Sobre grafos circulares y sin diamantes

Juan Manuel Barrionuevo
jbarrio@dc.uba.ar

Aureliano Calvo
ecalvo@dc.uba.ar

Director: Dr. Guillermo Durán
Codirector: Dr. Fábio Protti

Departamento de Computación.
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Universidad de Buenos Aires.

7 de abril de 2004

Agradecimientos de Juan Manuel

A mis viejos, Celia y Oscar, por buscar siempre lo mejor para mí, por educarme como lo hicieron y por apoyarme en los proyectos que he emprendido. Los quiero mucho.

A Adolfito, que también se preocupa por mí y me apoya con mis proyectos.

A mis compañeros que me dio la facultad. Gracias a ustedes, fue un gusto cursar todos estos años de carrera.

A mis amigos del fútbol, con quien he compartido buenos momentos y a los que espero ver pronto.

A mis compañeros de Datatransfer, por haber creado un buen ambiente en donde trabajar, y a la empresa, por permitirnos realizar algunos viajes importantes para terminar la tesis.

A toda la gente que colaboró para que esta tesis salga adelante.

A Fábio, por su buena onda y por sus consejos y recomendaciones que mejoraron la tesis.

A Willy, por guiarnos y tenernos paciencia durante estos años, y por darme ánimo para no abandonar cuando menos ganas tuve de seguir.

A Aure. Nunca podría haber terminado la tesis solo; el hacerla con vos, más allá de todas las vueltas que dimos, fue un gusto. Gracias por tu paciencia, y por tu amistad.

Y especialmente a mi amor, Flavia. Gracias por darme ánimo para terminar esta tesis, y por apoyarme en todas las cosas que hago, en las buenas y en las malas. Te amo.

Agradecimientos de Aureliano

A mis viejos, Diana y Eduardo por bancarme todos estos 27 años y soportar tanto tiempo en el que estoy “casi recibido”.

A mis hermanos, Alejandra y Aníbal, que a pesar de todas las peleas siempre estuvieron ahí cuando los necesité.

A Ernesto, un gran amigo desde ya hace casi 15 años, con el que pasamos miles de cosas, tristes y alegres, sin el cual esta tesis no sería posible, ya que nos proveyó, en su casa el servidor de CVS en el cuál guardamos la tesis.

A Enrique, otro gran amigo, de esos que son para siempre. Tengo que agradecerle especialmente la paciencia que tuvo para explicarme cómo usar el LaTeXpara escribir esta tesis.

A Flavia, que lo banca a Juan Ma en las buenas y en las malas y que lo convenció de que terminara la tesis.

A Pablo, Flavia, Ernesto, Leo y todos mis amigos y ex-compañeros de DT, que compartieron conmigo muchas y largas horas y que vieron crecer esta tesis de licenciatura.

A mis amigos de la Cía. de las Luces, los que conozco desde hace 10 años y los que conocí ahora. Sin ustedes mi vida sería mucho menos armoniosa.

A mis amigos, changos y compañeros de juergas. Los que están y los que se fueron. A Mariano, Cristian, Sebastián, Andrés, Alejandro y Rubén. Muchas gracias por bancarse las aburridísimas explicaciones de la tesis acompañadas con alguna copa.

A mis amigos y amigas de tango, con quienes comparto el placer de aprender a bailar esa hermosa música.

A mis amigos y amigas de hockey sub-acuático, sepan que aunque me haya retirado, siempre estarán en mi corazón.

A Pablo, José, Maxi y David, que siguen siendo mis amigos aún después de la separación de Anima.

A Flavia y Marina, por su buena onda y sus consejos, que me ayudaron a seguir haciendo la tesis durante todo este tiempo.

A Agustín, que nos pasó el WinEdt y nos dio el LaTeXde su tesis.

Por último, pero no por eso menos importante, quiero agradecerle a la gente que trabajó directamente conmigo para hacer esta tesis.

A Fabio, por su buena onda, su invaluable ayuda y sus consejos.

A Willy, por bancarse 2 años seguidos de tesis, las idas y vueltas, las interrupciones y los atrasos, sin que por ello mermaran su ayuda y su soporte. Que estemos terminando es sin lugar a dudas en gran parte mérito tuyo.

Y ultimísimo, el más importante de todos. A Juan Manuel, sin vos no creo que hubiera llegado hasta acá. Gracias por aguantar 2 años seguidos de trabajo, las idas y las vueltas, las largas horas de reuniones. Creo y espero seamos grandes amigos el resto de nuestras vidas.

Por supuesto que estos agradecimientos no estarían completos sin el ya clásico “a todos los que olvidé mencionar”, que por ser trillado no deja de ser menos cierto.

Resumen

Los grafos circulares son los grafos intersección de cuerdas dentro de un círculo. Los grafos sin diamantes son los grafos que no tienen un diamante como subgrafo inducido. Estas dos clases de grafos han sido muy estudiadas a partir de la década del '70 y tienen diversas aplicaciones. Además, varios problemas NP-completos tienen solución eficiente en grafos pertenecientes a algunas de sus subclases.

Recientemente, fue planteada una conjetura que caracteriza a la clase de los grafos circulares Helly como aquellos que son circulares y sin diamantes. Trabajaremos en esta tesis en el estudio de algunas propiedades que pueden ayudar en la demostración de esta conjetura. Particularmente, estudiamos un método para conseguir representaciones de grafos Helly circulares en porciones arbitrariamente pequeñas del círculo.

Implementamos un algoritmo polinomial de reconocimiento de grafos circulares, con el objetivo de poder desarrollar una herramienta que permita visualizar las representaciones en modelos de cuerdas de estos grafos. Hasta nuestro conocimiento existen varios artículos de reconocimiento polinomial de grafos circulares pero ninguno de ellos ha sido implementado. Estos desarrollos son hechos en el lenguaje de programación Java, y tienen como objetivo continuar con la construcción de un paquete de algoritmos para acelerar las investigaciones en estas clases de grafos.

Además, estudiamos una extensión del operador clique de un grafo que nos permite obtener más información sobre el grafo original una vez aplicada esta operación. En particular, estudiamos propiedades de este operador sobre los grafos sin diamantes.

Como último punto, sacamos conclusiones sobre la tesis y la carrera completa y proponemos futuros trabajos extendiendo lo aquí desarrollado.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

A continuación, se describe la forma en que está organizada esta tesis.

El hilo conductor de esta tesis es la conjetura del diamante (publicada en [7]) que dice que todo grafo circular sin diamantes tiene una representación circular Helly. Por eso estudiamos cómo reconocer grafos circulares, cómo operar con representaciones circular Helly de un grafo y propiedades de los grafos sin diamantes.

En este capítulo, se presentan una serie de definiciones básicas en teoría de grafos y un resumen de la notación a usar.

En el capítulo 2 se hacen dos avances independientes en la investigación de los grafos circulares. En la sección 2.2 estudiamos uno de los primeros algoritmos de reconocimiento de grafos circulares, y llevamos a cabo la primera implementación, hasta nuestro conocimiento, de un algoritmo de complejidad polinomial que resuelva el reconocimiento de grafos circulares. El algoritmo implementado fue propuesto por [21] en 1985.

En la sección 2.3, presentamos el concepto de camino reducible, algunas de sus propiedades, y lo usamos para definir un método para comprimir representaciones de grafos circular Helly.

En la sección 2.4, suponiendo ciertas condiciones sobre los grafos circular Helly que conjeturamos ciertas, demostramos que toda representación de un grafo circular Helly es compresible usando el método definido en la sección anterior.

En el capítulo 3, se presenta una extensión del operador $K(G)$ para los grafos sin diamantes, que consiste en decorar cada vértice de $K(G)$ con un número que representa la cantidad de vértices que tiene la clique en el grafo original. Esta extensión permite además definir una biyección natural entre los grafos sin diamantes y el conjunto de los grafos que resultan de aplicar el operador recién definido a ellos.

En el capítulo 4, presentamos algunas conclusiones de este trabajo y de nuestra carrera, junto con algunas ideas para la investigación en estos temas, particularmente en relación con la conjetura del diamante.

Los resultados de esta tesis fueron presentados en la X-ELAVIO que se realizó en febrero del 2004 en Montevideo (Uruguay) ([1]).

1.1. Definiciones básicas y notación

Denotamos un grafo G por un par $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ representa un conjunto finito de vértices, y $E(G)$, un conjunto de pares no ordenados de vértices de G, llamados aristas. Los vértices también reciben el nombre de nodos. Usaremos indistintamente estos términos.

Un vértice v es adyacente a otro vértice w en G si $(v, w) \in E(G)$. Decimos que v y w son los extremos de la arista. El vecindario de un vértice v es el conjunto $N(v)$ que consiste de todos los vértices adyacentes a v.

Un vértice v es universal cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$. Un vértice v es aislado cuando $N(v) = \emptyset$. El grado de un vértice v, denotado por $d(v)$, es la cardinalidad del conjunto $N(v)$.

El complemento de un grafo G, denotado por $\overline{G}$, es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices de G y tal que dos vértices distintos son adyacentes en $\overline{G}$ si y sólo si no son adyacentes en G.

Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si $V(H) = V(G)$, decimos que H es un subgrafo generador de G. Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de G inducido por X es el subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en X.

Dos grafos G y H son isomorfos si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que conserva las adyacencias. En este caso, notamos $G = H$.

Un camino en un grafo G es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, ..., v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, para $1 \leq i \leq k-1$. Una cuerda en P es una arista que une dos vértices no consecutivos de P.

Un circuito en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, ..., v_k$, no necesariamente distintos, donde $v_1 = v_k$, y $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, para $1 \leq i \leq k-1$. Si no se repiten vértices, el circuito se llamará simple.

Un ciclo en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, ..., v_k, v_{k+1}$, donde $v_1, ..., v_k$ es un camino, v_1 es adyacente a v_k, $v_1 = v_{k+1}$ y $k \geq 3$. Una cuerda en C es cualquier cuerda del camino $v_1, ..., v_k$. Si los vértices que conecta la cuerda en C están a distancia 2, decimos que la cuerda es corta. Un ciclo es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos C_k al ciclo inducido por k vértices (C_3 es también llamado triángulo).

Un conjunto S es maximal (minimal) en relación a una determinada propiedad P si satisface P, y todo conjunto S' que contiene propiamente a S (que está contenido propiamente en S) no satisface P.

Un grafo G es conexo si para todo par de vértices distintos v y w de G, existe un camino de v a w.

Un grafo G es completo si cualquier par de vértices distintos de G son adyacentes. Llamamos K_n al grafo completo con n vértices.

Un conjunto de vértices M de un grafo G es un subgrafo completo si el subgrafo inducido por M es completo. Una clique es un subgrafo completo maximal de G. Una arista se dice multiclical si está contenida en por lo menos dos cliques distintas. Diremos que una clique está "aislada" si constituye por sí misma una componente conexa del grafo.

Un vértice simplicial es aquel que pertenece a una sola clique. Llamaremos $cmpl(G)$ al conjunto de todos los vértices no simpliciales de G.

Denotaremos como $C_G(v)$ al conjunto de las cliques de G a las que pertenece el vértice v.

Un grafo G es un diamante si es isomorfo a $K_4 - \{e\}$, para e cualquier arista de K_4. Un grafo es una rueda W_j si es isomorfo a un ciclo inducido C_j al que se le agrega un vértice universal.

Decimos que G es un digrafo, o un grafo dirigido, si las aristas están dadas por un conjunto de pares ordenados de vétrtices. Nos referiremos a las aristas de un digrafo como pares ordenados o semiaristas.

Un concepto muy usado a lo largo de este trabajo es el de la propiedad de Helly. Una familia de subconjuntos S satisface la propiedad de Helly cuando toda subfamilia de S consistente en subconjuntos que se intersecan de a pares tiene intersección no vacía.

Una propiedad en grafos es hereditaria cuando se verifica que si un grafo tiene la propiedad, entonces cualquier subgrafo inducido de él también la tiene.

Definiciones no dadas aquí pueden encontrarse en [2], [6], [13], [16] o [19].

1.2. Clases de grafos

Consideremos una familia finita de conjuntos no vacíos. El grafo intersección de esta familia es obtenido representando cada conjunto por un vértice, conectando dos vértices por una arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan. Es sencillo probar que todo grafo es un grafo intersección de alguna familia, ya que se puede representar cada nodo como el conjunto de las aristas que lo unen con otros nodos. El grafo overlap de esta familia se obtiene representando cada conjunto por un vértice, conectando dos vértices por una arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan pero ninguno de los dos está incluido en el otro (diremos en este caso que los conjuntos se superponen). Es fácil también demostrar que todo grafo es un grafo overlap de alguna familia.

Los grafos intersección han recibido mucha atención en el estudio de teoría algorítmica de grafos y sus aplicaciones ([13], [20]). Algunas clases muy estudiadas de grafos intersección son los grafos de intervalos, los cordales, los arco-circulares, los circulares, los de permutación, y los grafos clique.

Un grafo arco-circular es el grafo intersección de arcos alrededor de un círculo.

Un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo.

Un grafo de intervalos es el grafo intersección de intervalos en la recta real.

Un grafo G es cordal (o triangulado) si G no contiene al ciclo inducido C_k como subgrafo inducido, para $k \geq 4$.

Un grafo overlap de intervalos (conocidos en la literatura como grafos overlap) es el grafo overlap de intervalos en la recta real. Está probado que son equivalentes a los grafos circulares [13].

Un grafo es clique-Helly si sus cliques satisfacen la propiedad de Helly.

Llamaremos SD ("sin diamantes") a la clase de los grafos que no contienen al diamante como subgrafo inducido.

Dado un grafo G, se define el operador $K(G)$ como el grafo de intersección de las cliques de G. Por extensión, dada una clase de grafos $\mathcal{G}$, se define $K(\mathcal{G})$ como el conjunto que se obtiene al aplicar $K(G)$ a todos los grafos G de la clase $\mathcal{G}$. Por simplicidad, denominaremos $K^2(G)$ a $K(K(G))$.

Una completa recopilación sobre clases de grafos aparece en [4].

Capítulo 2

Grafos circulares

2.1. Preliminares

Un grafo G es circular si existe un conjunto de cuerdas $\mathcal{L}$ (que llamamos modelo) dentro de un círculo y una correspondencia 1-1 entre vértices de G y cuerdas de $\mathcal{L}$, de manera que dos vértices distintos son adyacentes si y sólo si las cuerdas correspondientes se cortan. Es decir, un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que ningún par de cuerdas tiene un extremo común.

Las siguientes son algunas subclases interesantes de los grafos circulares, estudiadas en [6]:

1. Helly: un grafo G es circular Helly (HC) si existe un modelo de cuerdas para G, de manera que las cuerdas satisfagan la propiedad de Helly.

2. Clique-Helly: un grafo G es circular clique-Helly (CHC) si G es circular y clique-Helly.

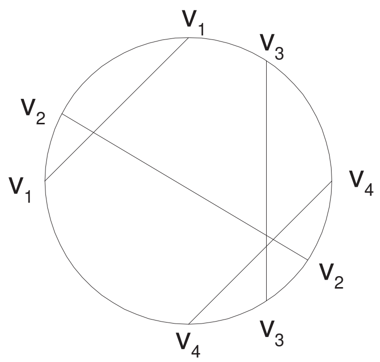
3. Unitarios: un grafo G es circular unitario (UC) si existe un modelo de cuerdas para G, de manera que todas las cuerdas tengan la misma longitud.

2.1.1. Otras caracterizaciones de los grafos circulares

Ya hemos visto que los grafos circulares son los grafos de intersección de cuerdas dentro de un círculo. Además de esta definición existen otras clases de grafos que son equivalentes a los circulares.

La primera de estas clases es la de los grafos overlap de intervalos. Un grafo G es de overlap de intervalos si sus vértices pueden ser puestos en correspondencia 1-1 con una familia de intervalos en una recta de manera que dos vértices son adyacentes en G si y sólo si sus correspondientes intervalos se superponen (esto es, tienen intersección no vacía pero ninguno está propiamente contenido en el otro). En [11] se muestra la equivalencia de estas clases.

Otra clase equivalente a la de los grafos circulares es la de los grafos de alternancia. Consideremos una palabra p tal que cada letra de p está exactamente dos veces. Una alternancia de p es un par vw de letras distintas tal que encontramos alternativamente $...v...w...v...w...$ cuando leemos p. El grafo de alternancia $A(p)$



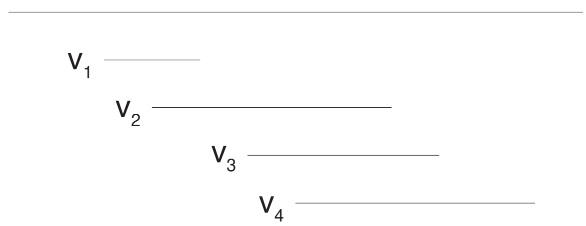


Figura 2.1: Representaciones circular y de overlap de intervalos de un grafo

es el grafo cuyos vértices son las letras de p y cuyas aristas son las alternancias de p.

Se puede ver fácilmente que esta clase también es equivalente a los grafos circulares. Si tenemos un grafo de alternancia $A(p)$ y asociamos cada letra de p con un vértice de G podemos obtener una representación de intervalos de un grafo overlap haciendo corresponder a cada letra con los extremos de cada intervalo y ordenando los extremos de los intervalos según el orden de las letras en p. Si había en $A(p)$ una alternancia vw entonces en p tenemos $...v...w...v...w...$ por los extremos de los intervalos también aparecen en ese orden. Entonces, los intervalos asociados a v y w se intersecan y ambos vértices son adyacentes en el grafo de intervalos. Por otra parte, si no hay una alternancia entre v y w en $A(p)$ es porque o bien las dos apariciones de una de las letras están entre las de la otra, o bien porque ambas apariciones de una están después de la segunda aparición de la otra. En el primer caso, y haciendo el mismo mapeo que antes, tenemos en la representación de intervalos, un intervalo incluído dentro del otro, mientras que en el segundo caso tenemos un intervalo a continuación del otro, sin intersección común. En ambos casos, los intervalos no se solapan, y los vértices asociados al grafo overlap de intervalos no son adyacentes.

Esta última equivalencia nos da una propiedad importante de estas clases de grafos. A partir de un grafo circular se puede obtener un orden de sus vértices asociado a la representación circular. Para ello basta con considerar un punto cualquiera de la circunferencia (que no sea el extremo de una cuerda) en la representación circular y listar los extremos de cuerdas que se encuentran conforme se recorre la circunferencia en sentido horario. De esta forma, dos vértices en G son adyacentes si al listar sus extremos de la manera antes descripta hay una alternancia entre ellos. Cabe destacar que si un grafo circular tiene n vértices, dada una representación del mismo, existen $2 * n$ órdenes posibles, dependiendo el punto donde se inicie el recorrido.

2.2. Reconocimiento de grafos circulares. Algoritmo de Naji

En esta sección presentamos un algoritmo conocido para reconocimiento de grafos circulares, y una extensión del mismo para obtener la representación circular asociada. Existen algoritmos igual o más eficientes, por ejemplo, los publicados en [3], [10], y [22], pero ésta es la primera implementación conocida de un algoritmo de reconocimiento de grafos circulares. La implementación hecha, aparte de reconocer los grafos circulares, en caso de que lo sean, propone una representación circular para el mismo.

Este algoritmo, publicado en [21], plantea un sistema de ecuaciones lineales en Z_2. El sistema tiene solución si y sólo si el grafo es circular. Este algoritmo funciona sólo para grafos conexos, aunque lo extendimos fácilmente a grafos no conexos aplicándolo a cada componente conexa.

Si el grafo tiene n vértices, el sistema planteado tiene n^2 variables de la forma $\beta(x, y)$ para cada par de vértices (x, y) del grafo. Como el sistema se resuelve en Z_2, cada variable puede tomar los valores 0 ó 1.

El sistema de ecuaciones planteado es:

$$\begin{cases} \beta(x,y) + \beta(y,x) = 1 & \forall\{x,y\} \in E(G) \\ \beta(x,y) + \beta(x,z) = 0 & \forall\{x,y\},\{x,z\} \in E(\overline{G}), \{y,z\} \in E(G) \\ \beta(x,y) + \beta(x,z) + \beta(y,z) + \beta(z,y) = 1 & \forall\{x,y\},\{x,z\} \in E(G), \{y,z\} \in E(\overline{G}) \end{cases}$$

Lo interesante, es que se puede utilizar la información de la solución del sistema de ecuaciones para construir una representación de overlap de intervalos para el grafo, ya que toda solución induce un único orden de los extremos de las cuerdas. Cuando el sistema tiene solución es posible definir un orden parcial M entre los vértices adyacentes, y un marcado S de los pares de vértices no adyacentes. Con esto último se puede determinar si dos vértices se corresponden con intervalos disjuntos o si se corresponden con intervalos incluidos uno en otro.

El orden parcial M de los vértices de G se puede definir según:

$(x, y) \in M \Leftrightarrow \{x, y\} \in E(G) \wedge \beta(x, y) = 0$

y para el complemento de G, se define el marcado S según:

$S(x, y) = + \Leftrightarrow \beta(x, y) = 0$ y

$S(x, y) = - \Leftrightarrow \beta(x, y) = 1$

para toda par ordenado $(x, y) \in \overline{G}$

Considerando la representación de overlap de intervalos, la interpretación de esto es que si $S(x, y) = -$ entonces el intervalo asociado a y está incluido en el asociado a x, y si $S(x, y) = +$ entonces no está incluido. Por lo tanto, no puede ser que para un par de vértices (x, y) valga que $S(x, y) = -$ y $S(y, x) = -$

A partir de esto, definimos una relación de orden parcial I entre los vértices de G, por la cual $(x, y) \in I \Leftrightarrow$ el intervalo asociado a x está incluido propiamente en el intervalo asociado a y.

El algoritmo publicado en [21], plantea que el grafo es circular si y sólo si el sistema de ecuaciones lineales es compatible. Pero no explicita la forma de obtener la representación circular a partir de una solución al sistema.

De todas maneras, en el desarrollo de la demostración del mismo, están los lineamientos de cómo armar la representación. En esto nos basamos para hacer el desarrollo del resto de la sección.

Definición 2.1. *Con $h(x)$ denotaremos a la primera aparición de x en la alternancia que define al grafo G. Análogamente, $t(x)$ es la segunda aparición de x. También se los puede ver como cabeza y cola, respectivamente, del intervalo asociado a x en la representación de overlap de intervalos de G.*

Entonces, para determinar la representación de overlap de intervalos basta con considerar las distintas posibilidades que pueden ocurrir para los intervalos asociados a un par de nodos:

1. un intervalo x está incluido propiamente dentro de otro y: en este caso, el par (x, y) está en la relación I, y tenemos que $h(y) < h(x) < t(x) < t(y)$
2. un intervalo x está en overlap con otro intervalo y (esto es, intersectan pero ninguno está incluido dentro de otro). En este caso, como los vértices son adyacentes, o bien el par (x, y) o bien el par (y, x) está en la relación M. Entonces, si $(x, y) \in M$ tenemos $h(x) < h(y) < t(x) < t(y)$
3. los intervalos x e y son disjuntos. En este caso, tenemos que $h(x) < t(x) < h(y) < t(y)$ o bien $h(y) < t(y) < h(x) < t(x)$. Como el algoritmo trabaja con grafos conexos, esto va a determinar que sólo valga alguno de los dos órdenes posibles, en función de las demás adyacencias en G.

Para obtener la representación, necesitamos definir, a partir de la solución del sistema de ecuaciones, un orden total entre los extremos de los vértices de G. Con las siguientes reglas, veremos que se puede obtener tal orden:

1. $\forall x : h(x) < t(x)$
2. $\forall (x, y) \in M : h(x) < h(y) \land h(y) < t(x) \land t(x) < t(y)$
3. $\forall (x, y) \in I : h(y) < h(x) \land h(x) < t(x) \land t(x) < t(y)$
4. $\forall (x, y) \in E(\overline{G})/(x, y) \notin I \land (y, x) \notin I : h(x) < t(y) \Rightarrow t(x) < h(y)$

Las reglas 1 a 3 sirven sólo para inicializar la relación de orden. Calculando la clausura de $(M \cup I)$ y aplicando la regla 4 en cada paso de la clausura, se obtiene el orden total, y con ello, la representación de overlap de intervalos de G.

2.2.1. Algoritmo para calcular la representación

Para calcular la representación, asumimos que ya fue resuelto el sistema de ecuaciones y se obtuvo una solución para el mismo.

Las entradas para este algoritmo son el grafo G, la relación M y la relación I definidas más arriba a partir de la solución al sistema de ecuaciones. La salida del algoritmo es una representación de overlap de intervalos de G.

Paso de inicialización. Se calculan las reglas 1 a 3.

order $\leftarrow \{\}$
for all $v \in V(G)$ **do**
  order $\leftarrow$ *order* $\cup \{(h(v), t(v))\}$
end for
for all $v \neq v' \in V(G)$ **do**
  if $(v, v') \in M$ **then**

```
      order ← order ∪ {(h(v), h(v')), (h(v'), t(v)), (t(v), t(v'))}
    else if (v, v') ∈ I then
      order ← order ∪ {(h(v'), h(v)), (t(v), t(v'))}
    end if
  end for
```

Y después se aplica la regla 4 y calcula la clausura del orden en forma simultánea.

```
  modified ← true
  while modified do
    modified ← false
    for all i ≠ j ∈ V(G) do
      if (i, j) ∉ E ∧ i ⊄ j ∧ j ⊄ i ∧ h(i) < t(j) ∧ ¬t(i) < h(j) then
        order ← order ∪ {(t(i), h(j))}
        modified ← true
      end if
    end for
    for all i, j, k ∈ Heads(G) ∪ Tails(G) do
      if i < j ∧ j < k ∧ ¬i < k then
        order ← order ∪ {(i, k)}
        modified ← true
      end if
    end for
  end while
```

Teorema 2.1. *La clausura obtenida por el algoritmo anterior induce un orden total de los extremos de los vértices de G.*

Demostración. Como el grafo es conexo, para todo par de vértices existe un camino que los une. Vamos a ver que los extremos de todo par de vértices son comparables. La demostración es por inducción en la longitud del camino mínimo entre los vértices.

Caso base:

Corresponde a los caminos mínimos de longitud 1, o sea, a vértices adyacentes. Pero si dos vértices x e y son adyacentes, entonces alguno entre (x, y) y (y, x) pertenecen al orden parcial M definido a partir de la solución del sistema.

Si $(x, y) \in M$ tenemos por definición de M que $h(x) < h(y) < t(x) < t(y)$. De la misma forma, si $(y, x) \in M$ vale que $h(y) < h(x) < t(y) < t(x)$. En cualquiera de los dos casos, ambos extremos son comparables.

Además, por el paso de inicialización del algoritmo, también sabemos que si $(x, y) \in I$ entonces x y y también son comparables, siendo $h(y) < h(x) < t(x) < t(y)$.

Caso inductivo:

Supongamos como hipótesis inductiva que sabemos comparar los extremos de dos vértices a distancia menor o igual que k.

Supongamos ahora que queremos comparar dos vértices a y b, a distancia $k+1$. Sea $C = (a, v_1, v_2, ..., v_k, b)$ un camino mínimo entre a y b. Como estamos en el caso inductivo, sabemos que el camino tiene longitud ≥ 2, y que por lo tanto $k \geq 1$. Entonces, por el principio de optimalidad, el camino $(a, v_1, v_2, ..., v_k)$ es mínimo entre a y v_k.

Por hipótesis inductiva, sabemos que a y v_k son comparables. Esto puede darse de 6 maneras distintas únicamente:

1. $(a, v_k) \in M$
2. $(v_k, a) \in M$
3. $(a, v_k) \in I$
4. $(v_k, a) \in I$
5. a y v_k disjuntos, a antes que v_k
6. a y v_k disjuntos, v_k antes que a

Además sabemos que $(v_k, b) \in E(G)$ por lo que debe valer alguna de $(v_k, b) \in M$ o $(b, v_k) \in M$. Entonces analicemos los distintos casos que se pueden dar. Por una cuestión de simetría se puede ver que basta con analizar uno de los dos casos entre $(v_k, b) \in M$ y $(b, v_k) \in M$, pues las demostraciones de los casos son análogas, intercambiando signos y cabezas por colas. Entonces analizaremos sólo los 6 casos para $(v_k, b) \in M$

1. $(a, v_k) \in M$

   Como $(a, v_k) \in M$ sabemos que $h(a) < h(v_k) < t(a) < t(v_k)$ y como $(v_k, b) \in M$ tenemos que $h(v_k) < h(b) < t(v_k) < t(b)$. Aplicando la propiedad transitiva sobre esto, podemos deducir que $h(a) < t(b)$ aunque no sabemos comparar los otros extremos de a y b. Sin embargo, si fuera $(a, b) \in I$ o $(b, a) \in I$ ya serían comparables por el caso base. Entonces supongamos que $(a, b) \notin I \wedge (b, a) \notin I$. Como $(a, b) \notin E(G)$ porque si no serían adyacentes y no estaríamos en el caso inductivo de caminos mínimos de longitud > 1, y sabiendo lo anterior, podemos aplicar la regla 4, y concluir que $t(a) < h(b)$. Luego, aplicando propiedad transitiva, concluimos que $h(a) < t(a) < h(b) < t(b)$ y ambos vértices son comparables.

2. $(a, v_k) \in M$

   Como $(v_k, a) \in M$ sabemos que $h(v_k) < h(a) < t(v_k) < t(a)$ y como $(v_k, b) \in M$ tenemos que $h(v_k) < h(b) < t(v_k) < t(b)$. Entonces, el punto $t(v_k)$ pertenece tanto al intervalo que corresponde a a como al de b. Entonces la intersección de estos intervalos en la representación es no vacía. Como sabemos que $(a, b) \notin E(G)$ solo puede ser que uno de los intervalos esté incluido propiamente en el otro. Pero en este caso, $(a, b) \in I \vee (b, a) \in I$. Y de ser así, ya serían comparables desde el paso de inicialización del algoritmo, en que se incluye la información de I. Absurdo, por lo tanto no se puede dar este caso en el paso inductivo.

3. $(a, v_k) \in I$

   Como $(a, v_k) \in I$ sabemos que $h(v_k) < h(a) < t(a) < t(v_k)$ y como $(v_k, b) \in M$ tenemos que $h(v_k) < h(b) < t(v_k) < t(b)$. Entonces, aplicando propiedad transitiva, se deduce que $h(a) < t(v_k) < t(b)$ por lo que vale $h(a) < t(b)$.

   Si fuera $(a, b) \in I$ entonces ya serían comparables desde el paso de inicialización. Entonces, supongamos que $(a, b) \notin I$. Como $h(a) < t(b)$ tenemos que $(b, a) \notin I$. Sabiendo que ningún intervalo está incluido en el otro, que $(a, b) \notin E(G)$ y que $h(a) < t(b)$, por la regla 4 se deduce que $t(a) < h(b)$. Entonces, aplicando la propiedad transitiva, tenemos $h(a) < t(a) < h(b) < t(b)$ y son comparables.

4. $(v_k, a) \in I$

   Como $(v_k, a) \in I$ sabemos que $h(a) < h(v_k) < t(v_k) < t(a)$ y como $(v_k, b) \in M$ tenemos que $h(v_k) < h(b) < t(v_k) < t(b)$. Aplicando propiedad transitiva, se deduce que $h(a) < h(v_k) < h(b) < t(v_k) < t(a)$ por lo que $h(a) < h(b) < t(a)$.

   Si fuera $t(b) < t(a)$ entonces el intervalo de b estaría incluido en el de a y tendríamos que $(b, a) \in I$ lo cual ya sabríamos desde el paso de inicialización del algoritmo y ya serían comparables. Si en cambio, fuera $t(a) < t(b)$, tendríamos que $(a, b) \in M$ lo cual es absurdo porque $(a, b) \notin E(G)$.

5. a y v_k disjuntos, a antes que v_k

   En este caso, tenemos que $h(a) < t(a) < h(v_k) < t(v_k)$. Como ya sabemos que $(v_k, b) \in M$ tenemos también que $h(v_k) < h(b) < t(v_k) < t(b)$. Aquí es cuestión de aplicar la propiedad transitiva, y obtener $h(a) < t(a) < h(v_k) < h(b) < t(v_k) < t(b)$ con lo cual, eliminando las relaciones con v_k obtenemos que $h(a) < t(a) < h(b) < t(b)$ y son comparables.

6. a y v_k disjuntos, v_k antes que a

   Ahora tenemos que $h(v_k) < t(v_k) < h(a) < t(a)$ y como $(v_k, b) \in M$ tenemos también que $h(v_k) < h(b) < t(v_k) < t(b)$. Aplicando propiedad transitiva, tenemos $h(b) < h(a) < t(a)$.

   Si fuera $(a, b) \in I$ entonces ya serían comparables desde el paso de inicialización. Supongamos que no, como $h(b) < h(a)$ no puede ser que el intervalo de b esté incluido en el de a o sea, que vale $(b, a) \notin I$. Sabiendo esto, que $(a, b) \notin E(G)$ y que $h(b) < t(a)$ se puede aplicar la regla 4 y deducir que $t(b) < h(a)$. Entonces, aplicando la propiedad transitiva, tenemos que $h(b) < t(b) < h(a) < t(a)$ y son comparables.

Habiendo analizado todos los casos, y por inducción queda probado que todo par de extremos de cuerda es comparable.

Sólo falta ver que la relación resultante es antisimétrica y arreflexiva.

Como hemos mencionado anteriormente, al resolver el sistema de ecuaciones planteado en [21] y encontrar una solución se define una única posible representación circular para el grafo. Si consideramos la aplicación de cada regla por separado, es fácil ver que no puede haber un par simétrico, ya que son reglas que se aplican sobre el orden que ya está establecido de antemano.

La relación resultante es trivialmente arreflexiva ya que ninguna regla agrega el par (x, x).

□

2.2.2. Cálculo de complejidad

La resolución de un sistema de q ecuaciones lineales con p variables usando Gauss, tal cual lo implementamos, tiene complejidad $O(p^2 * q)$. Como el sistema a resolver tiene $O(n^2)$ variables y $O(n^3)$ ecuaciones, su resolución tiene complejidad $O(n^7)$.

Por otra parte, el procesamiento posterior del resultado obtenido, tiene $O(n^5)$. El proceso de inicialización de la matriz lleva $O(n^3)$ y el cálculo de la regla (4) y la clausura transitiva llevan $O(n^3)$ en cada iteración. Suponiendo un peor caso en el que los elementos se agreguen a la relación de a uno por iteración, habrá $O(n^2)$ iteraciones y, por lo tanto, la complejidad total de esta parte será $O(n^5)$.

Por lo tanto, la complejidad total del algoritmo de reconocimiento y de armado de una representación es $O(n^7)$.

2.2.3. Implementación

La implementación del algoritmo de reconocimiento de grafos circulares fue hecha en JAVA en su versión 1.4. Para tener mejor calidad en el desarrollo usamos una técnica llamada "test and code". La misma consiste en escribir los casos de test de las clases implementadas antes de implementarlas. Así se asegura el buen funcionamiento de las mismas [1].

La implementación consiste en dos programas que pueden ser ejecutados, uno por línea de comandos, y el otro por medio de una interfaz gráfica. Ambos se manejan con dos tipos de archivos, uno para los grafos de alternancia, que consiste en indicar la cantidad de vértices y luego listar las apariciones de los vértices en la alternancia; y otro para grafos como lista de adyacencias, que primero indica la cantidad de vértices y luego las adyacencias del grafo.

La versión por línea de comandos recibe un archivo con un grafo como lista de adyacencias y aplica el algoritmo de Naji para ver si es circular. En ese caso, arma una representación como grafo de alternancia y la graba en otro archivo. En caso de tratarse de un grafo no circular, muestra un mensaje de error.

La versión con interfaz gráfica provee más funcionalidades:

- Leer un archivo con un grafo de alternancia y mostrar gráficamente una representación circular asociada

- Leer un archivo con un grafo como lista de adyacencias, detectar si es circular usando el algoritmo de Naji, y en ese caso, mostrar gráficamente una representación circular para el mismo

- Dada una representación circular, exportar la misma a un archivo como grafo de alternancia

- Dada una representación circular, exportar la imagen de la misma a un archivo .png

2.3. Método de compresión

En esta sección de la tesis, se propone un método para transformar una representación de un grafo circular Helly a otra que sea dibujada en una porción arbitrariamente pequeña del círculo y que mantiene el orden de los extremos de las cuerdas. Se conjetura que este método sirve para comprimir cualquier representación de un grafo circular Helly.

[1] Aunque es claro que no es una demostración matemática

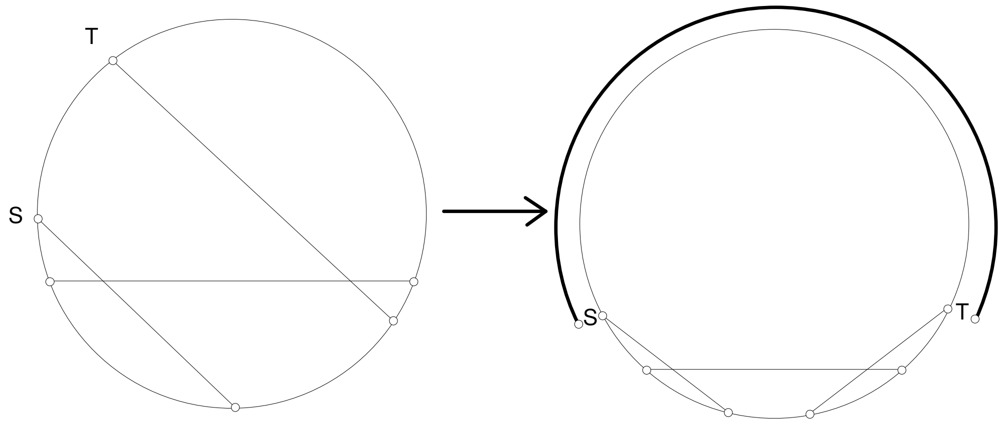


Figura 2.2: Compresión de una representación de un camino de 3 nodos.

Definición 2.2. *Sea $G \in HC$, G se dice compresible sii se puede encontrar otra representación circular Helly del mismo, que respete el mismo orden circular de los extremos de los vértices, y dos extremos de cuerda consecutivos cualesquiera en el orden puedan estar arbitrariamente separados sin ningún otro extremo entre ellos (ejemplo en la figura 2.2).*

2.3.1. Caminos reducibles

Aquí se explica el concepto de camino reducible, que se usa después en el paso inductivo del método de compresión de los grafos HC.

Primero presentamos una definición previa para poder hablar de ciertas propiedades de la representación que necesitaremos para definir camino reducible.

Definición 2.3. *Dada una representación circular Helly R de un grafo, se define el grafo $K_{ja}(R)$ de la siguiente forma:*

- *sus vértices son los puntos de intersección de las cuerdas de R, o sea, las cliques del grafo original.*
- *dos vértices u y v son adyacentes si y sólo si existe en R un segmento de cuerda con extremos u y v tal que el mismo no contiene ningún otro punto de intersección de cuerdas.*

Se puede ver a partir de la definición que $K_{ja}(R)$ es siempre un subgrafo del grafo de cliques, que tiene los mismos nodos, pero le pueden faltar aristas con respecto a $K(G)$. Los grafos clique de los circular Helly, fueron estudiados en [19].

Por ejemplo, en el grafo de la figura 2.4, la clique (w_0, w_1) sería adyacente a la clique (w_0, w_2) en $K(G)$, pues tienen al vértice w_0 en común. Sin embargo, estas cliques no serían adyacentes en $K_{ja}(R)$, pues el segmento que une los puntos de intersección que representan a las cliques en R contiene además otro punto de intersección, que corresponde a la clique (w_0, e). Entonces, en $K_{ja}(R)$, (w_0, w_1) sería adyacente a (w_0, e) pero no a (w_0, w_2).

Ahora sí pasamos a la definición principal.

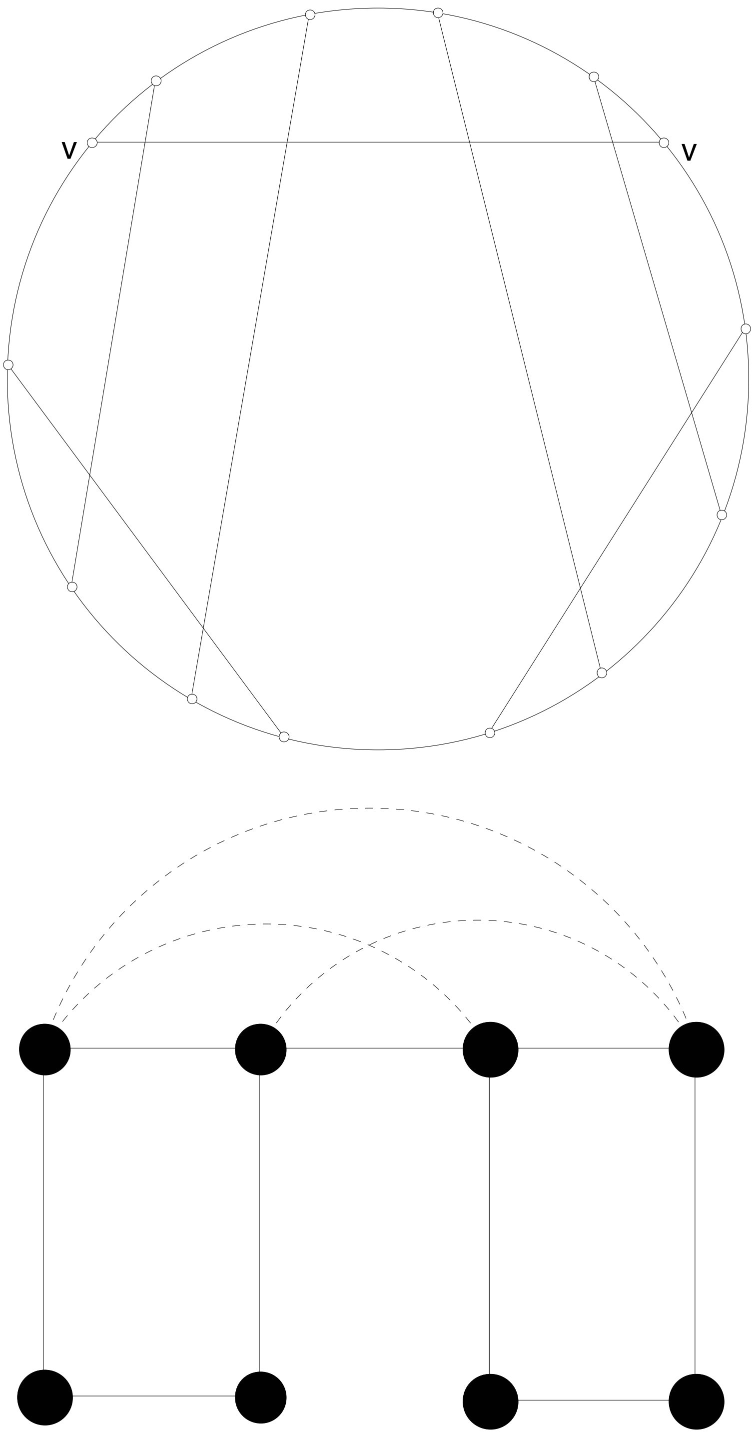


Figura 2.3: Representación circular Helly de un grafo y su grafo K_{ja}. En punteado, las aristas faltantes para generar $K(G)$

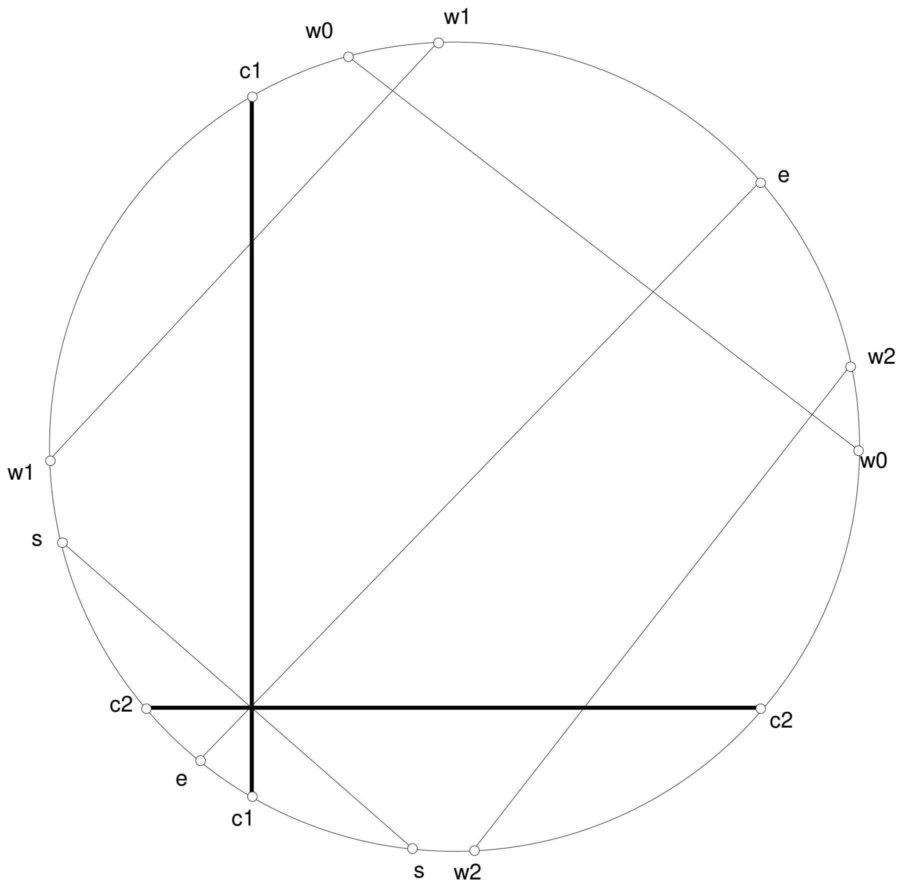


Figura 2.4: Grafo circular Helly con un camino reducible de 2 nodos

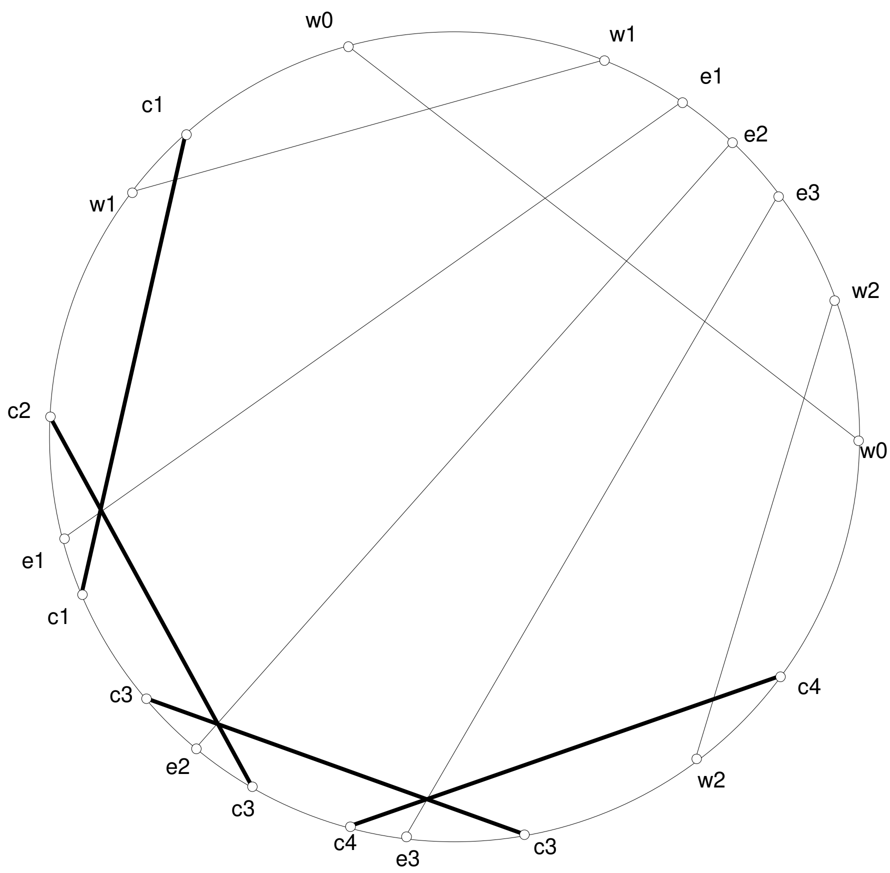


Figura 2.5: Grafo circular Helly con un camino reducible de 4 nodos

Definición 2.4. *Dada una representación circular Helly R de un grafo G, un camino reducible es un camino en el grafo que cumple*

1. *todos los puntos de intersección de las cliques de G están contenidos en un único área que limita con todas las cuerdas asociadas a la representación del camino. Es decir, no existen dos puntos de intersección que aparezcan uno a cada lado de alguna cuerda del camino.*

2. *todas las cliques cuyo punto de intersección está sobre las cuerdas que representan al camino, tienen uno y sólo un nodo no simplicial que no está en el camino.*

3. *existe un circuito simple en $K_{ja}(R)$ que contiene a todos los puntos de intersección que se encuentran sobre las cuerdas del camino reducible.*

Por ejemplo, en la figura 2.4, hay un camino reducible formados por los nodos c_1 y c_2. El nodo c_1 no constituye por sí solo un camino reducible, pues si bien cumple la primera de las condiciones, no cumple la segunda, pues los nodos e y c_2 son no simpliciales y pertenecen a una misma clique del camino.

También en esa figura, se puede ver que los nodos c_1 y e tampoco forman un camino reducible, pues en este caso no se cumple la primera condición, al tener los puntos de intersección de las cliques que forma w_0 al cortar w_1 y w_2 a ambos lados del camino.

En la figura 2.3, se puede ver que el vértice v no constituye de por sí un camino reducible, pues si bien cumple las primeras dos condiciones, no cumple la tercera, pues los circuitos que contienen a todos los puntos de intersección sobre v no son simples.

Vimos en el primer ejemplo un camino reducible con dos nodos. De todas maneras, un camino reducible puede tener una longitud arbitrariamente grande. En la figura 2.5 se muestra un camino reducible de 4 cuerdas.

En general, todos los caminos reducibles que tienen al menos dos nodos, cumplen la siguiente condición:

Propiedad 2.1. *Todas las cliques definidas por los pares (a, b) de nodos consecutivos del camino reducible tienen un único nodo v no simplicial que no está en el camino reducible. (Figura 2.6)*

Demostración. Según la definición de camino reducible, todas las cliques cuyo punto de intersección está sobre las cuerdas que representan al camino, comparten un único nodo no simplicial con el resto del grafo. Dos nodos consecutivos de un camino son adyacentes y, por tanto, definen una clique c. Esta clique está claramente sobre el camino. Por lo tanto, debe existir un único nodo $v \in c$ no simplicial y que no sea parte del camino reducible. □

Definición 2.5. *Denominaremos "extensores" a los nodos no simpliciales que no están en el camino reducible y pertenecen a cliques ubicadas en la intersección de dos nodos consecutivos de un camino reducible en la representación R.*

Un camino reducible sin extensores tiene exactamente un nodo. En la figura 2.4 el nodo w_1 es un camino reducible por sí mismo.

Un grafo puede tener más de un camino reducible. Sin embargo, existen ciertas restricciones sobre nodos que conectan distintos caminos reducibles.

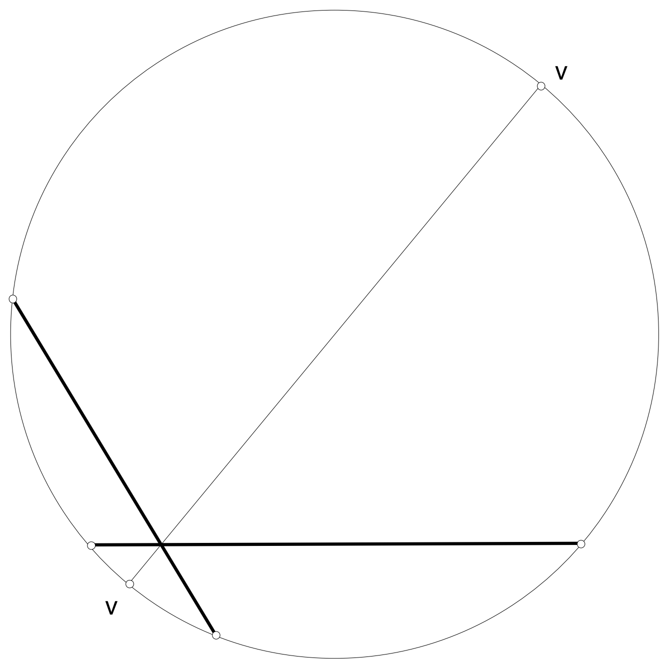


Figura 2.6: Extensor de caminos reducibles

Lema 2.1. *Dos caminos reducibles adyacentes (esto es, que tienen una clique en común) no tienen ningún nodo no simplicial que los una.*

Demostración. O bien es un extensor y se trata del mismo camino reducible, o bien el nodo corta vértices no adyacentes de cada camino reducible. Pero en ese caso, se forma un triángulo en la representación, perdiendo la propiedad de Helly de las cuerdas. □

Lema 2.2. *Un nodo que une un camino reducible con el resto del grafo no es adyacente a otros nodos que también unen al camino reducible con el resto del grafo.*

Demostración. Si consideramos dos nodos "consecutivos" v_1 y v_2 tales que unen el camino reducible con el resto del grafo, por la propiedad 2.1 ambos deben ser adyacentes a un mismo nodo w del camino reducible. Como no puede formarse un triángulo en la representación, y no pueden estar en la misma clique que los une al resto del grafo, v_1 y v_2 no pueden ser adyacentes. Dos nodos no "consecutivos", para poder cortarse entre sí, primero deben cortar a un "consecutivo" a ellos. Como vimos recién, esto no puede suceder, quedando así demostrado el lema. □

No todas las representaciones tienen caminos reducibles, en particular, ninguna representación de un árbol tiene un camino reducible ya que no se puede cumplir la tercera condición.

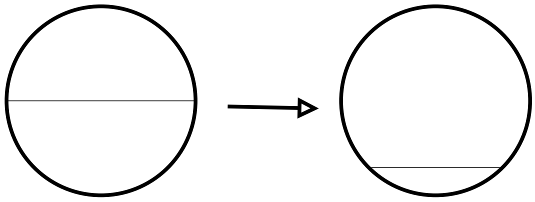


Figura 2.7: Compresión de K_1

2.3.2. Método de compresión

Supongamos que se desea comprimir la representación de un grafo HC de manera que dos extremos consecutivos s y t queden separados por un ángulo α. Para esto proponemos un método recursivo.

K_1 es trivialmente compresible (Ver figura 2.7), por lo tanto sólo resta definir cómo reducir la complejidad del grafo para poder aplicar el método en forma recursiva.

Para el paso recursivo, contemplaremos distintos casos.

1. G no es conexo.

   Si G no es conexo, tiene al menos dos componentes conexas. En este caso, se comprime cada componente conexa por separado, y se los agrega respetando el orden circular de los extremos. Como las componentes conexas son disjuntas, no se forman nuevas cliques y la representación sigue siendo Helly.

2. Existe al menos un vértice v que pertenece sólo a cliques de tamaño 2.

   En este caso, se comprime recursivamente $G - \{v\}$ y sólo queda agregar nuevamente a v a la representación comprimida. Para ello, se consideran dos casos:

   a) Ninguno de los extremos de v es uno de los extremos que se desea separar arbitrariamente

   En este caso, se toma la representación comprimida de $G - \{v\}$ en α y se agregan los extremos de v en la misma posición circular relativa en que se encontraban en G.

   b) Uno de los extremos de v es alguno de los extremos que se desea separar arbitrariamente

   Aquí, se toma la representación comprimida de $G - \{v\}$ en un ángulo $\alpha + \epsilon$, con un ϵ arbitrariamente pequeño, y se agregan los extremos de v en la misma posición circular relativa en que se encontraban en G, haciendo que el extremo de cuerda de v a separar en G esté separada a ϵ de su cuerda más cercana. Así queda el grafo comprimido en un ángulo α.

   En ambos casos, como v no pertenece a cliques de 3 o más vértices, la cuerda de v no forma triángulos con las otras, y la representación sigue siendo Helly.

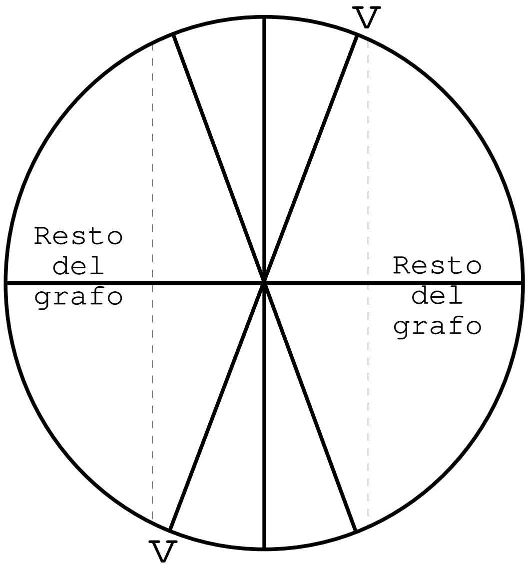


Figura 2.8: Nodo v simplicial en clique simplicial

3. Existe un vértice en G cuyos extremos no son ninguno de los que se quiere separar, es simplicial y la clique c a la que pertenece es simplicial como nodo en $K(G)$. Ver figura 2.8.

   Se quita v, y se comprime recursivamente $G - \{v\}$. Entonces, se puede agregar v en esa representación infinitamente cerca a otro a nodo de la clique, respetando el orden circular y la propiedad Helly de la representación del grafo. Esto último se logra haciendo pasar a la cuerda que representa a v por el mismo punto de corte de la clique c y variando en un ángulo arbitrariamente pequeño la inclinación respecto de la cuerda que representa a otro vértice de la clique.

4. Hay un camino reducible tal que ninguno de los extremos de las cuerdas asociadas a la representación del camino o de las cuerdas de los nodos simpliciales asociados al camino reducible es alguno de los que se desea separar arbitrariamente.

   En este caso, consideramos el grafo G' que resulta de sacarle a G los vértices del camino reducible y los nodos simpliciales asociados a las cliques del camino.

   Primero se comprime recursivamente G'. Sea entonces R' la representación Helly comprimida de G'. En ella, también se conserva el orden de los puntos respecto al orden circular de extremos en G.

   Si se agregan en R' las cuerdas de los vértices del camino reducible, arbitrariamente cerca de las puntas de las cuerdas vecinas y respetando el orden circular de G, las nuevas cliques de 3 nodos pueden dibujarse arbitrariamente cerca del círculo. Usando esto, se puede obtener una representación R'' que sigue siendo Helly y conserva el orden de los puntos.

Finalmente, para obtener la representación comprimida de G hay que agregar a R'' los simpliciales de las cliques asociadas al camino. Como el punto de estas cliques está arbitrariamente cerca del círculo, los simpliciales se pueden agregar respetando el orden circular, de forma similar al caso anterior.

Definidas estas reglas, es claro que todo grafo al que se las puede aplicar recursivamente es compresible. Vimos ejemplos, tales como el K_1 y los grafos sin cliques de tamaño mayor que dos, que son compresibles. Surge entonces la pregunta de si todos los grafos HC son compresibles usando este método. En la siguiente sección se presentan algunos avances para demostrar que esto es así.

2.4. Cuatro caminos reducibles

En esta sección se demuestra que si vale la conjetura de los cuatro caminos reducibles, se puede aplicar el método de compresión definido en la sección 2.3 a cualquier representación de un grafo circular Helly.

Conjetura 2.1. *Hay 4 caminos reducibles en toda representación R de todo grafo $G \in HC$ tal que no tiene nodos simpliciales.*

Este resultado puede generalizarse fácilmente en el siguiente

Lema 2.3. *Sea $G \in HC$ y G' el grafo que resulta de sacarle a G todos sus nodos simpliciales y asumiendo válida la conjetura 2.1. Si G tiene las mismas cliques que G' entonces hay 4 caminos reducibles en toda representación de G.*

Demostración. Por la conjetura 2.1, la tesis de este lema vale en los grafos sin simpliciales, y al no agregar nuevas cliques, los caminos reducibles siguen siendo los mismos. □

2.4.1. Zona de influencia

En esta sección, asumiremos que todos los grafos son conexos, salvo que se indique explícitamente lo contrario.

Definición 2.6. *Dada una representación de un grafo, la zona de influencia de un camino reducible es el arco de la circunferencia que abarca todas las áreas sin cliques que definen los nodos del camino reducible, extendiendo este perímetro a cada lado hasta encontrar el primer extremo de una cuerda que no pertenece a una clique del camino reducible.*

La idea intuitiva de este concepto es considerar la zona en donde no se pueden elegir los extremos a separar arbitrariamente en el método de compresión, de forma que se pueda usar el camino reducible considerado para reducir el grafo, tal como se describe en el caso 4.

Se puede ver un ejemplo en la figura 2.9, donde la zona de influencia del camino reducible (c_1, c_2) es el arco de circunferencia que va desde el extremo del vértice w_1 al extremo del vértice w_2 pasando por el camino.

A continuación, definimos el concepto de área asociada a un par de extremos consecutivos en la representación, que usaremos en lemas siguientes.

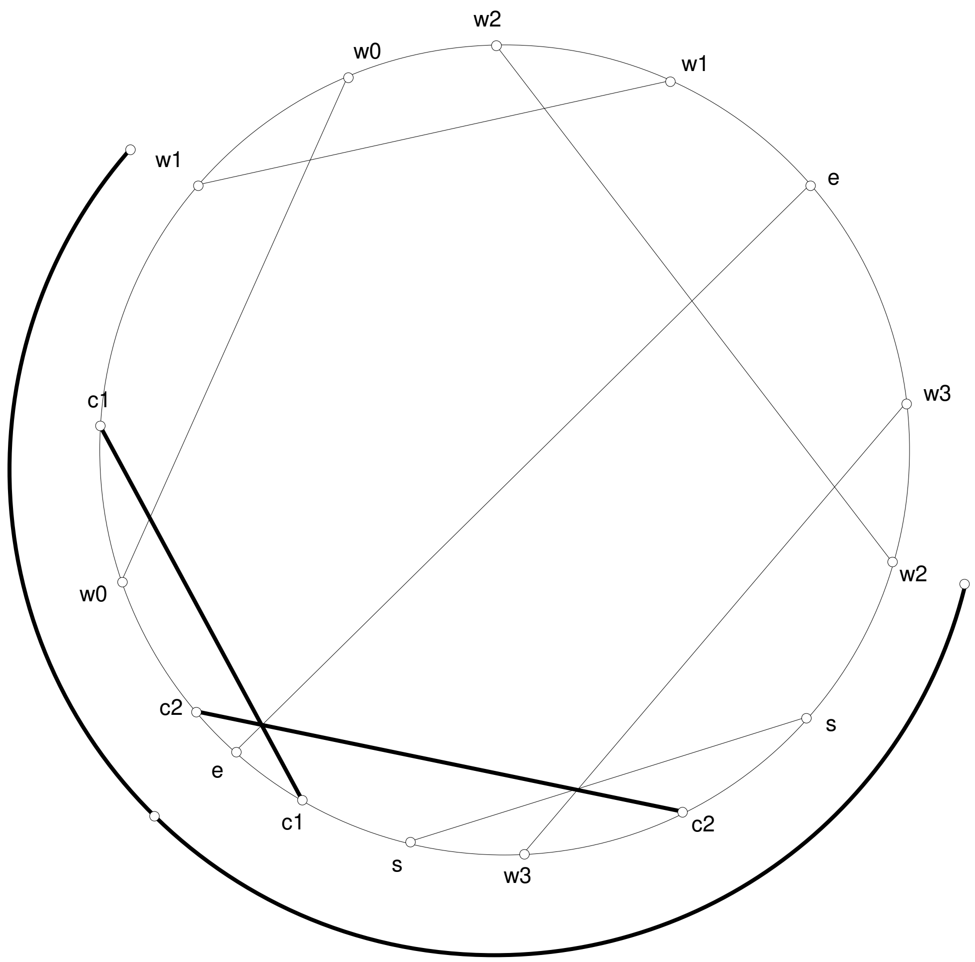


Figura 2.9: Zona de influencia de un camino reducible

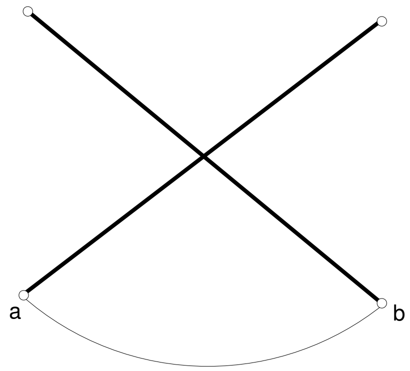


Figura 2.10: Dos puntas de cuerda de nodos adyacentes

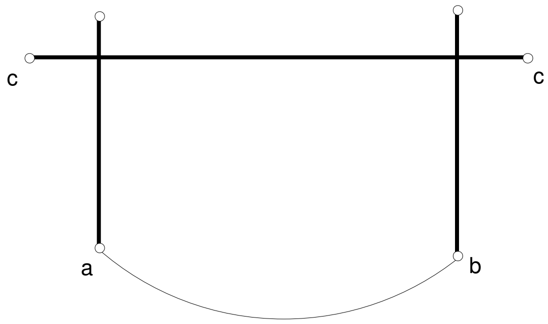


Figura 2.11: Dos puntas de cuerda de nodos en un camino de 3 nodos

Definición 2.7. *Dados dos extremos a y b consecutivos de una representación circular de un grafo, definimos el área asociada al arco (a, b) como el área delimitada por el arco de circunferencia que va de a a b, y las cuerdas de la representación, de forma que ninguna cuerda la corta.*

Lema 2.4. *Si no hay simpliciales en el grafo, entonces todo par (a, b) de extremos consecutivos de cuerdas que se intersecan en la representación está a lo sumo en las zonas de influencia de dos caminos reducibles, que son a los que pertenecerían los nodos v_a y v_b. (Ver figura 2.10).*

Demostración. La intersección de las cuerdas de v_a y v_b puede formar una clique de 2, 3 o más nodos. En el primer caso, es trivial que sólo pueden influir los caminos reducibles a los que pertenezcan v_a y v_b. En el caso que la clique sea de 3 nodos, v_a o v_b debe ser un extensor para que haya algún camino reducible que influya, y en esta situación, es el único. Por último, si la clique tiene más de 3 nodos, no puede haber ningún camino reducible que influya al arco (a, b). □

Lema 2.5. *Si no hay simpliciales en el grafo, entonces todo par (a, b) de extremos consecutivos de cuerdas tal que el camino definido por las cuerdas que limitan el área asociada al arco (a, b) tiene 3 nodos (v_a, c, v_b), está a lo sumo*

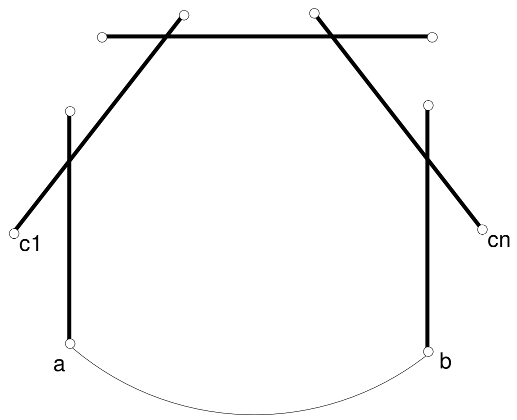


Figura 2.12: Dos puntas de cuerda de nodos en un camino de muchos nodos

en las zonas de influencia de tres caminos reducibles, que son a los que pertenecerían los nodos v_a, c y v_b. (Ver figura 2.11).

Demostración. Que puede haber hasta 3 caminos reducibles que influyan es posible, ya que serían los caminos reducibles a los que pertenecen v_a, c y v_b. Para que exista otro camino reducible más, debería haber otra cuerda en las cliques que forma c con v_a (o, simétricamente, con v_b). Pero en ese caso, de forma análoga al lema anterior, implicaría que hay menos caminos reducibles que influyan. □

Lema 2.6. *Si no hay simpliciales en el grafo, entonces todo par (a, b) de extremos consecutivos de cuerdas tal que el camino definido por las cuerdas que limitan el área asociada al arco (a, b) tiene más de 3 nodos $(v_a, c_1, \ldots, c_n, v_b)$, está a lo sumo en las zonas de influencia de tres caminos reducibles, que son a los que pertenecerían los nodos v_a y v_b. (Ver figura 2.12).*

Demostración. Los nodos $c_1, \ldots, c_n$ no pueden pertenecer a ningún camino reducible, ya que la tercera regla de la definición de camino reducible forzaría la aparición de cliques del lado opuesto a las cliques formadas por v_a y c_1 o v_b y c_n. □

Lema 2.7. *Si no hay simpliciales en el grafo, entonces todo par (a, b) de extremos consecutivos en la representación está en a lo sumo 3 zonas de influencia de caminos reducibles.*

Demostración. Dado que se puede descartar que las 2 puntas de cuerda sean del mismo nodo, pues representaría a un nodo aislado, es trivial ver, a partir de los lemas 2.4, 2.5 y 2.6 que el arco (a, b) está en la zona de influencia de a lo sumo 3 caminos reducibles. □

Lema 2.8. *Dado $G \in HC$, Sea G' el grafo que resulta de sacarle a G todos sus nodos simpliciales. Si G tiene las mismas cliques que G' entonces todo par (a, b) de extremos consecutivos está en a lo sumo 3 zonas de influencia de caminos reducibles.*

Demostración. Por el lema 2.7, la tesis de este lema vale en los grafos sin simpliciales, y al agregarse un nodo simplicial a una clique preexistente, los caminos reducibles siguen siendo los mismos y las zonas de influencia quedan iguales o se reducen. □

Lema 2.9. *Sea un grafo HC sin simpliciales, y sean a, b y c tres extremos de cuerda consecutivos de su representación. Entonces el ángulo definido por (a, c) y que pasa por b está en a lo sumo 3 zonas de influencia de caminos reducibles.*

Demostración. Hay 6 casos a considerar (los mismos están ilustrados en la figura 2.13):

1. a y b son extremos del mismo nodo v. Esto no puede pasar porque v sería un nodo aislado, y por lo tanto, simplicial.

2. a y c son extremos del mismo nodo v. Esto no puede pasar porque v sería un nodo simplicial.

3. v_a, v_b y v_c son adyacentes

   La única forma de que el ángulo (a, c) esté en la zona de influencia de algún camino reducible, es que haya un camino reducible compuesto por v_a y v_c y v_b sea un extensor. Por lo tanto, el ángulo (a, c) está en la zona de influencia de a lo sumo un camino reducible.

4. v_a es adyacente a v_b y v_c, v_b y v_c no son adyacentes.

   El ángulo definido por (a, b) sólo puede estar en las zonas de influencia de los caminos reducibles asociados a a y b, como se ve en el lema 2.4. En cambio, el ángulo definido por (b, c) puede estar en las zonas de influencia de los caminos reducibles asociados a a, b y c, como se ve en el lema 2.5. Por lo tanto, (a, c) está a lo sumo en las zonas de influencia de a, b y c.

5. v_a y v_b son adyacentes, en cambio v_c no es adyacente a v_a ni v_b.

   v_a no puede ser parte de un camino reducible, ya que de serlo v_b sería simplicial. Por lo tanto (a, b) sólo puede estar en la zona de influencia del camino reducible asociado a v_b. Cómo se ve en los lemas 2.5 y 2.6, (b, c) está, a lo sumo, en las zonas de influencia asociadas a b, c y un nodo posible nodo v, que una v_b y v_c, por lo tanto (a, c) está a lo sumo en las zonas de influencia de los caminos reducibles asociados a v, v_b y v_c.

6. v_a, v_b y v_c no son adyacentes

   v_b no puede ser parte de un camino reducible ya que v_a y v_c se encuentran en la representación uno a cada lado de él.

   Considerando la representación del grafo $G - \{v\}$, por los lemas 2.5 y 2.6, (a, c) sólo puede estar en el área de influencia de los caminos reducibles asociados a a, c o un único nodo v que los una. Por lo tanto, (a, c) está en a lo sumo 3 áreas de influencia.

□

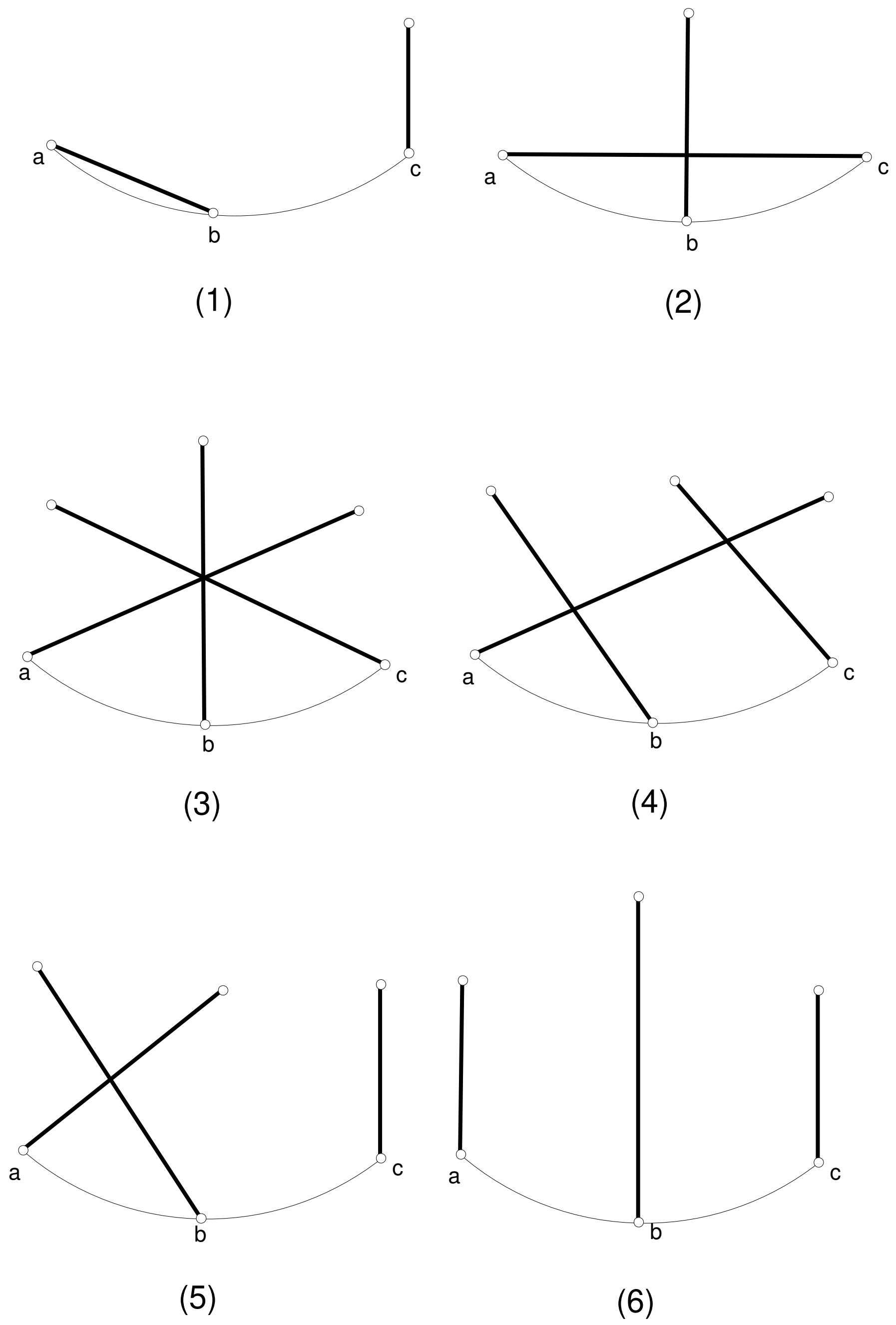


Figura 2.13: Los 6 casos del lema 2.9

Lema 2.10. *Dado $G \in HC$, sea G' el grafo que resulta de sacarle a G todos sus nodos simpliciales. Sean a, b y c tres extremos de cuerda consecutivos en la representación de G. Si G tiene las mismas cliques que G' entonces el ángulo definido por (a, c) y que pasa por b está en a lo sumo 3 zonas de influencia de caminos reducibles.*

Demostración. Por el lema 2.9, la tesis de este lema vale en los grafos sin simpliciales, y al agregarse un nodo simplicial a una clique preexistente, los caminos reducibles siguen siendo los mismos y las zonas de influencia quedan iguales o se reducen. □

Lema 2.11. *Sea R una representación de $G \in HC$ tal que sus cuerdas se pueden particionar en dos conjuntos R_1 y R_2, de forma que R_1 tiene 4 caminos reducibles, y todos los extremos de cuerda de R_2 están entre 3 extremos de cuerda consecutivos de R_1 en R. Entonces, R tiene al menos un camino reducible cuya zona de influencia no se interseca con el arco de cuerda definido por los tres extremos de la hipótesis.*

Demostración. Sean p_1, p_2 y p_3 los tres extremos de cuerda consecutivos de R_1. Por el lema 2.10 existe un camino reducible c en R_1 tal que su zona influencia no se intersecta con el arco (p_1, p_3). Este camino c sigue siendo reducible en R ya que las cliques de R_2, y las que se forman al intersectarse R_2 con la cuerda asociada al extremo p_2 se encuentran en el mismo área definida por el camino reducible c en el grafo. □

2.4.2. Completitud del método de compresión

Aquí se demuestra que, asumiendo la conjetura 2.1, el método de compresión explicado en la sección 2.3 se puede aplicar a para todo par de extremos consecutivos de toda representación de un grafo circular Helly.

1. G no es conexo o tiene un vértice que está sólo en cliques de tamaño 2

   Demostración. Se puede comprimir aplicando los casos 1 ó 2, respectivamente. □

2. hay un nodo simplicial v que no tiene ninguno de los extremos a separar y está en una clique simplicial.

   Demostración. Se puede comprimir aplicando el caso 3. □

3. no hay cliques simpliciales, como nodo, en el grafo de cliques.

   Demostración. Por el lema 2.3 existen 4 caminos reducibles en el grafo, y por el lema 2.8 siempre hay uno no afectado por los extremos a separar. Por lo tanto se puede reducir el grafo aplicando el caso 4. □

4. hay una sola clique simplicial k de más de tres nodos, y s y t son extremos de 2 de sus nodos simpliciales.

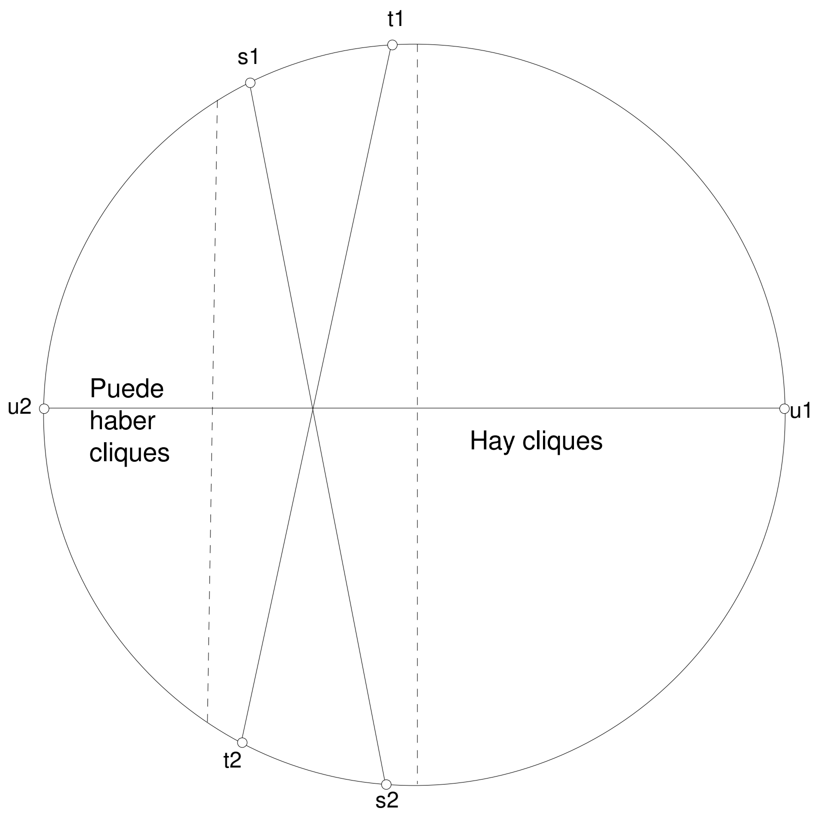


Figura 2.14: Una única clique simplicial

Demostración. Como k tiene más de 3 nodos, y sólo uno puede ser no simplicial, existe un nodo $v \in k$ que cumple con las condiciones del caso 3 □

5. hay una sola clique simplicial k de tres nodos, y s y t son extremos de sus 2 nodos simpliciales (figura 2.14).

   Demostración. Sea u el nodo no simplicial de k, y G' y G'' los subgrafos que se encuentran a cada lado de k en la representación de G. Alguno de ellos puede ser nulo, pero no ambos, pues en ese caso u sería simplicial. Sea entonces G' el subgrafo que no es nulo. Es necesario encontrar un subgrafo de $G' \cup \{u\}$ que no tenga cliques simpliciales. Si $G' \cup \{u\}$ cumple con esto, listo. Si no, es porque u participa de cliques simpliciales en $G' \cup \{u\}$. Sin embargo, siempre es posible obtener un subgrafo de $G' \cup \{u\}$ que no tenga una clique simplicial.

   En $G' \cup \{u\}$ hay a lo sumo una clique simplicial k_s, porque si hubiera más, entonces una de ellas lo sería en G, y no contendría los extremos a separar arbitrariamente. Al quitar los nodos simpliciales de k_s, en el nuevo subgrafo inducido se sigue cumpliendo que existe a lo sumo una clique simplicial. La nueva clique simplicial en el grafo de cliques, es adyacente a la anterior.

   Si se empieza por $G' \cup \{u\}$ y se quitan los nodos simpliciales, se obtiene un nuevo subgrafo inducido con a lo sumo una clique simplicial. Si se repite este procedimiento, se forma por un lado un camino de cliques adyacentes que se fueron quitando, y por otro un subgrafo inducido de $G' \cup \{u\}$. Si el camino terminara, y quedara una sola clique, esta sería simplicial también en G, lo cual es absurdo. Por lo tanto, se puede obtener un subgrafo inducido de $G' \cup \{u\}$ que no tenga cliques simpliciales.

   Sea G_1 el grafo que no tiene cliques simpliciales, obtenido según el procedimiento anterior. Por el lema 2.3, tiene 4 caminos reducibles. Si consideramos $G_2 = G - G_1$, se puede ver que existe un solo vértice v de G_1 que tiene adyacencias en G_2, que es el último nodo del camino desde u hacia G_1, o es el mismo u.

   Si consideramos en G_1 los primeros extremos de cuerda v_1 y v_2 que se encuentran a cada lado del extremo de v que lo une con G_2, y dado que no hay más adyacencias entre G_1 y G_2 que el propio v, se deduce que en G, toda la representación de G_2 está contenida entre los extremos de cuerda v_1 y v_2, o sea, entre tres extremos consecutivos de G_1. Por lo tanto, se cumplen en las hipótesis del lema 2.11, y se puede concluir que en G existe un camino reducible cuya zona de influencia no interseca con el arco (v_1, v_2) que contiene los extremos a separar arbitrariamente. Entonces, para comprimir, se puede aplicar el caso 4. □

Capítulo 3

Extendiendo $K(G)$

En este capítulo se estudia cómo extender el operador $K(G)$ de manera de tener suficente información sobre el grafo original como para poder reconstruirlo en caso que no tenga $K_4 - e$ como subgrafo inducido (grafos SD). Los grafos sin diamantes fueron estudiados por primera vez en [18] donde se demostró que $K(SD) = SD$, o sea que son una clase fija bajo el operador K.

3.1. Algunas propiedades de $K(G)$

Lema 3.1. *Sea $G = (V, E) \in SD$ un grafo sin cliques aisladas , $G' = K(G)$ y $G'' = K^2(G)$. Entonces existe una función biyectiva f entre $V(G'')$ y los nodos no simpliciales de G.*

$$\exists f : V(G'') \leftrightarrow cmpl(G)$$

Demostración. Sea $f(v'') = !v/\forall c \in v'' : v \in c$, o sea, el nodo que está en todas las cliques de G que están en el nodo de G''.

Sólo queda demostrar que:

- hay un único nodo v que está en todas las cliques.
- todo nodo no simplicial tiene asociada una única clique en G.

Para demostrar el primer punto lo hacemos por absurdo. Sea v'' un nodo en G'' y supongamos a v_1 y v_2, ambos en todas las cliques que componen a v''. v_1 y v_2 son adyacentes (ya que están en una misma clique). Como no hay cliques aisladas, v_1 y v_2 están ambos en por lo menos 2 cliques. Por lo tanto v_1 y v_2 participan de un diamante.

Y solamente queda demostrar el segundo punto. Sea, v un nodo no simplicial en G. v pertenece a por lo menos 2 cliques v'_1 y v'_2 en G'. Sea v'' la clique en G' a la que pertenecen v_1 y v_2. No pueden pertenecer a 2 cliques porque entonces G' tendría un diamante. Todas las cliques en v'' tienen que tener un único nodo en común. v es ese nodo. $\square$

Este resultado también puede deducirse fácilmente de los publicados en [9], que está en alemán, y que tiene una demostración hecha en castellano en [19], donde entre otras cosas, prueban que si G es un grafo clique-Helly, entonces $K^2(G)$ es el subgrafo inducido de G que resulta de quitar los vértices dominados.

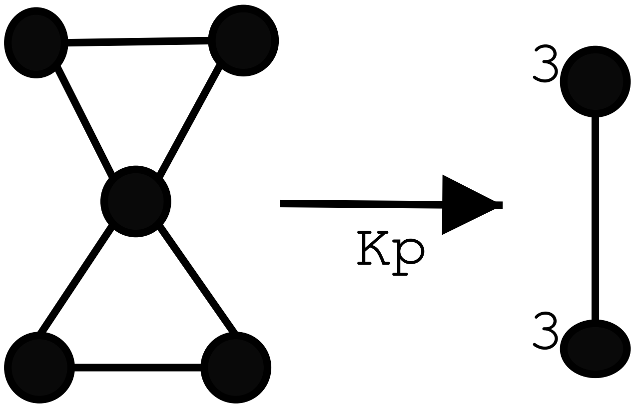


Figura 3.1: Ejemplo de $K_p(G)$

Lema 3.2. *La función f del lema anterior define un isomorfismo entre el grafo inducido por $cmpl(G)$ y $K^2(G)$.*

Demostración. En el lema anterior se demostró que f es una biyección. Falta demostrar que v_1 es adyacente a v_2 sii. $f(v_1)$ es adyacente a $f(v_2)$.

Es fácil ver que esto es equivalente a decir: $f^-1(v_1)$ es adyacente a $f^{-1}(v_2)$ sii. v_1 es adyacente a v_2.

Sean v_1 y v_2 nodos no simpliciales de G, adyacentes. Como son adyacentes, existe una clique c que los contiene. Esta clique c, está incluida tanto en $f^{-1}(v_1)$ como en $f^{-1}(v_2)$. Por lo tanto, $f^{-1}(v_1)$ y $f^{-1}(v_2)$ son adyacentes.

Sean v_1 y v_2 nodos no simpliciales de G, no adyacentes. Como no son adyacentes, no existe ninguna clique c tal que contenga a v_1 y v_2. Como $f^{-1}(v_1)$ son todas las cliques que contienen a v_1 y $f^{-1}(v_2)$ son todas las cliques que contienen a v_2, no tienen ninguna clique en común, y, por lo tanto, $f^{-1}(v_1)$ y $f^{-1}(v_2)$ no son adyacentes. □

3.2. La biyección entre SD y $K_p(SD)$

Definición 3.1. *Dado un grafo $G = (V, E)$, se define el operador $K_P(G) = (V', E')$ como el grafo de cliques de G, agregando a cada nodo v' de $K_P(G)$ un peso $p(v')$, que es la cantidad de nodos que contiene la clique que representa en G.*

La idea intuitiva al definir $K_p(G)$, es tratar de salvar parte de la información que se pierde aplicando el operador K. En este caso particular, se guarda el tamaño de cada clique (ver figura 3.1). Una idea similar, pero guardando la cantidad de nodos que pertenecen a la intersección entre cada par de cliques, se analiza en [23].

Ya sabemos, como se demuestra en [18], que $K(SD) = SD$. Pero, dado $K(G)$ para $G \in SD$, no es posible reconstruir el grafo G original. Usando K_p esto es posible, pero primero, veamos cuáles son los valores posibles de p.

Teorema 3.1. *Las condiciones necesarias y suficientes para que un grafo $H \in SD$ sea el resultado de aplicar K_p a un grafo $G \in SD$ sin nodos aislados son*

- $\forall v \in V(H) : p(v) \geq 2$
- $\forall v \in V(H) : p(v) \geq |C_H(v)|$

Demostración. Suficiencia:

Como G es sin nodos aislados, todas sus cliques tienen tamaño ≥ 2. Entonces, $\forall v \in V(H) : p(v) \geq 2$ por definición de $p(v)$.

Para ver que se cumple la segunda condición, supongamos por el absurdo que $\exists w / p(w) \leq |C_H(w)|$. Si consideramos $K(C_H(w))$, obtenemos un grafo en el que hay una clique $c' / |c'| > p(w)$. Pero por el lema 3.2, $K(C_H(w))$ es subgrafo de G. Más aún, esa clique c' es la que al operar con K_p nos da el vértice w. Absurdo, pues en ese caso $p(w)$ no puede ser menor a $|C_H(w)|$.

Necesidad:

La demostración es por inducción en la cantidad de nodos de H.

Si $n = 1$, entonces H tiene un solo vértice w y siempre se puede encontrar $G / K_p(G) = H$ pues alcanza con considerar $G = K_{p(w)}$.

Para el paso inductivo, supongamos que $|V(H)| = n$. Consideremos un vértice w cualquiera de H y sea $H_0 = H - \{w\}$. Por hipótesis inductiva, sabemos que $\exists G_0 / K_p(G_0) = H_0$. Ahora queremos encontrar un nuevo grafo $G / K(G) = H = H_0 \cup \{w\}$. En particular, veremos cómo armar G a partir de G_0.

Para cada clique $c \in C_H(w)$, se elige un nodo de G_0 para formar una nueva clique según el tamaño de c.

Si $|c| = 2$, entonces $c = \{w, a\}$ y se elige un vértice simplicial de G_0 que pertenezca a la clique a.

Si $|c| \geq 3$, sean $c_1, \ldots, c_k$ los nodos de c. Como G es sin diamantes, y por lo tanto, clique helly, se elige al nodo $u = \bigcap(c_i)$ que es común a todas las cliques de c.

Luego se agregan a G tantos nodos simpliciales hasta tener $p_H(w)$.

Finalmente, se conectan todos los nodos elegidos, obteniendo de esta forma G.

Por hipótesis inductiva, $K_p(G_0) = H_0$. Como se agregó una sola clique respecto a G_0, solo resta que ver que siga valiendo que $H = K(G)$ y que $p(w)$ sea correcto. Lo primero es fácil de ver por la forma de elegir los nodos de G_0, y la otro fue asegurado agregando nodos simpliciales hasta obtener el número adecuado. $\square$

Es fácil extender esta demostración a grafos no conexos e incluir nodos aislados. La conclusión que se puede obtener es que hay una biyección muy intuitiva entre SD y $K_p(SD)$ y que esta permite, a partir de $K_p(SD)$ reconstruir el grafo original.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

4.1. Conclusiones específicas del trabajo de la tesis

4.1.1. La conjetura del diamante

En [7] se define la conjetura del diamante. La misma dice que los grafos HC son los mismos que los grafos circulares sin diamantes. Toda esta tesis tiene esa conjetura como motivación.

En el capítulo 2 hay avances sobre la teoría de los grafos circulares. En la sección 2.2 se hace una explicación del algoritmo de reconocimiento de grafos circulares publicado en [21] y se muestra la primera implementación polinomial, hasta nuestro conocimieto, de un algoritmo de reconocimiento de los mismos. También se explica cómo usar los resultados del paper anteriormente mencionado para encontrar una representación circular del grafo en caso de existir, e implementa.

Y en las secciones 2.3 y 2.4 se demuestra la compresión, asumiendo la conjetura de los 4 caminos reducibles. Esta propiedad de los grafos HC es muy importante para la demostración de la conjetura del diamante, ya que permite "manipular"los grafos HC.

Por otro lado, en el capítulo 3 se estudia una extensión del operador clique y sus consecuencias en los grafos sin diamantes.

Los pasos que creemos que hay que seguir para demostrar la conjetura del diamante son:

- Demostrar la conjetura de los 4 caminos reducibles (conjetura 2.1) en grafos HC.
- Redefinir los caminos reducibles, extendiéndolos a todos los grafos circulares sin diamantes.
- Demostrar que en todo grafo circular sin diamantes ni nodos simpliciales, hay un camino reducible.

- Usando todos los casos del método definido en la sección 2.3, escribir una demostración inductiva de la conjetura del diamante, usando la compresión para achicar los grafos HC resultantes de la hipótesis inductiva.

Usando este esquema de demostración, pensamos que se puede demostrar una propiedad que implica trivialmente la conjetura del diamante. La misma es que para toda representación circular de un grafo circular sin diamantes, se puede obtener otra que mantenga el orden de las puntas de las cuerdas, y las cuerdas cumplan la propiedad de Helly.

Ésta no es la primera vez que se intenta atacar la conjetura del diamante. Un enfoque completamente distinto para el estudio de la misma puede verse en [8], donde se muestra un sistema de ecuaciones que es resoluble si y sólo si la conjetura es válida para un grafo circular sin diamantes dado.

4.1.2. Otras conclusiones de la tesis

Se podría extender la idea de K_p presentada en el capítulo 3 a grafos más generales que los SD. O sea, dar información a los nodos (y aristas) de $K(G)$ para reconstruir el grafo original.

Otra posibilidad es implementar algoritmos de reconocimiento de grafos circulares más eficientes (por ejemplo, los publicados en [3] [10] [22]) o para otras subclases de grafos circulares.

También sería interesante la implementación de un programa que calcule compresiones de grafos HC, usando el método definido en la sección 2.3. Las cuentas en punto flotante están tan mal condicionadas que esta forma de encarar este problema es no viable, pero hay otra opción. La misma consiste en hacer todas las cuentas en forma formal y recién obtener resultados aproximados (con el error que se quiera obtener) después de despejar todas la incógnitas.

4.2. Conclusiones sobre la carrera

Después de bastante más de un lustro estudiando Ciencias de la Computación hemos aprendido tanto a programar como a manejar el formalismo matemático. Esta tesis es fiel reflejo de esta dicotomía. La misma se mueve desde temas de matemática discreta hasta implementaciones de programas en JAVA utilizando las más avanzadas técnicas de desarrollo de software. Esta dualidad es, a nuestro entender, lo que más importante de la formación que nos llevamos de esta casa de estudios.

Adquirir estas habilidades no fue un trabajo fácil. Tuvimos que lidiar con una carrera exigente y al mismo tiempo estar ya insertados en el mundo laboral, con las exigencias que esto conlleva.

Pero esta no fue la mayor dificultad. Lo más difícil fue aprender a pensar de otra manera. Más formal, más rigurosa. Aprender a pensar en forma recursiva, sin errores groseros, es lo que nos hace buenos, tanto en la programación como en la matemática discreta.

Por eso estamos muy contentos y agradecidos por haber podido llegar al final de esta hermosa carrera que es la de Ciencias de la Computación.

Bibliografía

[1] BARRIONUEVO, JUAN MANUEL; CALVO, AURELIANO, "Sobre grafos circulares y sin diamantes", X-Escuela Latinoamericana de Verano de Investigación Operativa, 16-20 de febrero de 2004, Montevideo (Uruguay).

[2] BERGE, CLAUDE, "Graphs", North-Holland, 1985.

[3] BOUCHET, ANDRÉ, Reducing prime graphs and recognizing circle graphs, *Combinatorica* 7, 3 (1987), 243-254.

[4] BRANDSTÄDT, ANDREAS; LE, VAN BANG; SPINRAD, JERRY, "Graph Classes: A Survey", SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.

[5] CZEMERINSKI, HERNÁN, Grafos de Bouchet, Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 2000.

[6] DURÁN, GUILLERMO, Sobre grafos intersección de arcos y cuerdas en un círculo, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires, 2000.

[7] DURÁN, GUILLERMO, "Some new results on circle graphs". *Matemática Contemporânea* 25, (2003) 91-106.

[8] DURÁN, GUILLERMO; GROSHAUS, MARINA; GRAVANO, AGUSTÍN; PROTTI, FÁBIO; SZWARCFITER, JAYME L., "On a conjecture concerning Helly circle graphs". *Pesquisa Operacional* 23, n.1 (2003) 221-229.

[9] ESCALANTE, F., "Über iterierte Clique-Graphen", *Abhandlungender Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 39, (1973), 59-68.

[10] GABOR, CSABA; SUPOWIT, KENNETH; HSU, WEN-LIAN, Recognizing circle graphs in polynomial time, *Journal of the ACM*, Vol. 36, 3 (1989), 435-473.

[11] GAVRIL, FANICA, Algorithms for a maximum clique and a maximum independent set of a circle graph, *Networks* 3 (1973), 261-273.

[12] GENTILE, ENZO R., "Notas de Álgebra I", EUDEBA, Buenos Aires, 1988.

[13] GOLUMBIC, MICHAEL, "Algorithm Graph Theory and Perfect Graphs", Academic Press, New York, 1980.

[14] GOOSENS, MICHEL; MITTELBACH, FRANK; SAMARIN, ALEXANDER, "The LaTeXCompanion", Addison-Wesley, 1994.

[15] GRAVANO, AGUSTÍN, Estudio de problemas, propiedades y algoritmos en grafos arco-circulares y circulares, Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 2001.

[16] HARARY, FRANK, "Graph Theory", Addison-Wesley, 1969.

[17] LAMPORT, LESLIE, "LaTeXuser guide and reference manual", Addison-Wesley, 1994.

[18] LIM, CHONG-KEANG; PENG, YEE-HOCK, On Graphs without Multicliqual Edges, *Journal of Graph Theory* 5, (1981),443-451.

[19] LIN, MIN CHIH, Grafos self-clique y otras clases de grafos clique, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires, 2001.

[20] MCKEE, TERRY ; MCMORRIS, F.R., "Topics in Intersection Graph Theory", SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.

[21] NAJI, WALID , Reconnaissance des graphes des cordes, *Discrete Math.* 54 (1985), 329-337.

[22] SPINRAD, JERRY, Recognition of circle graphs, *Journal Of Algorithms*, 16 (2), (1994), 264-282.

[23] TONDATO, SILVIA; GUTIÉRREZ, MARISA, "Operador clique valuado", Latin American Workshop on Cliques of Graphs, 17-19 de abril de 2002.