en H pero pertenecen al subgrafo clique H, existen dos cliques distintas de G (y de H) C_i que contienen a v y no a w y C_j que contiene a w y no a v (ver figura). Como v no pertenece a C_j pero es adyacente a w en G, debe existe un vértice v' en esta clique que no es adyacente a v en G (ya que si todos los vértices de C_j fueran adyacentes a v en G, v pertenecería a C_j, lo cual es un absurdo). Análogamente, existe un vértice w' en C_i que no es adyacente a w en G. Entonces tenemos: Si $(v', w') \in E(G)$, v', w, v, w' inducen un C_4, de lo contrario, v', w, v, w' inducen un P_4. ∎





Observación 4.2 *Los únicos grafos tales que todo subgrafo inducido es subgrafo clique son aquellos tales que todas las aristas son cliques y a la vez todos los vértices que no son aislados deben ser adyacentes a todos los demás vértices, ya que si un vértice que no es clique no es adyacente a algún vértice, el subgrafo inducido por esos dos vértices no es subgrafo clique. Por esta razón, si en el grafo hay más de dos vértices no aislados, entonces las aristas dejan de ser cliques. Es decir, o bien todos sus vértices son aislados, o bien el grafo contiene solamente dos vértices y una arista (suponiendo siempre que no tenemos en cuenta a los subgrafos inducidos por un sólo vértice).*

Proposición 4.1 *Sea G un grafo y sea A una matriz clique. Un subgrafo H de G es un subgrafo clique si y sólo si toda matriz clique A' de H es una submatriz de A que resulta de quedarse con ciertas filas de A y no contiene a las columnas que tienen 0's en las filas correspondientes a las filas de A'.*

Demostración: $\Leftarrow$) Si A' es submatriz de A con esas características entonces vale que las únicas cliques de H son cliques de G, y claramente H es el subgrafo clique formado por las cliques correspondientes a las filas de A'.

$\Rightarrow$) Si H es un subgrafo clique de G, toda clique de H es clique de G. Entonces las filas correspondientes a esas cliques forman una submatriz A' de A, tal que tiene columnas de 0's en los vértices que no están en ninguna de esas cliques. Claramente, si eliminamos esas columnas, A' resulta matriz clique de H. ∎

Proposición 4.2 *Sea G un grafo y sea A una matriz clique. Un subgrafo H de G es clique inducido si y sólo si :*

1) Su matriz clique A' es una submatriz de A que resulta de quedarse con ciertas filas de A y no contiene a las columnas que tienen 0's en las filas correspondientes a las filas de A'

2) Toda fila de A que contiene 0's en las columnas que no están en A', está incluida en alguna fila de A'.

3) Si la columna i no pertenece a A', y tiene un 1 en la fila j, entonces los 1's de la fila j que pertenecen a columnas de A', están incluidos en alguna fila de A'.

Demostración: $\Rightarrow$) El punto 1) sale de la proposición anterior, por ser H un subgrafo clique. Veamos el punto 2). Sea F_j una fila de la matriz A que tiene 0's en las columnas correspondientes a los vértices que no están en H. Es claro que forman una clique en G con todos sus vértices en H. Como H es inducido, este completo aparece en H y sigue siendo una clique en H. Entonces, claramente F_j sin las columnas de ceros correspondientes a los vértices que no están en H es una fila de A'. Para probar el punto 3), notemos que si una fila tiene dos 1's en columnas correspondientes a vértices de H, significa que estos son adyacentes. Como H es inducido, debe existir una clique que los contenga, es decir, existe una fila de A' que contiene los 1's.

$\Leftarrow$) Si A' cumple 1) entonces por la proposición anterior es un subgrafo clique. Veamos que es inducido. Veamos que para todo par de vértices v, w de H tales que la arista $(v,w) \in$ E(G), entonces *in* E(H). Como esta arista pertenece a G, existe una clique que la contiene. Esta clique está representada en A en la columna F_j. Consideremos dos casos:

Caso 1): Todos los vértices de esta clique están en H. Entonces la fila de A correspondiente a esta clique tiene 0's en las columnas correspondientes a los vértices que no están en H. Por la condicion 2), esta fila está incluida en alguna filas de A', es decir, existe una fila que tiene un 1 en las columnas correspondientes a v y w. Luego son adyacentes y (v, w) pertenece a E(H).

Caso 2): Existe un vértice z en G-H que forma parte de la clique F_j junto con v y w. Entonces la columna correspondiente al vértice z , la columna de v y de w tienen un 1 en la fila j correspondiente a esa clique. Por la condición 3), los 1's de las columnas de v y w están contenidas en alguna fila de A' y por lo tanto son adyacentes en H. ∎

Dado que un conjunto de cliques de un grafo se corresponde con un conjunto de vértices en el grafo clique, resulta natural plantear la relación que existe entre los subgrafos cliques de un grafo G y los subgrafos inducidos de su grafo clique K(G). Esta relación está dada por la siguiente proposición:

Proposición 4.3 *Sea G un grafo,*

1. *H es subgrafo clique de G $\Rightarrow$ K(H) es subgrafo inducido de K(G).*
2. *Si G es clique Helly hereditario, entonces todo H' subgrafo inducido de K(G) es el grafo clique de un subgrafo clique de G, es decir, $H' = K(H)$ para algún subgrafo clique de G.*

Demostración: 1) Sea H el subgrafo clique de G cuyas cliques son C_1, C_2,...,C_k. Como son cliques de G, K(H) contiene los k vértices correspondientes que pertenecen a K(G), por lo cual K(H) es un subgrafo de K(G). Resta ver que es inducido. Basta con observar que v_{C_i} es adyacente a v_{C_j} en K(H) si las cliques correspondientes se intersecan en H, pero dos cliques se intesrsecan en H si y sólo si se intersecan en G. Es decir, dos vértices son adyacentes en K(H) si y sólo si son adyacentes en K(G).

2) Sea H' un subgrafo inducido de K(G) y sean v_{C_1},...,v_{C_j} sus vértices. Sean $C_1...C_k$ las cliques de G correspondientes a estos vértices. Consideremos el subgrafo $G_{C_1..C_k}$. Como G es clique Helly hereditario, entonces por el teorema 4.1 G es clical. Esto nos dice que $G_{C_1...C_k}$ es un subgrafo clique de G y sus cliques son exactamente $C_1...C_k$. Análogamente a la demostracón del punto 1), se ve que $\mathrm{K}(G_{C_1...C_k}) = H'$. ■

Observación 4.3 *Claramente, si U es subgrafo clique inducido de G, K(U) es subgrafo inducido de K(G), pero no vale la vuelta.*

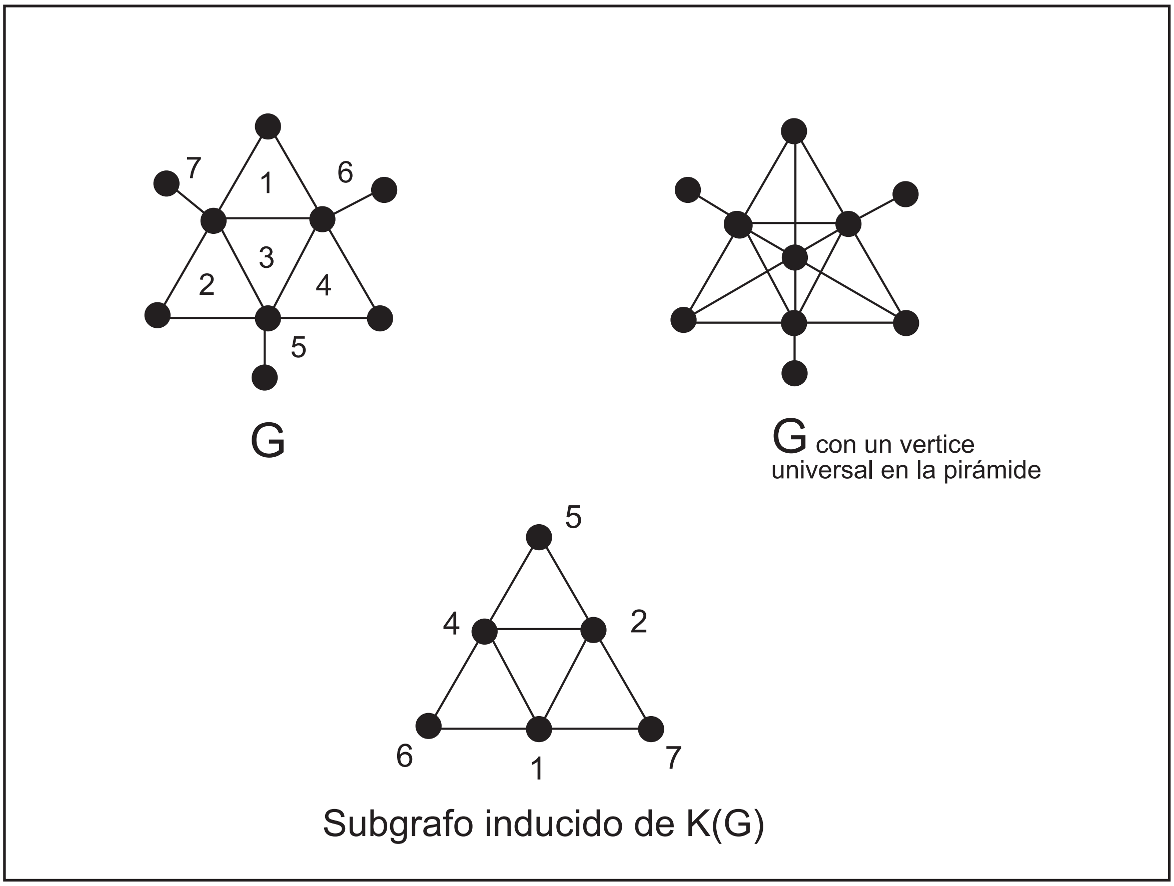
Observación 4.4 *La condición clique Helly hereditario para la proposición 4.3, punto 2), es necesaria. En la figura 4.6 tenemos el grafo G que no es clique Helly y vemos que existe un subgrafo inducido en K(G) que no es el grafo clique de ningún subgrafo clique de G. Si le agregamos un vértice universal a la pirámide, el grafo pasa a ser clique Helly, pero el problema en el grafo K(G) es el mismo. Lo mismo sucede en el grafo G', el diamante es un subgrafo inducido de $K(G')$ y no es el grafo clique de ningún subgrafo clique de G'. Observemos que G' tiene una pirámide con una oreja como subgrafo inducido y por lo tanto no es clique Helly hereditario.*

Definición 4.4 *Una propiedad se dice clique hereditaria si es hereditaria para todo subgrafo clique. Notar que la propiedad clique Helly es clique hereditaria.*

La propiedad clical, equivalente a clique Helly hereditario, nos permite construir grafos a partir de otros quitando o agregando cliques sin alterar las cliques existentes. Esta ventaja nos permite dar la siguiente caracterización de los grafos $pseudo - coordinados$ que definimos en el capítulo anterior:

Teorema 4.3 *Sea G un grafo clique Helly hereditario, entonces G es pseudo-coordinado $\Leftrightarrow$ existe una sucesión se subgrafos clique $H_0 = G \supset H_1 ... \supset H_{M(G)-1}$ que verifican:*

1. $C(H_i) \supset C(H_{i+1})$,



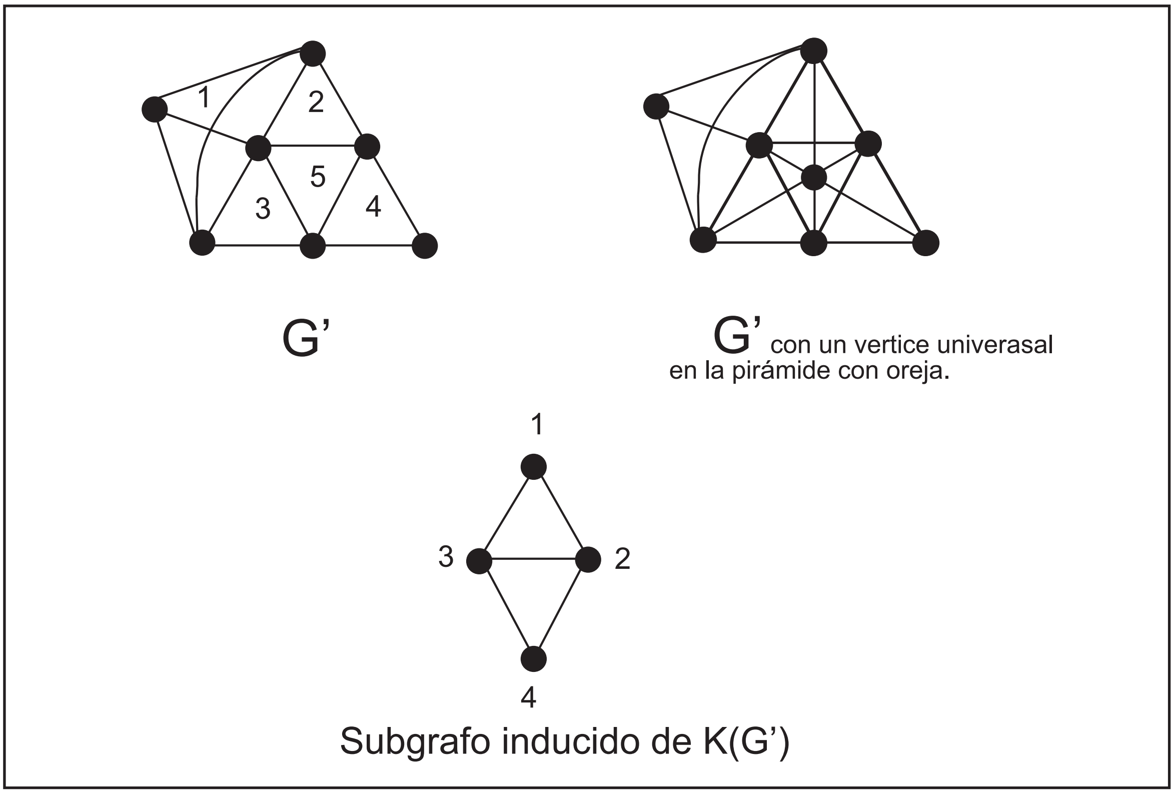


Figura 4.6: Grafos no clique Helly hereditarios donde no vale la proposición 4.3.

2. *$C(H_{i+1}) = C(H_i)$ - A , donde A es un conjunto de cliques independientes de $C(H_i)$ y*

3. *$M(H_{i+1})$=$M(H_i) - 1$*

Demostración: $\Rightarrow$) Supongamos que G es *pseudo-coordinado* . Sean $F_1 ... F_{M(G)}$ una partición de las cliques de G en $M(G)$ conjuntos de cliques independientes. Definamos la sucesión de la siguente manera: $H_0 = G$, H_1 lo definimos como el grafo que contiene solamente a todas las cliques de G excepto las que pertenecen a F_1, H_2 lo definimos como el grafo que contiene únicamente a todas las cliques de H_1 excepto las cliques del conjunto F_2, siguiendo recursivamente, definimos el grafo H_i como el grafo que contiene únicamente a las cliques de H_{i-1} excepto las cliques del conjunto F_{i-1}, es decir H_i es el subgrafo clique generado por las cliques del conjunto $C(H_{i-1}) - F_{i-1}$, *i.e* $H_i = G_{C(H_{i-1})-F_{i-1}}$. Claramente $H_i \supset H_{i+1}$. Como G es clique Helly hereditario, el teorema 4.1 nos asegura que esta construcción es siempre posible y que efectivamente $C(H_{i+1}) = C(H_i)$ - A, donde A=F_i es un conjunto independiente. Resta ver que $M(H_{i+1})$=$M(H_i) - 1$. Primero observemos que $C(H_{M(G)-1})$=$F_{M(G)}$, ya que esta familia F_1, F_2,...,$F_{M(G)}$ es una partición de las cliques de G. Como $F_{M(G)}$ es un conjunto de cliques independiente, entonces $M(H_{M(G)-1})$=1. Por otro lado, dado que las cliques que diferencian H_i de H_{i+1} constituyen un conjunto independiente, la diferencia entre $M(H_i)$ y $M(H_{i+1})$ o bien es 0, o bien es 1. En la sucesión $H_0..H_{M(G)-1}$ tenemos $M(G) - 1$ pasos para llegar de M(G) a 1, pudiendo en cada paso igualar el valor anterior o disminuirlo en 1. Es claro que para que esto suceda, la diferencia entre $M(H_i)$ y $M(H_{i+1})$ debe ser siempre 1.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión H_0=G$\supset$ $H_1 ... \supset$ $H_{M(G)-1}$ que verifica las condiciones del teorema. Definamos F_1 como el conjunto de cliques que pertenece a H_0 y no pertenece a H_1. Análogamente, para todo i menor que M(G) definamos F_i como el conjunto de cliques que pertenece a H_{i-1} y no pertenece a H_i. Observemos ahora que como por hipótesis $M(H_i)$ - $M(H_{i+1})$=1, entonces $M(H_{M(G)-1})$=1. Esto nos dice que todas las cliques de $H_{M(G)-1}$ son independientes, entonces definiendo $F_{M(G)}$ como el conjunto de cliques de $H_{M(G)-1}$ obtenemos que $F_1 .... F_{M(G)}$ es una partición de las cliques de G en $M(G)$ conjuntos independientes y G resulta *pseudo-coordinado* ∎

Observación 4.5 *En la demostración de la segunda implicación del teorema 4.3 no se usa el hecho de que G sea clique Helly hereditario, es decir, esa implicación sigue siendo cierta si no pedimos esa condición (tampoco se necesita que G sea clique Helly). En cambio, para la primer implicación la restricción de que G sea clique Helly hereditario es necesaria. Por ejemplo, la pirámide con orejas (figura 1.4) que no es clique Helly hereditaria es un grafo pseudo-coordinado pero no hay manera de construir la sucesión del teorema.*

Definición 4.5

G es coordinado$_c$ si $M(H)$=$F(H)$, $\forall$ H subgrafo clique de G.

Teorema 4.4 *Si G es K-perfecto y clique Helly entonces es coordinado$_c$.*

Demostración: Sea H un subgrafo clique de G. Como G es clique Helly y las cliques de H son un subconjunto de cliques de G, H es clique Helly. Tenemos que ver que $M(H) = F(H)$. La proposición 4.3 dice que K(H) es un subgrafo inducido de K(G) y por lo tanto es $perfecto$. Por la proposición 3.2, sabemos que M(H)=F(H), como queríamos probar. ∎

Teorema 4.5 *Sea G un grafo clique Helly hereditario. Entonces,*

G es coordinado$_c$ $\Rightarrow$ G es K-Perfecto y clique Helly

Demostración: Por hipótesis G es clique Helly. Veamos que K(G) es $perfecto$. Para esto veremos que para todo H' subgrafo inducido de K(G), $\omega(H') = \chi(H')$. Sea H' un subgrafo de K(G). Por la proposición 4.3 punto 2), existe un H subgrafo clique de G tal que $K(H) = H'$. Como G es $Coordinado_c$, $M(H) = F(H)$. La proposición 3.2 dice que entonces $\omega(K(H)) = \chi(K(H))$.∎

Corolario 4.3 *Sea G un grafo y sea A una matriz clique. Entonces,*

El poliedro $\{ \ x \in \Re^m / \ A^T \cdot x \leq 1 \ \}$ *es entero $\Rightarrow$ G es coordinado$_c$*

Demostración: El corolario 2.4 dice que si este poliedro es entero, entonces el grafo G es clique Helly y K-perfecto. Por el teorema 4.4 G resulta $coordinado_c$. ∎

Corolario 4.4 *Sea G un grafo clique Helly hereditario y sea A una matriz clique. Entonces,*

si G es coordinado$_c$ $\Rightarrow$ el poliedro $\{ \ x \in \Re^m / \ A^T \cdot x \leq 1 \ \}$ *es entero*

Demostración: El teorema 4.5 dice que G es K-perfecto. Por el corolario 2.4, el resultado sigue directamente. ∎

Definición 4.6

$$G \text{ es } clique-perfecto_c \text{ si } \alpha_C(H)=\tau(H),\ \forall\ H \text{ subgrafo clique de } G.$$

Teorema 4.6 *Sea G un grafo clique Helly hereditario. Entonces*

$$\text{Si } G \text{ es } clique-perfecto_c \Rightarrow G \text{ es K-Perfecto y clique Helly.}$$

Demostración: Sea H' un subgrafo de K(G). Veamos que $\alpha(H') = k(H')$. Vimos que $H' = K(H)$ (proposición 4.3) para algún H subgrafo clique de G. Como G es $clique-perfecto_c$, se verifica que $\alpha(H) = \tau(H)$. Como G es clique Helly, entonces H también. Aplicando la proposición 3.3 obtenemos que α(K(H))= $k(K(H))$, como queríamos probar. ■

Teorema 4.7 *Sea G un grafo. Entonces,*

$$G \text{ es K-perfecto y clique Helly} \Rightarrow G \text{ es } clique-perfecto_c$$

Demostración: Por la proposición 4.3 sabemos que si H es un subgrafo clique de G, entonces K(H) es un subgrafo inducido de K(G). Como K(G) es $perfecto$ tenemos $\alpha(K(H))$=$k(K(H))$. Como G es clique Helly, por la proposición 3.3 resulta que α_C(H)=τ(H), como queríamos probar. ■

Observación 4.6 *La condición clique Helly es necesaria para el teorema anterior. Por ejemplo la pirámide es un grafo K-perfecto pero no es $clique-perfecto_c$.*

Por el teorema 2.1 (PGT) de Lovász y la relación de los grafos $coordinados_c$ y $clique-perfectos_c$ con los grafos $perfectos$, estamos en condiciones de dar una nueva caracterización similar a la de los grafos perfectos para estas clases:

Teorema 4.8 *Sea G un grafo clique Helly hereditario, entonces son equivalentes*

1. *G es $coordinado_c$*
2. *G es $clique-perfecto_c$*
3. *Para todo subgrafo clique H de G se verifica la siguiente desigualdad:*

$$|C(H)| \leq \alpha_C(H) \cdot M(H)$$

Demostración: Primero veamos que 1) y 2) son equivalentes:

1) $\Rightarrow$ 2) Por el teorema 4.5 G es K-perfecto y clique Helly. El teorema 4.7 dice que entonces G es $clique-perfecto_c$.

2) $\Rightarrow$ 1) El teorema 4.6 dice que G es K-perfecto y clique Helly. El Teorema 4.4 asegura que entonces G es $coordinado_c$.

Veamos ahora que 2)$\Rightarrow$ 3): Sea G un grafo clique Helly heretitario. Sea H un subgrafo clique de G. Por la proposición 4.3 sabemos que K(H) es un subgrafo inducido de K(G). Como G es $clique-perfecto_c$, el teorema 4.6 dice que K(G) es *perfecto* y entonces verifica que $|V_U| \leq \alpha(U) \cdot \omega(U)$ para todo subgrafo inducido U (teorema 2.1). Por la proposición 3.3 y la proposición 3.2 tenemos que $\alpha_C(H) = \alpha(K(H))$, y $M(H) = \omega(K(H))$. Si reemplazamos estos valores en la desigualdad anterior y observamos que $|V_{K(H)}|$=|C(H)|, obtenemos la desigualdad que queríamos.

3) $\Leftarrow$ 1) Supongamos que para todo subgrafo clique de G se verifica la desigualdad anterior. Veamos que G es $clique-perfecto_c$ y $coordinado_c$. Para esto, por el teorema 4.7 y 4.5 basta ver que K(G) es *perfecto* . Sea U un subgrafo inducido de K(G), veamos que cumple la propiedad P_3 (de los pseudo-perfectos). Como G es clique Helly hereditario, por la proposición 4.3 sabemos que existe un subgrafo clique H de G tal que K(H)=U. Como en la demostración anterior, tenemos $\alpha_C(H) = \alpha(K(H))$, y $M(H) = \omega(K(H))$ y $|V_{K(H)}|$=|C(H)|. Entonces, $|V_U| \leq \alpha(U) \cdot \omega(U)$. ∎

Corolario 4.5 *Si G es clique Helly hereditario, entonces*

$$G \text{ es } CliquePerfecto_c, \Leftrightarrow G \text{ es } coordinado_c \Leftrightarrow G \text{ es K-Perfecto}$$

Demostración: Sale directo del teorema anterior. ∎

Corolario 4.6 *Sea G y sea A su matriz clique. Entonces,*

$$\{\ x \in \Re^m / \ A^T \cdot x \leq 1\ \} \text{ es entero} \Rightarrow G \text{ es } clique-perfecto_c$$

Demostración: El corolario 2.4 asegura que G es clique Helly y K-perfecto. Por el teorema 4.7, G resulta $clique-perfecto_c$. ∎

Corolario 4.7 *Sea G un grafo clique Helly hereditario, y sea A una matriz clique. Entonces*

$$G\ clique-perfecto_c \Rightarrow \text{el poliedro } \{\ x \in \Re^m / \ A^T \cdot x \leq 1\ \} \text{ es entero}$$

Demostración: Sigue directamente del corolario 4.5 y el 2.4. ■

Finalmente, si tenemos en cuenta todos los resultados anteriores, obtenemos el siguiente teorema para grafos *perfectos*:

Teorema 4.9 *Si G es un grafo perfecto y clique Helly, entonces K(G) es K-perfecto y clique Helly.*

Demostración: Sabemos por el corolario 2.3 que si G es clique Helly, entonces K^2(G) es un subgrafo inducido de G. Como G es perfecto, éste también lo es. Entonces podemos decir que $K(G)$ es $K - perfecto$. Además, por el corolario 2.1, K(G) es clique Helly. ■

Teorema 4.10 *[8] Sea G un grafo K-perfecto, entonces existe un grafo H perfecto tal que K(H)=G. Además, si G es clique Helly o clique Helly hereditario, H también lo es.*

Corolario 4.8 *La clase K(perfectos ∩ clique Helly)=K-perfectos y clique Helly.*

Demostración: Este resultado es consecuencia directa del teorema 4.9 y del teorema 4.10. ■

Corolario 4.9 *Sea G un grafo perfecto y clique Helly, entonces K(G) es* $Clique - Perfecto_c$ *y* $coordinado_c$.

Demostración: Por el teorema 4.9, G es K-perfecto y clique Helly. El teorema 4.7 y el teorema 4.4 dicen que K(G) es $clique{-}perfecto_c$ y $coordinado_c$.■

Corolario 4.10 *La clase K(perfectos ∩ clique Helly hereditarios) =* $coordinados_c$ *y* $clique - perfectos_c$ *∩ clique Helly hereditarios.*

Demostración: Basta recordar que dentro de los grafos clique Helly hereditarios, la clase de los grafos $coordinados_c$ y la de los $clique - perfectos_c$ coincide con la de los grafos K-perfectos y clique Helly. ■

Corolario 4.11 *Si G es un grafo K-perfecto y clique Helly, entonces G es $coordinado_c$, $clique-perfecto_c$ y el subgrafo inducido de G que resulta de eliminar los vértices dominados es también $coordinado_c$ y $clique-perfecto_c$.*

Demostración: Como K(G) es perfecto y clique Helly, por el teorema 4.4 y el teorema 4.7, G es $coordinado_c$ y $clique-perfecto_c$. Por el corolario 4.9 resulta que $K^2(G)$ también lo es. Recordemos que el corolario 2.3 dice que el grafo $K^2(G)$ es el subgrafo inducido de G que resulta de eliminar los vértices dominados. ∎

Corolario 4.12 *Si G es un grafo clique Helly hereditario $coordinado_c$ (o $clique-perfecto_c$) entonces tiene un subgrafo inducido que también lo es.*

Observación 4.7 *Como se demostró en la proposición 2.1, si vale la conjetura 2.1 (SPGC), entonces la región determinada por los grafos clique perfectos, K-perfectos clique Helly hereditarios, y no perfectos es vacía.*

Corolario 4.13 *Si G es $(P_4-C_4)-free$, clique Helly hereditario, y coordinado o clique perfecto, entonces, existe un grafo H perfecto, tal que K(H)=G.*

Demostración: Por el teorema 4.2 tenemos que si G es coordinado o clique perfecto, entonces es $coordinado_c$ y $clique-perfecto_c$, y podemos aplicar el corolario 4.10. ∎

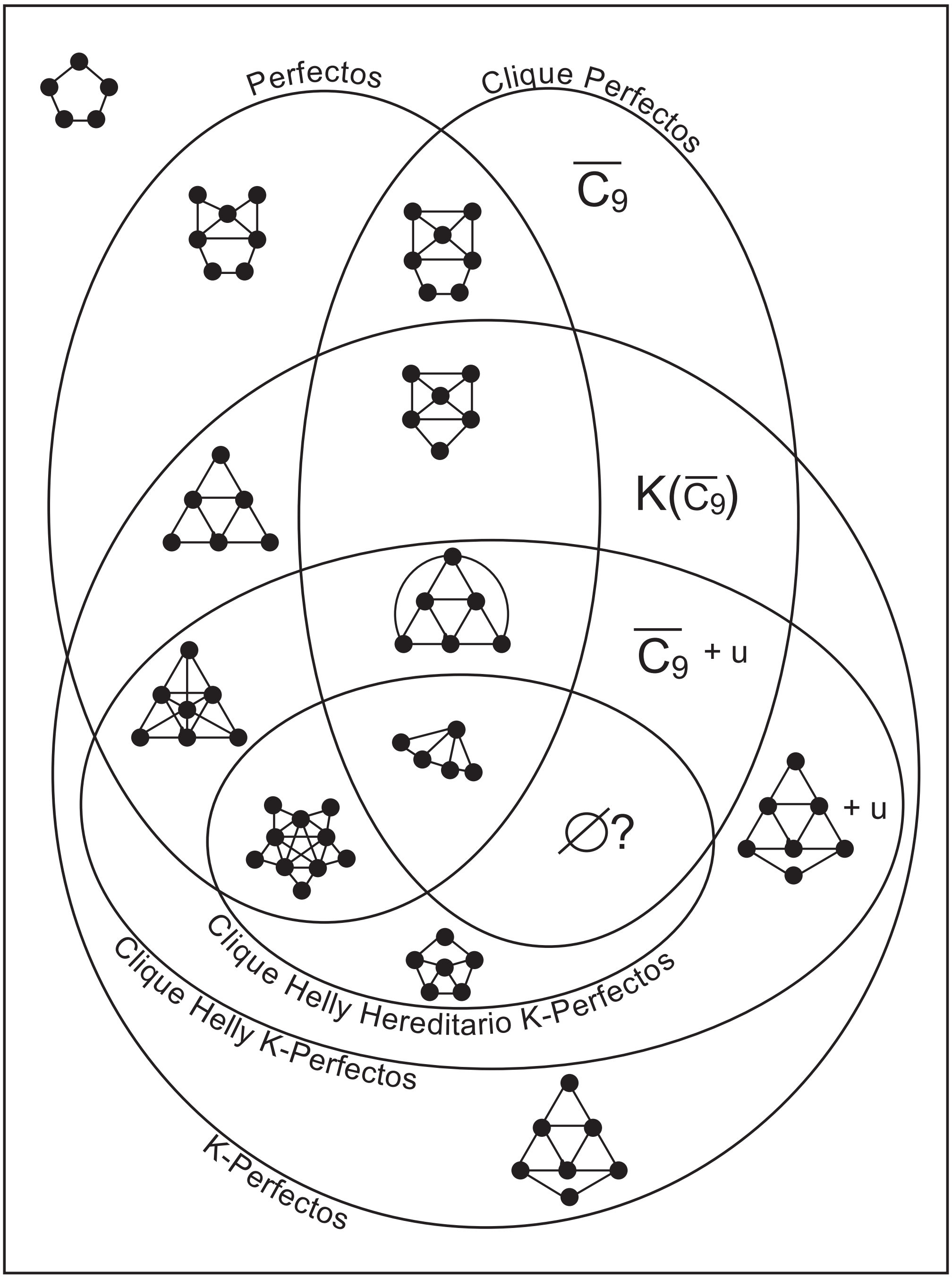


Figura 4.7: Intersección de los grafos $perfectos$, $clique-perfectos$ y $K-perfectos$, clique Helly y clique Helly hereditarios

4.2 Grafos $\chi - perfectos_c$ y $\alpha - perfectos_c$

Definición 4.7

Un grafo G es $\chi - Perfecto_c$ si $\chi(H)=\omega(H)$ para todo subgrafo clique H

G es $\alpha - perfecto_c$ si $\alpha(H)=k(H)$ para todo subgrafo clique H

Un grafo G se dice $perfecto_c$ si es $\alpha - perfecto_c$ y $\chi - Perfecto_c$

Observación 4.8 *Estas clases no son equivalentes (figura 4.8).*

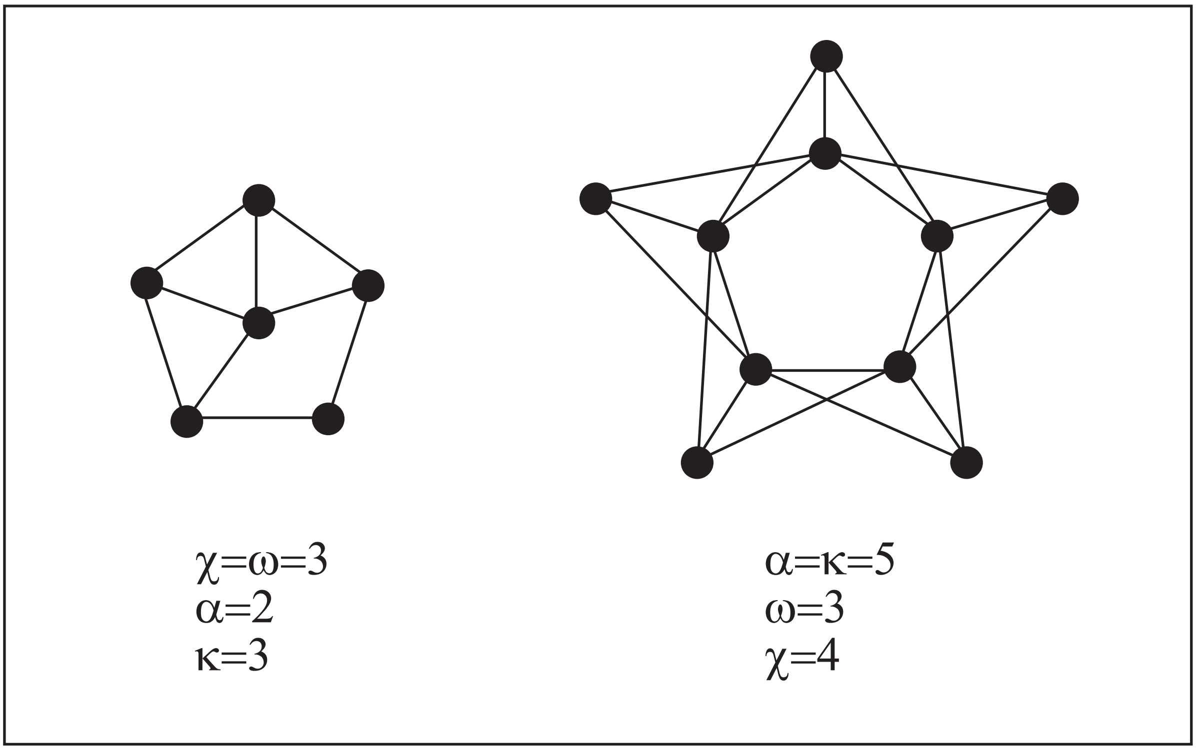


Figura 4.8: El grafo de la derecha es $\alpha - perefcto_c$ y no $\chi - perfecto_c$. El grafo de la izquierda es $\chi - perfecto_c$ pero no es $\alpha - perfecto_c$

Lema 4.1 *Sea G un grafo clique Helly, y K(G) su grafo clique. Entonces, toda clique C de K(G) tiene asociado un vértice en G que pertenece a todas las cliques de G cuyos vértices correspondientes en K(G) constituyen C; de tal manera que dos cliques distintas tienen asociados vértices distintos y cliques independientes tienen asociados vértices independientes.*

Demostración: Sea C una clique de K(G). Sean v_1, v_2,...,v_k los vértices de K(G) que forman la clique C. Sean C_1, C_2,...,C_k las cliques de G correspondientes a esos vértices. Como en K(G) constituyen una clique, entonces estas k cliques tienen todas intersección dos a dos. Como G es helly, tenemos que existe un vértice w en G que pertenece a todas estas cliques. El vértice w es el que buscábamos. Veamos ahora que si $C_i \neq C_j$, entonces los vértices asociados v_i, v_j son distintos y si además las cliques son independientes, entonces los vértices también lo son. Veamos el primer punto. Como C_i es distinta de C_j, entonces existe una clique C en G que contiene a v_i y que no se interseca con alguna de las cliques que contienen a v_j, entonces $v_i \neq v_j$. Para ver el segundo punto, supongamos que v_i es adyacente a v_j. Entonces existe alguna clique C en G que contiene a estos dos vértices. Pero entonces C interseca a todas las cliques de G que generan la clique C_i y la clique C_j. Luego, el vértice correspondiente a C en K(G) pertenece a estas dos cliques, lo cual es un absurdo, ya que éstas eran independientes. ∎

Teorema 4.11 *Sea G un grafo clique Helly, y sea K(G) su grafo clique. Entonces vale:*

1. $\omega(G) \geq M(K(G))$
2. $\chi(G) \geq F(K(G))$

Demostración: Veamos el punto 1). Supongamos que v es un vértice *coordinador* de K(G), es decir $m(v) = M(K(G))$; y sea C la clique correspondiente en G. Consideremos las M(K(G)) cliques que contienen a v. Por el lema 4.1 cada una de estas cliques de K(G) tiene asociado un vértice distinto en G con la propiedad de pertenecer a todas las cliques de G cuyos vértices correspondientes en K(G) generan las cliques en K(G). Como v pertenece a todas estas M(K(G)) cliques, C contiene los M(K(G)) vértices distintos. Entonces claramente el tamaño de la clique máxima de G es mayor o igual a M(K(G)).

Probemos el punto 2). Supongamos que tenemos una partición de los vértices de G en familias de conjuntos independientes F_1...F_s. Consideremos las cliques de K(G). Como vimos en el lema 4.1, cada clique de K(G) se asocia con algún vértice de G, de tal manera que cliques independientes en K(G), se asocian con vértices independientes en G. Entonces, asignando cada clique C de K(G) a F'_j si algún vértice asociado pertence a F_j (recordemos que si hay más de un vértice asociado, elegimos alguno), obtenemos una partición de las cliques de K(G) en conjuntos de cliques independientes. De aquí sale la directamente la desigualdad que queríamos probar. ∎

Teorema 4.12 *Supongamos que G es un grafo clique Helly tal que para alguna clique C, con $\mid C \mid = \omega(G)$, se verifica que para cada par de vértices v,w $\in C$:*

$$\cap_{C_v \in F_v, C_w \in F_w} C_v \cap C_w = \emptyset,$$

donde F_v={ cliques que contienen a v }.

Entonces $M(K(G)) = \omega(G)$.

Demostración: Por el teorema 4.11, para ver la igualdad basta ver que $M(K(G)) \geq \omega(G)$. Sea C la clique que verifica $\mid C \mid = \omega$(G) con la propiedad de la hipótesis. Para cada v en C, sea F_v la familia de cliques que contienen al vértice v. Por cada C_v clique perteneciente a esta familia tenemos un vértice en K(G). Es claro que para cada v, los vértices correspondientes a estas cliques en K(G) forman un completo K_v en K(G). Estos completos pertenecen a alguna clique de K(G), a la que llamaremos $\overline{K_v}$. Veamos ahora que si v y w son dos vértices distintos de C, entonces $\overline{K_v} \neq \overline{K_w}$. Supongamos que son iguales, y consideremos todas las cliques de G correspondientes a los vértices de esta clique en K(G). Claramente estas tienen todas intersección de a pares. Como G es clique Helly, entonces sabemos que existe un vértice v' en G que pertenece a todas estas cliques. En particular, v' pertenece a todas las cliques C_v que pertenecen a F_v. Análogamente v' pertenece a todas las cliques C_w que pertenecen a F_w. Entonces, v' pertenece a $\cap_{C_v \in F_v, C_w \in F_w} C_v \cap C_w$, lo cual es un absurdo . Por lo tanto, $\overline{K_v} \neq \overline{K_w}$ son cliques distintas en K(G). Por último, observemos que el vértice v_C correspondiente en K(G) a la clique C pertenece a todas estas cliques, ya que en particular pertenece a F_v para todo v, vértice de C. Entonces, $m(v_C) \geq \mid C \mid = \omega$(G), de donde claramente obtenemos $M(K(G)) \geq \omega$(G). ■

Proposición 4.4 *Asumiendo que G es un grafo clique Helly, en el teorema 4.12, si para algún v , $\cap_{C \in F_v} C_v = \{v\}$, entonces el completo K_v de K(G) construído en la demostración resulta ser clique en K(G).*

Demostración: Supongamos que K_v no es una clique, es decir supongamos que existe un vértice w en K(G) adyacente a todos los vértices de K_v, pero no que forma parte de este completo. Esto significa que existe una clique C_w en G correspondiente al vértice w que interseca a la familia F_v pero no pertenece a ella. Luego, C_w no contiene al vértice v. Claramente todos los elementos del conjunto de cliques $F_v \cup \{C_w\}$ tienen intersección de a pares. Como G es clique Helly, existe un vértice v' común a todas ellas, en particular, común a todas las cliques de F_v. Por hipótesis, concluimos que $v = v'$. Pero habíamos supuesto que v no pertenecía la clique C_w, y tenemos un absurdo. Entonces no existe tal vértice w y K_v resulta clique de K(G). ■

Corolario 4.14 *Sea G un grafo con las condiciones del teorema 4.12, entonces vale que si G es pseudo$_\chi$−perfecto, entonces K(G) es pseudo-coordinado.*

Demostración: Utilizando el teorema 4.12, basta seguir la siguiente desigualdad: $M(K(G))$=$\omega(G)$=$\chi(G) \geq F(K(G))$, pero como $M(K(G)) \leq F(K(G))$, se verifica la igualdad. ■

Observación 4.9 *Existen grafos pseudo$_\chi$ − perfectos, con K(G) pseudo-coordinado*, pero cuyos parámetros cambian, es decir, en el teorema 4.11 se verifican las desigualdades $\chi(G) \geq F(K(G))$ y $\omega(G) \geq M(K(G))$ estrictamente (figura 4.9).

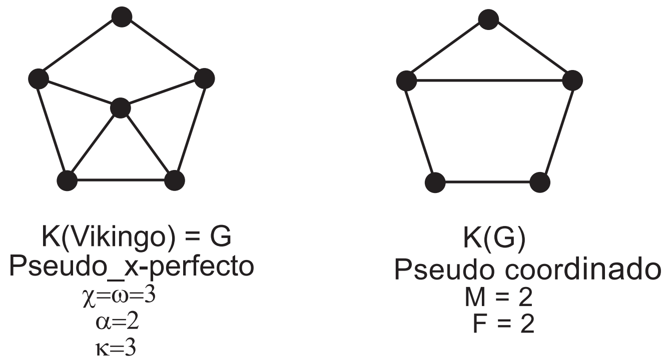


Figura 4.9: Ejemplo de un grafo *pseudo$_\chi$ − perfecto* cuyo grafo clique es *pseudo-coordinado*

Teorema 4.13 *Sea G un grafo clique Helly hereditario y tal que todo subgrafo clique verifica las condiciones del teorema 4.12. Si G es $\chi - Perfecto_c$, entonces el grafo K(G) es coordinado.*

Demostración: Sigue del hecho de que todo subgrafo inducido de K(G) es el grafo clique de un subgrafo clique de G (proposición 4.3), junto con el corolario 4.14. ■

Observación 4.10 *Existen grafos $\chi - perfectos_c$ que no verifican las condiciones del teorema 4.12, cuyo grafo clique es coordinado (figura 4.10). En el grafo G los vértices v y w cumplen que $\cap_{C_v \in F_v, C_w \in F_w} C_v \cap C_w = v$.*

Lema 4.2 *[8] Sea G un grafo $(P_4 - C_4) - free$. Entonces su grafo clique K(G) es $(P_4 - C_4) - free$.*

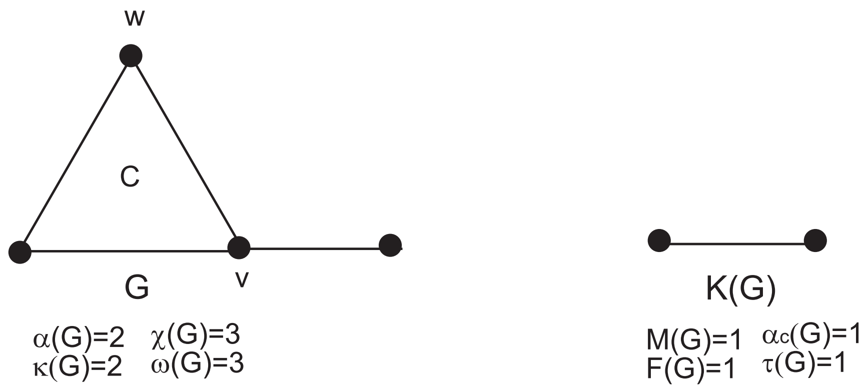


Figura 4.10: Ejemplos de grafos que no verifican las condiciones del teorema 4.12.

Corolario 4.15 *Si G es un grafo clique Helly hereditario con las condiciones del teorema 4.12 para todo subgrafo clique, además, $(P_4 - C_4) - free$ y $\chi - perfecto_c$, entonces G tiene un subgrafo inducido que es perfecto, y $perfecto_c$.*

Demostración: Por el teorema 4.2 sabemos que K(G) es *coordinado*. Como G es *clique Helly hereditario* y $(P_4 - C_4) - free$, por el lema 4.2 y el corolario 2.2, K(G) también lo es. Entonces, K(G) es *coordinado$_c$* y podemos aplicar el teorema 4.5 de donde obtenemos que K^2(G) es $perfecto$, y como además es $(P_4 - C_4) - free$, por el teorema 4.2 también es $perfecto_c$. Por último, recordemos que por el corolario 2.3, K^2(G) es un subgrafo inducido de G. ■

Análogamente, veamos ahora una relación entre los parámetros $\alpha(G)$ y $k(G)$ y los parámetros $\alpha_C(K(G))$ y $\tau(K(G))$ en el grafo clique.

Teorema 4.14 *Sea G un grafo clique Helly, entonces vale:*

1. $\tau(K(G)) \leq k(G)$
2. $\alpha_C(K(G)) \leq \alpha(G)$

Demostración: Veamos 1). Supongamos que tenemos un cubrimiento por cliques $\{C_1, ..., C_s\}$ de vértices de G. Veamos que el conjunto de vértices $\{v_1...v_s\}$ correspondientes en K(G), constituyen un cubrimiento por vértices de cliques en K(G). Sea C una clique de K(G), veamos que contiene algún vértice del conjunto. Las cliques de G correspondientes a los vértices de esta clique tienen todas intersección dos a dos. Como G es clique Helly, entonces existe algún vértice en G común a todas estas cliques. A estos vértices los llamaremos los vértices asociados a la clique de K(G). Pero entonces, existe una clique del cubrimiento de G, digamos C_i, que contiene este vértice. Es decir que C_i interseca a todas las cliques que forman la clique C en K(G), entonces su vértice correspondiente en K(G), v_i, pertenece a esta clique.

Veamos el punto 2). Supongamos que $C_1 ... C_s$ es un conjunto de cliques independientes dos a dos en K(G). Por el lema 4.1, sabemos que existe un conjunto $v_1 ... v_s$ de vértices asociados en G, donde v_j pertenece a todas las cliques de G, que forman la clique C_j en K(G), y además son independientes. De aquí que $\alpha_C(K(G)) \leq \alpha(G)$. ∎

Teorema 4.15 *Supongamos que G es un grafo clique Helly, tal que contiene un conjunto de vértices independientes F, con* $\mid F \mid = \alpha(G)$ *que verifica que, para cada par de vértices v,w* $\in F$*:*

$$si\ v' \in \cap_{C_v \in F_v} C_v,\ y\ w' \in \cap_{C_w \in F_w} C_w$$

entonnces v' y w' no son adyacentes,

,

$$donde\ F_v = \{\ cliques\ que\ contienen\ a\ v\ \}$$

.

Entonces $\alpha_c(K(G)) = \alpha(G)$

Demostración: Por el teorema 4.14, para ver la igualdad basta ver que $\alpha_c(K(G)) \geq \alpha(G)$. Sea F el conjunto de vértices independientes que verifica $\mid F \mid = \alpha$(G) con la propiedad de la hipótesis. Para cada v en F, sea F_v la familia de cliques que contienen al vértice v. Por cada clique C_v perteneciente a esta familia, tenemos un vértice en K(G). Es claro que para cada v, los vértices correspondientes a estas cliques en K(G) forman un completo K_v en K(G). Estos completos pertenecen a alguna clique de K(G), a la que llamaremos $\overline{K_v}$. Veamos ahora que si v y w son don vértices disjuntos de F, entonces las cliques de K(G), $\overline{K_v}$ y $\overline{K_w}$ son disjuntas. Supongamos que tienen intersección no vacía. Esto nos dice que existe un vértice en K(G) que es adyacente a todos los vértices de K_v y de K_w. Pero entonces, la clique C de G correspondiente a este vértice interseca a todas las cliques C_v y a todas las cliques C_w. Como G es clique Helly, entonces existe un vértice v', y w' que pertenecen a $\cap_{C_v \in F_v}\ C_v$ y a $\cap_{C_w \in F_w} C_w$ respectivamente, y a su vez, v' y w' pertenecen a C, lo que nos lleva a un absurdo ya que v' y w' no pueden ser adyacentes. Entonces las cliques $\overline{K_v}$, con $v \in F$, son un conjunto de cliques independientes de K(G) de cardinal $\alpha(G)$. Claramente obtenemos $\alpha_c(K(G))$ $\geq \alpha$(G). ∎

Análogamente al caso anterior, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.16 *Sea G un grafo con las condiciones del teorema 4.15. Entonces vale que si G es* $pseudo_\alpha - perfecto$*, entonces K(G) es pseudo-clique perfecto.*

Demostración: Utilizando el teorema 4.15, basta seguir la siguiente desigualdad: $\alpha_c(K(G))=\alpha(G)=k(G) \geq \tau(K(G))$, pero como $\alpha_c(K(G)) \leq \tau(K(G))$, se sigue que se verifica la igualdad. ■

Teorema 4.16 *Sea G un grafo clique Helly hereditario con las condiciones del teorema 4.15 para todo subgrafo clique. Si G es $\alpha - Perfecto_c$, entonces el grafo K(G) es clique perfecto.*

Demostración: Sigue del hecho de que todo subgrafo inducido de K(G) es el grafo clique de un subgrafo clique de G (proposición 4.3), junto con el corolario 4.16. ■

Observación 4.11 *Existen grafos $\alpha{-}perfectos_c$ que no cumplen las hipótesis del teorema 4.15 y cuyo grafo clique es* clique perfecto (figura 4.10).

Corolario 4.17 *Si G es un grafo clique Helly hereditario con las condiciones del teorema 4.15 para todo subgrafo clique y $(P_4 - C_4) - free$ y además $\alpha - perfecto_c$, entonces G tiene un subgrafo inducido que es perfecto y $perfecto_c$.*

Demostración: Por el teorema 4.16 sabemos que K(G) es $clique - perfecto$. Como G es clique Helly hereditario y $(P_4 - C_4) - free$, por el lema 4.2 y el corolario 2.2, K(G) también lo es. Entonces, K(G) es $clique - perfecto_c$ y podemos aplicar el teorema 4.6 de donde obtenemos que K^2(G) es $perfecto$. Como además es $(P_4 - C_4) - free$, también es $perfecto_c$. Por último, recordemos que por el corolario 2.3, K^2(G) es un subgrafo inducido de G. ■

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis se han presentado, entre otras, cuatro nuevas clases de grafos: los coordinados, los $coordinados_c$, los $clique-perfectos_c$ y los K-perfectos. Hemos encontrado relaciones muy interesantes entre estas clases que permiten reconocer ciertas propiedades del grafo clique de un grafo G analizando propiedades de G. Estas relaciones nos han dado lugar a diversas caracterizaciones de algunas de estas clases. En este punto, uno de los resultados más destacados de esta tesis es el que define la matriz clique del grafo clique de un grafo G a partir de la matriz clique de G para grafos clique Helly. Este resultado proporciona una herramienta que ha sido muy útil para el análisis del grafo clique. Además, hemos estudiado el poliedro $\{x \in \Re^m / A^T \cdot x \leq 1, x \geq 0\}$ cuando A es matriz clique de un grafo, encontrando una caracterización de los grafos para los cuales este poliedro resulta entero. Este resultado es de gran importancia ya que, al igual que sucede con los grafos perfectos, problemas que en el caso general deben resolverse como problemas de programación entera, para estos grafos se resuelven como problemas de programación lineal en tiempo polinomial en el tamaño de la matriz clique.

Combinando dos clases que son muy estudiadas en la teoría de grafos como lo son los grafos perfectos y los grafos clique, caracterizamos también la clase de los grafos clique de los grafos perfectos, clique Helly, y de los perfectos, clique Helly hereditarios. Por último, definimos dos variantes de los grafos perfectos, los grafos $\chi - perfectos$ y $\alpha - perfectos$ y analizamos sus grafos clique.

Hemos planteado en esta tesis una conjetura acerca de la caracterización de los grafos clique perfectos mediante subgrafos prohibidos. En lo sucesivo se intentará avanzar sobre este tema no solamente para los clique perfectos, sino tambien para los grafos coordinados. Por otro lado, queda por estudiar la complejidad de encontrar todos los parámetros involucrados en todas las clases de grafos que aparecen en esta tesis y el reconocimiento de estas clases.

Un bouquet transversal se define como un cubrimiento de vértices por subgrafos completos. Dos completos son aislados si son independientes y no existe una arista que conecte dos vértices de ambos. Proponemos estudiar una nueva clase de grafos, relacionada con las aquí estudiadas: los grafos bouquet-perfectos, grafos cuyo bouquet transversal mínimo es igual al conjunto máximo de cliques aisladas para todo subgrafo inducido. Se pretende encontrar resultados similares a los presentados en este trabajo. Por último, se puede estudiar el poliedro $\{x \in \Re^n / A \cdot x \geq 1, x \geq 0\}$ buscando resultados análogos a los que aparecen en esta tesis.

Bibliografía

[1] T. Andrae, C. Flotow, *On covering all cliques of chordal graphs*, Discrete Math. **149**, (1996) 299–302.

[2] T. Andrae, M. Schughart, Z. Tuza, *Clique Transversal set of line graphs and complements of line graphs*, Discrete. Math **88** (1991) 11–20.

[3] T. Andrae, *Covering all cliques of a graph*, Discrete Math. **86** (1990) 117–126.

[4] V. Balanchandhran, P. Nagavamsi, C. Pandu Ragan. *clique-transversal and clique-independent on comparability graphs* Information Processing Letter **58** (1996), 299–302.

[5] V. Barré, J. Fouquet, *On minimal imperfevt graphs with no induced* P_5,manuscript, Université du Maine, Le Mans. (1996).

[6] C. Berge, *Les problès de colotations en th'eorie des graphes*,Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, **9** (1960)67–75.

[7] C. Berge, *Färbung von, deren sämtichle bzw. deren ungerade Kreise starr sind*, Wiss. Zeitschr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, **10** (1961) 114–115.

[8] F. Bonomo, *Sobre grafos balanceados y complejidad computacional de problemas asociados a la teoría de grafos perfectos*, Tesis de Licenciatura en curso.

[9] A. Brandstat, V. Lee y J. Spinrad, *Graphs classes: a survey*, volume **3** of SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Philadelphia, (1999).

[10] M.A. Buckyngham, M.C. Golumbic, *Partitionable graphs, circle graphs and the strong perfect graph conjeture*, Ann. Discrete Math. **44** (1983), 45–54.

[11] M.A. Buckyngham, M.C. Golumbic, *Recent results on the strong perfect graph conjeture*, Ann. Discrete Math. **20** (1984), 75–82.

[12] L. Cai. D,G. Corneil, *A generalization of perfect graphs-i-perfcect graphs* J. Graph TheoryMath. **23** (1996), 87–103.

[13] K.B. Cameron, J.Edmons *Lambda descomposition*, J. Graph Theory **26** (1997), 9–16.

[14] M. Conforty, G. Cornuèjols, K.Vuskovic, *Square-Free Perfect Graphs*, manuscript, (2001).

[15] M. Conforti, *$K_4 - e$ free grphs and star cutsets*, Lecture Notes in Math. **1403** (1989), 236–253.

[16] D.M. Cvetkovic, M. Doob, I. Gutman, A. Torgasv, *Recenly Results in Rheory of Graph Spectra*, Discrete Math **36**, North Holland, Amsterdam (1988).

[17] Chvátal, *On certain polytopes associated with graphs*, J. Combin. Theory B **18**, (1975) 138–144.

[18] V. Chvátal, N. Sbihi, *Bull-free berge graphs are perfect*, Graph Combin. **3** (1987), 127–139.

[19] P.F.Dietz, *Graph Descompositions. A Study in Infinite graph Theory*, Clarendon Press, Oxford (1990).

[20] G.Durán, M.Chin Lin, J.L. Szwarcfiter, *On clique-transversal and clique-independent sets*, submitted.

[21] F. Escalante, *Uber iterrierte Clique-Graphen.*, Abhandlungender Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg **39** (1973) 59–68.

[22] D.R. Fulkerson *Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra*, Math. Programming **1** (1971).

[23] D.R. Fulkerson *Anti-blocking pairs of polyhedra*, J. Combin Theory B **12** (1972), 50–71.

[24] D.R. Fulkerson *On the perfect graph theorem*, Math. Programming T.C Hu, S.M. Robinson, eds., Academic Press, New york (1973) 69–76..

[25] D.R. Fulkerson, *The perfect graph conjeture and pluperfect graph theorem*, 2nd Chapel Hill Conf. on Combin. Math. and its Apl, (1969) 171–175.

[26] D.R. Fulkerson, *Blocking and atiblocking pairs of polihedra*, Math. Programming **1** (1971) 168–194.

[27] D.R. Fulkerson, *Atiblocking polihedra*, J.Combin. Theory, **12** (1972) 50–71.

[28] M. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs.*Academic Press (1980) New York. Sección **3,4**

[29] C.M. Grinstad *The strong perfect graph conjeture for a class of graphs*, Ph.D. thesis, UCLA **25** (1978).

[30] V. Guruswami, C. Pandu Ragan, *Algorithmic aspects of clique-transversal and clique-independent sets*, Discrete Applied Mathematics, **100** (2000), 183–202.

[31] V.A. Gurvich, S. Hougardy, *Partitionable graphs*, manuscript, (1996).

[32] A. Gyarfas, *Problems from the world surrounding perfect graphs*, Zastosow Mat **19** (1987), 413–441.

[33] W.L. Hsu, *How to color claw-free perfect graphs*, Ann. discrete Math. **11** (1981), 189–197.

[34] C.W.H. Lam, S. Swiercz, L.Thiel, E.Regener, *A computer search for* (α, ω)*-graphs*, Congres. Numer. **27** (1979), 285–289.

[35] V. B. Le, *Perfect k-line graphs and k-total graphs*,J. Graph theory **17** (1993), 65–73.

[36] L. Lovász, *Normal hipergrphs and the perfect graph conjeture*, Discrete Math, **2** (1972) 253–267.

[37] L. Lovász, *A caracterization of perfect graphs the perfcect graph conjeture*, J. Combin. Theory, B **132** (1972) 95–98.

[38] F. Maffray, M. Preissmann *Perfect graphs with no* P_5 *and no* K_5, Graphs Combin. **10** (1994), 179–184.

[39] F. Maffray, M. Preissmann *Split-neighbourhood graphs and the strong perfect graph conjeture*, J. Combin Theory B **63** (1995), 294–309.

[40] T.A. McKee F. R. McMorris, *Topics in Intersection Graph Theory*, volume **2** of Monographs on Discrete Mathematics and Applications. SIAM, Philadelphia, (1999).

[41] H. Meyniel, *A new property of critical imperfect graphs and some consequences*, European J. Combin. **8** (1987), 313–316.

[42] S. Olariu, *On the strong perfcet graph conjeture*,J. Graph Theory. **12** (1988), 169–176.

[43] K.R.Parthasarathy, G.Ravindra, *The strong perfect graph conjeture is true for* $K_{1,3} - free$ *graphs*, J. Combin. theory. **21** (1976), 212–223.

[44] E. Prisner, *Hereditary Clique-Helly Graphs*, Journal of Combin. Math. and Combin. Computing, **14** (1993) 216–220.

[45] E. Prisner, *Graphs Dynamics*, Pitman Research Notes in Mathematics **338**, Longman (1995).

[46] H.J. Prömel, A.Steger *Almost all berge graph are perfect*, Combin, Probab. Comput. **1** (1992), 53–79.

[47] S.B Rao, G. Ravindra *A caracterizatin of perfect total graph*, J. Math Phys. Sci **11** (1977), 25–26.

[48] A. Sassano, *Chair free Berge graphs are perfect*, Graphs Combin. **13** (1997), 369–395.

[49] D. Seinsche, *On a property of the class of n-colorable graphs*, J. Combin. Theory B, **16** (1974), 191–193.

[50] J. Spinrad A. Brandstadt, V. Le, *Graph classes: a survey*, SIAM monographs on discrete mathematics and applications, 1999.

[51] J.P. Spinrad, J.L. Jhonson *Brittle, bipolarizable, y P_4-simplicial graph recognition*, manuscript. (1999).

[52] L. Sun, *Two classes of perfect graphs*, J. Combin. Theory B. **53** (1991), 273–291.

[53] J. Szwarcfiter. Comunicación Personal,(2001).

[54] A.C. Tucker, *Coloring a family of circular arcs*, SIAM Journal Appl. Math. **29** (1975), 493–502.

[55] A.C. Tucker, *Coloring* $(K_4 - e) - free$ *graphs*, J. Combin Theory B. **42** (1987), 313–318.

[56] A.C. Tucker, *The strong perfect graph conjeture for planar graphs* , Canad. J. Math. **25** (1973), 103–114.

[57] A.C. Tucker, *The validity of the strong perfect graph cojecture for K_4-free graphs*, Ann. Discrete Math. **21** (1984), 149–158.

[58] A.C. Tucker, *A reduction procedure for coloring perfect K_4-free graphs*, J. Combin Theory B. **43** (1987), 151–172.

[59] A.C. Tucker, *Critical perfect graphs and perfect 3-chromatic*, J. Combin Theory B. **23** (1977), 143–149.

[60] S, Wagon *A bound on the chromatic number of graphs without certain induced subgraphs*, J. Combin Theory B **29** (1980), 345–346.

[61] E.S. Wolk, *The comparability graph of a tree*, Proc. Amer. Math Soc., **16** (1965), 17–20.