

---

# MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA UNA NUEVA CONFIGURACIÓN DE UNIDADES TERRITORIALES EN LICITACIONES DE JUNAEB

---

GONZALO ZAMORANO\*  
GUILLERMO DURÁN\*  
ANDRÉS WEINTRAUB\*

## Resumen

*La Junta Nacional de Auxilio Escolar y Becas (JUNAEB) es un organismo gubernamental de Chile que tiene como misión ayudar a niños y jóvenes con alta vulnerabilidad social a su inserción y permanencia en el mundo escolar. Dentro del área alimenticia decenas de empresas se encargan de suministrar las comidas a los colegios del país, el cual estaba dividido hasta 2007 en 136 Unidades Territoriales (UT). La composición de estas unidades había sido elaborada hace varios años de manera manual principalmente por restricciones geográficas y, en menor medida, tomando en cuenta la cantidad de raciones alimenticias, lo que generaba UT con atractivos muy diferentes para las empresas que año a año se presentan a las licitaciones que organiza JUNAEB. Las conversaciones con autoridades de la institución y directivos de las empresas nos permitieron concluir que existen varios factores que influyen en el atractivo de un territorio, como por ejemplo, el mencionado número de raciones, el número de colegios, la superficie de la UT y la accesibilidad a los colegios. El trabajo desarrolla diferentes métodos de programación matemática para determinar una nueva configuración a ser empleada en el proceso de licitación, de modo que las UT de una misma región sean similarmente atractivas para las empresas, y que gracias a ello todos los colegios de una misma región tengan la posibilidad de una alimentación de buena y similar calidad. Esto permite agregar mejoras al actual proceso, tanto operativas como económicas. Los supuestos considerados para la elaboración de la nueva configuración incluyen políticas de JUNAEB y algunas peticiones empresariales. También se busca facilitar el cálculo de los costos de cada oferta, relacionándolos con los criterios usados. A partir de la licitación de 2007 JUNAEB está utilizando una de las configuraciones de unidades territoriales propuestas en este trabajo.*

---

\*Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

---

## 1. Introducción

---

La Junta Nacional de Auxilio Escolar y Becas (JUNAE B) es un organismo del gobierno de Chile cuyo fin es ayudar a los niños y jóvenes con alta vulnerabilidad social a su inserción y mantención en el sistema educativo. Para ello desarrolla un conjunto de programas en numerosas áreas, tales como alimentación, salud escolar, salud mental, salud oral, vivienda, recreación, útiles escolares y becas, orientados a entregar una asistencia integral que haga efectiva la igualdad de oportunidades ante la educación. Su acción llega a casi dos millones de estudiantes de la educación pública en forma diaria, en establecimientos de todo el país.

El programa de alimentación escolar (PAE) es brindado a cerca de 10 mil establecimientos municipalizados y particulares subvencionados a lo largo de todo Chile. Consiste en el suministro a las Unidades Territoriales (UT) en las cuales es dividido el país, de distintos tipos de comida para los niños y jóvenes en edad escolar. La distribución de alimentos a estas unidades es realizada por compañías dedicadas al rubro alimenticio.

En Chile hay 346 municipalidades, de las cuales 104 (30 %) atienden a comunas de menos de 10.000 habitantes (44 de ellas son comunas de menos de 5.000 habitantes); 195 (57 %) son comunas de entre 10.000 y 100.000 habitantes y 46 (13 %) son comunas de más de 100.000 habitantes. JUNAE B asocia estas comunas en UT a lo largo de todo Chile. Hasta 2007 había 136 de estas unidades, sin embargo 34 de ellas no fueron analizadas en este estudio, puesto que JUNAE B las tiene destinadas a empresas Pymes y no pretende modificarlas. Las Figuras 1 y 2 muestran la distribución de las UT en el país antes de los cambios hechos en este estudio. Para el desarrollo de este trabajo se determinó que los valores mínimo y máximo del número de raciones de cada UT sería de 15.000 y 40.000, respectivamente. Estos valores fueron consensuados con JUNAE B y obedecen, en el caso de la cota inferior, a cuestiones operativas de JUNAE B y a la dimensión mínima requerida para que las firmas obtengan apropiadas economías de escala, y en el caso de la cota superior, al deseo de la institución de evitar que haya regiones con presencia de muy pocas empresas.

La información necesaria para cuantificar cada criterio de los considerados en este trabajo corresponde al mes de abril de 2007. Si bien estos datos pueden cambiar durante el transcurso de los meses, el resultado no debiera variar mayormente con estos cambios, pues en el corto plazo las comunas mantienen (o varían levemente) su importancia relativa al compararse con otra de la misma región. Por ejemplo, si las raciones a nivel país aumentan en un 5 %, también aumentarán en una cifra similar la cantidad de raciones en cada comuna. Lo

mismo ocurre con el resto de los criterios a ser considerados.

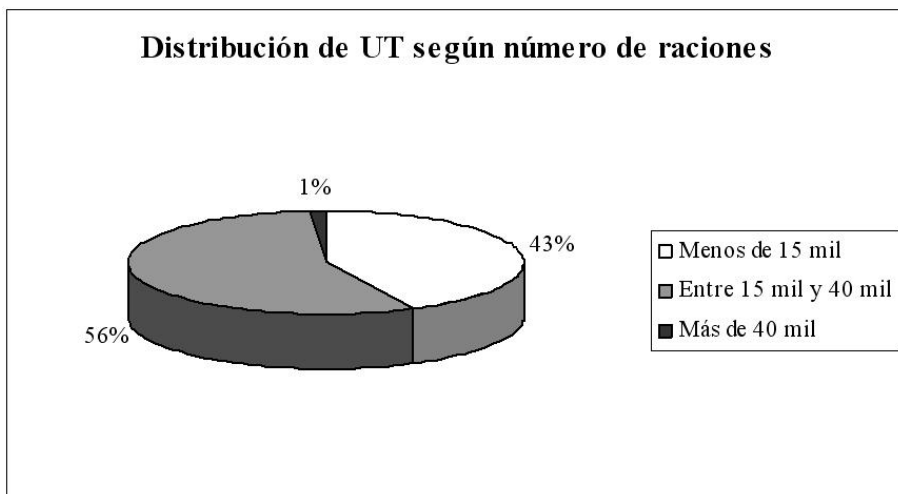


Figura 1. Distribución de UT hasta 2007 según número de raciones.

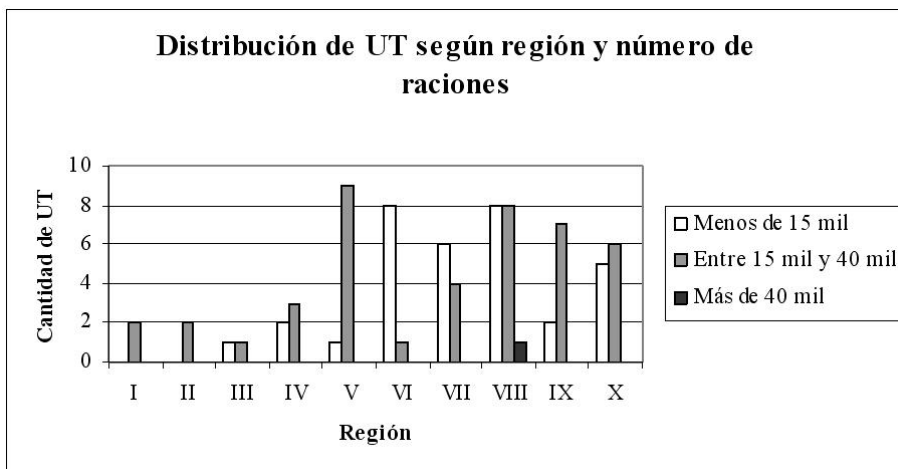


Figura 2. Distribución de UT hasta 2007 según región y número de raciones.

Como se observa en la Tabla 1, la tendencia indica que mientras mayor es el número de raciones a suministrar, mayor es el número de territorios en el que es dividida la región. Este hecho permite concluir que la cantidad de raciones era un aspecto importante en la distribución de las comunas para la conformación de las UT.

El gran problema que tenía la configuración territorial utilizada hasta 2007 para las licitaciones, tanto para las empresas como para JUNAEB, era la disparidad de atractivos entre las UT, ya que sólo era tomado en cuenta un criterio geográfico y de cierta equidad en el número de raciones en cada una de las unidades de una región. En la elaboración de los territorios se había tratado

Región	Nº UT	Total Raciones/Día
I	2	50.350
II	2	39.844
III	2	35.114
IV	5	87.777
V	10	186.941
VI	9	104.187
VII	10	157.525
VIII	17	286.860
IX	9	158.915
X	11	197.087
XI	1	10.541
XII	1	12.177
RM	57	655.429
<b>Total</b>	<b>136</b>	<b>1.982.748</b>

Tabla 1. Cantidad de raciones y UT por región hasta 2007. Fuente JUNAE B, abril 2007.

de aislar a las comunas con un gran número de raciones, asignándolas solitariamente a una UT. Para el resto de la región se había buscado equiparar esta cantidad de alimentos, no importando la superficie que abarcara esa unidad o el número de colegios que se necesitara para alcanzar tal cifra.

El fin central del problema abordado en [7] y en el presente trabajo es obtener la estructura territorial de comunas más adecuada para conseguir unidades relativamente similares, es decir, disminuir la brecha entre los territorios atractivos y los no atractivos para las empresas. De esta manera se puede lograr que todos los colegios de una misma región tengan la posibilidad de una alimentación de buena y similar calidad, evitando además que las empresas amarren en sus ofertas unidades atractivas con otras que no lo son, distorsionando el valor de las ofertas (dado que éstas se adjudican completas para aprovechar las economías de escala).

La generación de unidades o bloques para la resolución de problemas se da también en otros ámbitos. Podemos citar el caso forestal, cuando se quiere desarrollar una planificación de cosechas, respetando un máximo de área contigua que puede ser cosechada en un período (ver por ejemplo [2,3,4]); o el caso de asignación a escuelas de estudiantes que viven en sectores de una ciudad, respetando ciertos criterios (ver por ejemplo [1,6]).

En nuestro trabajo, el atractivo de una UT será obtenido gracias a un puntaje compuesto por los aspectos más relevantes que tiene una comuna, tanto para JUNAE B como para las empresas concesionarias: raciones, colegios, superficie y accesibilidad. El número de raciones da una idea cabal de la magnitud del negocio; el número de colegios es importante por el costo fijo de atender a cada uno; la superficie que se recorre influye por los costos de traslados y transporte; mientras que la presencia de colegios de difícil acceso

en una UT también aumenta los costos de las empresas.

Cada comuna posee una serie de datos que la identifican, los cuales brindan información sobre características de sus colegios, número de raciones, tipos de raciones, a qué UT pertenecen, etc. De esta forma, generalmente la unidad básica del problema es la comuna, pues está completamente caracterizada, aunque puede darse en algún caso que la misma se divida en dos o más partes.

Al tener este problema cuatro objetivos que pueden ser conflictivos entre sí, surge la necesidad de aplicar técnicas de objetivos múltiples. Para este trabajo se eligió una variación del Proceso de Jerarquía Analítica (AHP), creado por Thomas Saaty [5], para determinar el peso que tiene cada criterio. Este índice, unido al peso que tiene una UT por criterio en cada región, permite asignar un puntaje a los posibles territorios a ser seleccionados.

Para encontrar soluciones de este problema se desarrollan tres metodologías. En primer lugar es utilizado un algoritmo heurístico de búsqueda local para intercambiar comunas entre UT, con el objetivo de minimizar la desviación estándar de los puntajes y mejorar la configuración inicial. Como segunda metodología se desarrolla un algoritmo de elaboración de clusters de comunas para configurar cada UT (usando ideas de [3]), sujeto a ciertas restricciones. A cada cluster se le calcula luego un puntaje. Clusters y puntajes son usados como inputs dentro de un modelo exacto de programación lineal entera que minimiza la diferencia entre el mayor y menor puntaje en cada región. Este objetivo arroja resultados concordantes con el objetivo de minimizar la desviación estándar en la mayoría de los casos. Como última metodología también se busca minimizar la desviación estándar utilizando el algoritmo heurístico, pero tomando como solución inicial el resultado entregado por el modelo de programación entera.

Este estudio entrega una solución para 10 de las regiones de Chile existentes hasta 2006, buscando cambiar y mejorar la configuración inicial del país. En general, las soluciones entre las tres metodologías empleadas no distan mucho entre sí pero mejoran sustancialmente la situación existente hasta 2007. La primera parte del estudio que se finalizó fue la nueva configuración propuesta por la heurística, y por ello a partir de 2007 JUNAEB está utilizando esta solución en su proceso de licitación que abarca tres años (un tercio del país en cada año). La finalización a posteriori del mismo estudio para las otras dos metodologías permite afirmar que la solución empleada por JUNAEB es de muy buena calidad.

---

## 2. Importancia Relativa de una UT

---

La idea del procedimiento que se describe a continuación es encontrar un

indicador que permita cuantificar el atractivo que tiene para las empresas un territorio dentro de una región; de esta manera se podrá analizar cuánto más atractiva es una UT que otra. En todos los casos,  $j$  representa a una UT y  $r$  a una región. La función que permite determinar el grado de atractivo de una UT tiene la siguiente forma:

$$U_{j,r} = a_{Rac}x_{Rac,j,r} + b_{Col}x_{Col,j,r} + c_{Sup}x_{Sup,j,r} + d_{Acc}x_{Acc,j,r}$$

$U_{j,r}$  =puntaje total que tiene la UT  $j$  de la región  $r$ .

$a_{Rac}$  =importancia que tiene el número de raciones dentro de la canasta de criterios.

$x_{Rac,j,r}$  = peso que tiene la UT  $j$  de la región  $r$  según el número de raciones.

$b_{Col}$  =importancia que tiene el número de colegios dentro de la canasta de criterios.

$x_{Col,j,r}$  =peso que tiene la UT  $j$  de la región  $r$  según el número de colegios.

$c_{Sup}$  =importancia que tiene la superficie de la UT dentro de la canasta de criterios.

$x_{Sup,j,r}$  =peso que tiene la UT  $j$  de la región  $r$  según su superficie.

$d_{Acc}$  =importancia que tiene el tipo de acceso dentro de la canasta de criterios.

$x_{Acc,j,r}$  =peso que tiene la UT  $j$  de la región  $r$  según el acceso a colegios.

La obtención de los valores  $a_{Rac}, b_{Col}, c_{Sup}$  y  $d_{Acc}$ , usados en todas las metodologías, se hizo a través de una variación del Proceso de Jerarquía Analítica (AHP: Analytic Hierarchy Process) [5]. Este es un método que sirve para evaluar alternativas de decisión y elegir la mejor, cuando el tomador de decisión tiene múltiples objetivos o criterios, encontrando valores numéricos para cada alternativa. Por ejemplo, cuando una persona quiere comprar una casa puede tener varias alternativas posibles para elegir, mientras que puede tener diferentes criterios de selección como el costo (A), el número de habitaciones (B) o el barrio de la vivienda (C).

El AHP se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Desarrollo de una comparación entre pares de alternativas de decisión por cada criterio, obteniendo una matriz de comparación por cada uno de éstos. Los niveles de preferencia para comparar las alternativas de decisión se muestran en la Tabla 2. En el ejemplo mencionado de la compra de la casa, se compara las alternativas analizando el criterio A. Luego el B y el C, obteniendo tres matrices de comparación.
2. Proceso de Síntesis de las matrices, el cual consiste en los siguientes pasos:
  - Suma de los valores de cada columna de la matriz de comparación.

Nivel de preferencia	Valor
Igualmente preferido	1
Igualmente a moderadamente preferido	2
Moderadamente preferido	3
Moderada a fuertemente preferido	4
Fuertemente preferido	5
Fuerte a muy fuertemente preferido	6
Muy fuertemente preferido	7
Muy fuerte a extremadamente preferido	8
Extremadamente preferido	9

Tabla 2. Escala de Preferencias para comparación de a pares.

- Normalización de las matrices, es decir, dividir cada elemento por la suma de la columna correspondiente.
  - Promedio de los valores de cada fila de las matrices normalizadas obteniendo los vectores de preferencia.
  - Combinación de los vectores de preferencia de cada criterio en una matriz de preferencia, la cual muestra la preferencia de cada alternativa para cada criterio.
3. Desarrollo de una comparación de a pares entre los criterios de decisión.
  4. Proceso de Síntesis de la matriz de a pares de los criterios, el cual consiste en los siguientes puntos:
    - Suma de los valores de cada columna de la matriz de comparación de a pares de los criterios.
    - Normalización de la matriz, es decir, dividir cada elemento por la suma de la columna correspondiente.
    - Promedio de los valores de cada fila de la matriz normalizada. Éste sería el vector de preferencia de los criterios.
  5. Multiplicación de la matriz obtenida en 2 por el vector obtenido en 4 para obtener los valores finales de cada alternativa.

La diferencia entre el AHP y lo realizado en el presente estudio es que sólo la comparación de los criterios es usada (Pasos 3 y 4 del resumen de AHP recientemente definido), lo que permite cuantificar el atractivo de cada uno de ellos. La matriz de preferencias de los Pasos 1 y 2 es reemplazada por los puntajes según cada criterio que tiene cada UT (Secciones 3.1 o 4.2, según el método de resolución empleado).

La Tabla 3 muestra la matriz que compara los criterios de a pares. Esta comparación fue realizada con el asesoramiento de funcionarios de JUNAEB.

<b>Criterios</b>	<b>Raciones</b>	<b>Colegios</b>	<b>Superficie</b>	<b>Acceso</b>	<b>Peso</b>
<b>Raciones</b>	1,00	1,00	3,00	3,00	38,07%
<b>Colegios</b>	1,00	1,00	2,00	3,00	34,22%
<b>Superficie</b>	0,33	0,50	1,00	2,00	16,94%
<b>Acceso</b>	0,33	0,33	0,50	1,00	10,77%
<b>Suma</b>	<b>2,67</b>	<b>2,83</b>	<b>6,50</b>	<b>9,00</b>	<b>100,00%</b>

Tabla 3. Relaciones entre los criterios y peso final de cada uno.

Por ejemplo, el valor 3 del elemento 3.1 de la matriz (fila 3, columna 1) refleja que el criterio raciones es "moderadamente preferido" sobre el criterio superficie (ver Tabla 2). Luego de realizar todas las comparaciones se procede a sumar los valores para cada criterio (Fila Suma). Para obtener el peso porcentual final por criterio, se promedian las importancias relativas de cada comparación, como se muestra en este ejemplo, donde se obtiene el peso porcentual de las raciones:

$$38,07 = \left( \frac{\frac{1,00}{2,67} + \frac{1,00 \cdot 3,00}{2,83 \cdot 6,50} + \frac{3,00}{9,00}}{4} \right) * 100$$

De este modo, los valores finales de cada criterio se encuentran indicados en la última columna de la Tabla 3. Las raciones tienen una importancia ponderada de un 38,07%, confirmando que es el criterio más importante, lo que ya era considerado tanto por las empresas como por JUNAEB. Estos pesos fueron validados, al contrastar el valor de atractivo de las UT dado por estos criterios en la situación existente hasta 2007 con el análisis hecho por JUNAEB que determina cuán preferida es una UT. Es decir, los valores dados por estos criterios para el escenario original coinciden con los supuestos hechos por JUNAEB y las empresas acerca de UT atractivas y no atractivas. Con esta observación es posible concluir que los valores arrojados para cada criterio por el AHP son consistentes, y la comparación de a pares concuerda con lo que representa cada uno de los criterios para JUNAEB y las empresas. De esta forma es esperable que los resultados cuantitativos de las nuevas propuestas entreguen valores que expliquen fehacientemente la homogenización de cada región.

Los pesos de cada UT por criterio  $x_{Rac,j,r}$ ,  $x_{Col,j,r}$ ,  $x_{Sup,j,r}$  y  $x_{Acc,j,r}$  en cada región, analizados en secciones posteriores, son calculados de manera diferente según la metodología ocupada (heurística o modelo de programación entera), aunque se mantiene una similar proporcionalidad al comparar UT en ambos casos.

Decimos que un criterio es directamente proporcional si mientras más proporción se tiene más atractiva es la UT; caso contrario ocurre con uno inversamente proporcional, en donde mientras más proporción se tenga menos atractiva es la UT. En el caso de los primeros se encuentra el número de raciones y



accesibilidad, mientras que colegios y superficie son parte del segundo grupo.

---

### 3. Heurística de Búsqueda Local

---

El objetivo de esta heurística es encontrar un conjunto de UT de atractivo homogéneo en cada región. Como medida de homogeneidad se tomará la desviación estándar, es decir, nuestro algoritmo heurístico tratará de minimizar dicho valor (claramente, el valor ideal es una desviación estándar igual a 0).

La heurística utiliza para el intercambio de comunas un procedimiento de "búsqueda local", el cual comienza en una solución inicial (la configuración de cada región hasta 2007) y busca una dirección de máximo descenso del valor de la función objetivo (la desviación estándar), moviéndose a soluciones vecinas. Para ello se define un concepto de vecindad entre soluciones que se explicará más adelante.

#### 3.1. Pesos de cada UT por criterio utilizados en la heurística

Analicemos la forma de calcular el peso de cada UT según cada criterio ( $x_{Rac,j,r}$ ,  $x_{Col,j,r}$ ,  $x_{Sup,j,r}$  y  $x_{Acc,j,r}$ ) para esta metodología. Notar que al momento de hacer los cálculos se conoce la partición en UT de toda la región. Para el ejemplo a considerar a continuación supondremos que la región está particionada en 2 UT: A y B.

- **Número de Raciones**

El cálculo del peso en cualquier UT según este criterio consistió en una proporción simple, obteniendo el porcentaje de raciones que pertenece a cada territorio. En otras palabras, el valor de alguna UT es la suma de los valores porcentuales de cada comuna que la conforma. Una UT es más atractiva si es que posee más raciones, debido a las economías de escala existentes en la operación. La Tabla 4 muestra un ejemplo del cálculo del atractivo de cada UT según el número de raciones.

UT	Cantidad de raciones	Atractivo de raciones
A	20.000	40,0%
B	30.000	60,0%
Total	50.000	

Tabla 4. Cálculo del atractivo de cada UT según el de número de raciones.

- **Número de Colegios**

Al tratarse de un criterio inversamente proporcional no es posible que puedan sumarse los valores porcentuales individuales de las comunas para obtener el valor de la UT. La manera de resolver este problema es determinar el número de colegios que tiene cada UT formada y determinar un índice que consiste en dividir el número de colegios total de la región por el número de colegios de la UT. Por ejemplo, el valor de 2,22 de la UT A del ejemplo se obtiene al realizar  $200/90$ . Con estos índices normalizados al 100 % se obtiene el atractivo para cada UT según el número de colegios (Ver Tabla 5).

UT	Cantidad de colegios	Índice	Atractivo de colegios
A	90	2,22	55,0%
B	110	1,82	45,0%
Total	200		

Tabla 5. Cálculo del atractivo de cada UT según el de número de colegios.

#### ■ Superficie

La forma de obtener el valor es determinando el número de kilómetros cuadrados que posee cada UT formada. Como mientras menor es el área, más atractiva es la unidad, lo que se calcula es un índice que consiste en dividir el área total de la región por el área de la UT. Por ejemplo, el valor de 2,50 de la UT A del ejemplo se obtiene al realizar  $20.000/8.000$ . Luego, como se muestra en la Tabla 6, se obtuvo la proporción de este resultado para todos los territorios, normalizando los índices calculados al 100 %.

UT	Cantidad de km <sup>2</sup>	Índice	Atractivo de superficie
A	8.000	2,50	60,0%
B	12.000	1,67	40,0%
Total	20.000		

Tabla 6. Cálculo del atractivo de cada UT según su superficie.

#### ■ Accesibilidad

Para obtener el peso de una UT según este criterio se procedió primero a calcular el índice de accesibilidad dividiendo para cada UT el número de colegios de fácil acceso por el número de colegios de difícil acceso (si no hay ningún colegio de éstos últimos en la UT se consideró que el número de colegios de difícil acceso es 0,5 para evitar dividir por 0). Por ejemplo, el índice de accesibilidad de 21,50 de la UT A del ejemplo se obtiene al

realizar 86/4. Luego de esto se obtiene el atractivo de accesibilidad de cada UT normalizando estos índices al 100 %. Sin embargo, puesto que este criterio es muy sensible a la cantidad de colegios de difícil acceso (por la poca cantidad), el resultado podría entregar datos distorsionados, en donde un único colegio adicional de difícil acceso puede pesar mucho al obtener el atractivo de accesibilidad de la UT. Esto se resolvió, como lo muestra la Tabla 7, suavizando el valor final de la siguiente manera: se pondera el valor obtenido por un 50 %, mientras que el otro 50 % corresponde al promedio que debiera tener cada unidad de la región en este ítem (para dos UT, un 50 %). Por ejemplo, el atractivo de accesibilidad "suavizado" (que es el valor final que usaremos para este criterio) de la UT A del ejemplo se calcula haciendo  $0,5 * 65,7 + 0,5 * 50 = 57,9$ .

UT	Cantidad de colegios de fácil acceso	Cantidad de colegios de difícil acceso	Índice de accesibilidad	Atractivo de accesibilidad	Atractivo de accesibilidad suavizado
A	86	4	21,50	65,7%	57,9%
B	101	9	11,22	34,3%	42,1%
Total	187	13			

Tabla 7. Cálculo del atractivo de cada UT según la accesibilidad a los colegios.

Resumiendo, en esta metodología los valores son obtenidos conociendo la configuración total de la región, posibilitando la comparación de un territorio con el resto de la región. Un cambio de alguna comuna varía el puntaje de todas las UT de la región, pues el valor final de alguna de éstas depende del valor del resto.

UT factibles, formadas por algoritmo	Atractivo de razones	Atractivo de colegios	Atractivo de superficie	Atractivo de accesibilidad	*	Razones	Colegios	Superficie	Accesibilidad	UT factibles, formadas por algoritmo	Atractivo de UT
A	40,0%	55,0%	60,0%	57,9%		38,1%	34,2%	16,9%	10,8%	A	50,4%
B	60,0%	45,0%	40,0%	42,1%						B	49,6%

Tabla 8. Cálculo final del atractivo de cada UT utilizado en esta metodología.

Finalmente en la Tabla 8, para obtener la importancia relativa de cada UT, se multiplica la matriz formada por los vectores de preferencia para cada UT de cada criterio (2x4) por la matriz de pesos de criterios (4x1), obteniéndose la matriz con los resultados finales para cada UT (2x1).

### 3.2. Descripción de la heurística

Entre las características más relevantes de la heurística de búsqueda local figura la toma de decisiones en función de la información que está disponible en cada iteración, pero la desventaja que tiene este método es que obviamente no garantiza alcanzar la solución óptima.

Diremos que una solución es vecina de otra si la nueva configuración se obtiene de la anterior por medio de pasar una comuna de una UT a otra (manteniendo constante el número de UT de la región), o eliminar una UT integrando sus comunas a UT contiguas (disminuyendo en uno el número de UT), o transformar una UT en dos nuevas (aumentando en uno el número de UT).

La heurística procede iterativamente de la siguiente manera:

1. Se tiene un conjunto inicial de Unidades Territoriales predefinido en cada región, cada una formada por comunas. Esta configuración regional corresponde a la solución original que tiene JUNAEB hasta antes de la realización de este trabajo.
2. Se pasa a una solución vecina de la solución actual con el objetivo de "mejorar" la configuración existente
3. Se verifica que cada UT en la nueva configuración cumpla las restricciones de mínimo y máximo número de raciones. Si no se cumplen las condiciones, entonces se vuelve un paso atrás y no se considera el cambio de configuración hecho.
4. Se evalúa la desviación estándar. Si ésta disminuye entonces se mantiene el cambio; por el contrario, si aumenta, el cambio de configuración no es realizado.
5. El proceso termina cuando ninguna solución vecina puede disminuir la desviación estándar.

La desviación estándar (DE) es una medida de dispersión que mide cuánto tienden a alejarse los valores de cada UT con respecto al promedio de la región. Una desviación estándar grande indica que los valores están lejos de la media, y una desviación pequeña indica que los puntajes están agrupados cercanos a la media.

$$DE = \sqrt{\frac{n_r \sum x_j^2 - (\sum x_j)^2}{n_r^2}}$$

$n_r$  = cantidad de UT de la región r y  $x_j$  = puntaje de la  $UT_j$

En la Figura 3 se muestra un ejemplo concreto (I Región) de cómo opera el algoritmo, junto con la desviación estándar y atractivo de las UT en cada iteración.

La iteración 2 no es realizada debido a que empeora la función objetivo, por lo que se vuelve a la iteración 1 y se realiza un intercambio de otra comuna. La iteración 4 tampoco es realizada porque la desviación estándar aumenta. Como

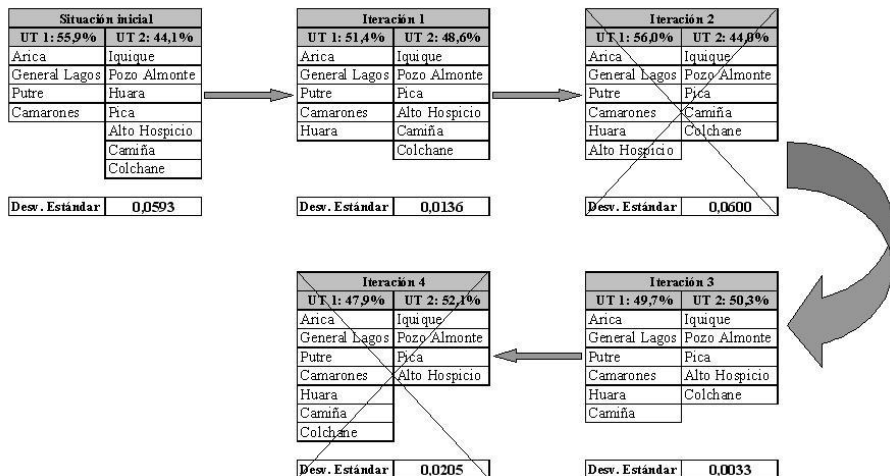


Figura 3. Ejemplo del funcionamiento de la heurística.

no puede mejorarse la solución de la iteración 3 con un nuevo intercambio, el algoritmo finaliza.

Cabe señalar que aquellas comunas con más de 10.000 raciones en cualquier región son particionadas (y entonces la heurística trabajará con estas sub-comunas como si fueran comunas), de manera de repartir más homogéneamente dichas raciones con el objetivo de lograr UT con atractivos más similares. La partición en estos casos se hace en la menor cantidad de partes iguales necesaria para que cada sub-comuna tenga menos de 10.000 raciones (por ejemplo, una comuna de 24.000 raciones será partida en 3 sub-comunas de 8.000 raciones cada una).

La heurística fue programada en el lenguaje Java y el código fue compilado usando la versión de Java Standard Edition Development Kit (Java SE JDK) 1.5.0.06. El computador utilizado fue un Pentium 4, con un procesador intel dual core de 1.8 gigahertz y memoria RAM de 4 gigabytes.

Si bien para mejorar una UT, se empeora otra, el resultado esperado es que mejore la eficiencia de las empresas y de JUNAEB en forma global, pues se estimarán más certeramente los costos asociados y habrá un control más estricto sobre los concesionarios. Una estimación de costos más exacta nace de la idea de que cada criterio usado tiene un costo con el cual puede relacionarse. Por ejemplo, la cantidad de raciones con el costo de materia prima y la superficie con el costo de transporte. Estos costos están intrínsecamente considerados en este estudio debido a que al comparar los criterios de a pares en el AHP, se están tomando en cuenta estos aspectos. La constitución de territorios de atractivo pareja significa un interesante resultado para las empresas, dado que facilita el cálculo de los costos en las distintas ofertas que presenten. Esto se debe a que la presencia de UT homogéneas por región permite a las empresas hacer sus cálculos de costos para una UT cualquiera y extenderlo en forma

casi directa al resto de las UT de la región, a diferencia de lo que sucedía anteriormente en que los costos podían variar fuertemente de UT en UT, aún dentro de la misma región.

El estudio también hace un aporte desde lo social, ya que al equiparar las UT se espera que los servicios sean mucho más equitativos, lo que implica que no habrá niños que reciban una peor comida que otros. Obtener UT atractivas y parejas para un concesionario permitirá entregar un servicio no discriminatorio y con estándares de calidad aceptados por JUNAEB.

---

## 4. Modelo de Programación Entera

---

Otra metodología que se desarrolla para resolver el problema de la homogeneización de las UT es un modelo exacto de programación lineal entera. Para ello generaremos todas las posibles UT que podrían constituirse (que llamaremos *clusters*), formadas por comunas o particiones de comunas contiguas, con la condición de que cada una de ellas tenga a lo menos 15.000 raciones y a lo más 40.000. Luego definiremos un puntaje de atractivo para cada cluster, usando ideas similares a las desarrolladas en la Sección 3.1. Por último, mediante un modelo de programación lineal entera, seleccionaremos para cada región un conjunto de *clusters* que sean una partición de la región, minimizando la diferencia entre el cluster más atractivo y el menos atractivo. Estos *clusters* seleccionados constituirán la propuesta de partición en UT de la región.

### 4.1. Algoritmo de enumeración de *clusters*

Este algoritmo utiliza ideas contempladas en el método ARM (Area Restriction Model), usado en problemas forestales (ver [2,4]). En ARM se desarrolla una planificación de cosechas, respetando un máximo de área contigua que puede ser cosechada en un período. El diseño de este problema forestal contempla una región, la cual está dividida en bloques (los *clusters* de nuestro trabajo), los cuales, a su vez, están divididos en celdas (las comunas o particiones de comunas en este análisis). Éstas constituyen la unidad básica del problema y pueden ser cosechadas en un solo período (Murray y Weintraub [4]) o en diversos períodos (Goycoolea et al [2]). En este estudio, se trata de un problema de un solo período: la nueva configuración se hace una vez y se usa por un tiempo medianamente largo.

El problema es resuelto enumerando a priori todos los *clusters* que sean factibles en cuanto a contigüidad de comunas y número de raciones. El algoritmo de elaboración de *clusters* está basado en el usado en [3], que fue diseñado para un problema forestal buscando construir bloques de terrenos

contiguos sujeto a un área máxima. En el presente estudio se hace una analogía a ese problema, manteniendo la contigüidad, pero la condición de área es reemplazada por un rango de raciones.

El número máximo de raciones que puede asignarse a cada unidad es de 40.000, así como el mínimo es de 15.000. Además se determinó que las celdas (comunas o particiones de comunas) pueden tener hasta 10.000 raciones. Por ello, las comunas que presentan un número superior a ese valor son divididas en partes iguales hasta que cada una de éstas tenga menos que esa cifra. Como el máximo de raciones que puede tener una celda es de 10 mil, entonces ninguna UT puede contener a una sola de ellas, puesto que el mínimo requerido es de 15 mil raciones, las cuales pueden ser alcanzadas con al menos dos. Cada celda debe ser asignada exactamente a una sola UT, la cual debe estar conformada sólo por terrenos contiguos, es decir, la región que queda conformada debe ser conexa en el sentido de que uno puede moverse de una celda a otra cualquiera de la misma UT sin salirse de la región.

El algoritmo empieza definiendo todos los posibles *clusters* compuestos de una celda, ubicándolos en el conjunto  $S[1]$ . Al empezar la  $k+1$ -ésima iteración, el conjunto  $S[k]$  contendrá todos los *clusters* factibles (teniendo en cuenta los rangos mínimo y máximo de raciones) de  $k$  celdas contiguas. Entonces, el conjunto  $S[k+1]$  es construido luego de sumar de todas las formas posibles una celda contigua a cada miembro de los *clusters* de  $S[k]$ . La recursión finaliza cuando no quedan *clusters* factibles para formar o se alcanza el número máximo de iteraciones fijado.

El número de iteraciones determina el número máximo de celdas que puede tener un *cluster*. Para determinar este número se decidió darle cierta holgura al resultado de la heurística. Por ejemplo, si en el resultado de la Primera Región, según la heurística, la UT con más celdas tenía 8 de ellas, entonces aquí fijábamos el máximo número de iteraciones en 10.

Los *inputs* usados por el algoritmo para cada región son:

1. Las celdas que forman parte de la región.
2. El número máximo de celdas que pueden formar parte de un mismo territorio, es decir el número máximo de iteraciones que puede hacer el algoritmo.
3. Una matriz de contigüidad espacial, la cual es una matriz binaria que indica las celdas contiguas a otras.
4. Un vector de raciones por cada celda. De esta forma es posible obtener la cantidad de raciones que cada *cluster* formado a priori obtiene.

De la información mostrada en la Tabla 9, las celdas y los *clusters* formados son *inputs* para el modelo de programación entera (recordar que los *clusters*

Región	Celdas	Iteraciones	Clusters formados (algoritmo)	UT seleccionadas (modelo)
I	14	10	3.143	2
II	11	9	347	2
III	11	9	701	2
IV	19	10	17.875	3
V	34	7	17.072	7
VI	31	7	51.788	5
VII	32	7	55.731	6
VIII	45	7	46.874	10
IX	35	6	19.597	7
X	34	7	24.979	8

Tabla 9. Información sobre el algoritmo enumerador de cluster.

de sólo una celda no son incorporados como datos al modelo porque se sabe que no son factibles). A éstos deben sumarse los puntajes de cada *cluster*, los cuales son explicados en la Sección 4.2.

Cabe señalar que la cantidad de *clusters* formados no sólo depende del número de celdas de la región y de la cantidad máxima de celdas que pueden pertenecer a una UT. Existen otros dos aspectos que se encuentran implícitamente presentes. El primero es la cantidad de adyacencias existentes, en otras palabras, la cantidad de 1's que contiene la matriz de adyacencia; el segundo aspecto es la distribución geográfica que tienen las celdas, es decir, su ubicación dentro de la región. Una mayor cantidad de 1's en la matriz, por sí sola, no asegura que se forme una mayor cantidad de territorios, puesto que si bien es cierto que en la mayoría de los casos esta situación ocurre, también puede pasar que la región tenga una silueta que separe intrínsecamente a las celdas en grupos y que entre éstos haya poca conexión. Un ejemplo de esta situación es lo que ocurre en la V, VIII y X regiones, en donde a pesar de haber más celdas y la misma cantidad de iteraciones que en la VII región, se obtienen menos *clusters*.

La programación del algoritmo, al igual que la heurística de búsqueda local, fue realizada en el lenguaje Java y el código fue compilado usando la versión de Java Standard Edition Development Kit (Java SE JDK) 1.5.0.06. Los programas que fueron implementados para el desarrollo del algoritmo utilizan también el mismo hardware que el usado en la heurística.

#### 4.2. Pesos de cada UT por criterio utilizados en el modelo de PE

Notar que en este caso al calcular el valor de un *cluster* según cada criterio no se conoce la composición del resto de la región. De este modo, la forma de obtener los puntajes en esta metodología usa la misma base que en la heurística, sin embargo, los valores son calibrados, de manera que para una



misma UT los atractivos obtenidos en la heurística sean similares que en el modelo de programación entera. Para ello, se toma como base el valor de alguna UT en la heurística para mantener aquí invariante ese valor, y obtener el resto por medio de una proporcionalidad directa. Tomaremos como ejemplo el mismo que fue utilizado en la Sección 3.1. En este caso, las UT A y B deben tener el mismo atractivo para cada criterio, mientras que las restantes deben tener atractivos proporcionales.

#### ■ Número de Raciones

La Tabla 10 muestra los valores obtenidos para cada *cluster* según este criterio, calibrados para obtener un factor 40 de atractivo en la UT A y un factor 60 de atractivo en la UT B (que eran los porcentajes calculados al obtener los valores en la otra metodología). Notar que los valores de 40 y 60 son proporcionales a 20.000 y 30.000. El resto de los valores para los otros clusters que se muestran en este ejemplo se calcula manteniendo las proporciones de acuerdo a la cantidad de raciones de cada uno de ellos. Observar que por ejemplo *clusters* C y D, E y F, o G y H forman también diferentes particiones de la región.

Clusters factibles formados por el algoritmo	Cantidad de raciones	Atractivo de raciones calibrado
A	20.000	40,0%
B	30.000	60,0%
C	32.500	65,0%
D	17.500	35,0%
E	25.000	50,0%
F	25.000	50,0%
G	35.000	70,0%
H	15.000	30,0%

Tabla 10. Cálculo del atractivo de cada cluster según el de número de raciones.

#### ■ Número de Colegios

La Tabla 11 muestra los valores obtenidos para cada *cluster* según este criterio, calibrados para obtener un factor de atractivo 55 en la UT A (que era el porcentaje calculado al obtener los valores en la otra metodología). El resto de los valores se calcula manteniendo las proporciones de acuerdo a los índices generados por la división entre el número de colegios total de la región y el número de colegios del *cluster*. Por ejemplo, el atractivo 49,5 del *cluster* C se obtiene haciendo  $55 * 2/2,22$ . Recordemos que los clusters C y D, E y F, o G y H forman también una partición de la región, tal cual sucedía para la UT A y la UT B,

pero sin embargo las sumas de los atractivos en los *clusters* de la misma partición no son necesariamente iguales a 100. Algunos experimentos numéricos y los resultados finales de este estudio nos muestran que esta calibración (y la efectuada para los criterios de superficie y accesibilidad) permite calcular de manera realista el atractivo final de cada *cluster* en esta metodología.

Clusters factibles formados por el algoritmo	Cantidad de colegios	Índice	Atractivo de colegios calibrado
A	90	2,22	55,0%
B	110	1,82	45,0%
C	100	2,00	49,5%
D	100	2,00	49,5%
E	80	2,50	61,9%
F	120	1,67	41,3%
G	110	1,82	45,0%
H	90	2,22	55,0%

Tabla 11. Cálculo del atractivo de cada *cluster* según el de número de colegios.

#### ■ Superficie

La Tabla 12 muestra los valores obtenidos para cada *cluster* según este criterio, calibrados para obtener un factor de atractivo 60 en la UT A (que era el porcentaje calculado al obtener los valores en la otra metodología). El resto de los valores se calcula manteniendo las proporciones de acuerdo a los índices generados por la división entre el número de km<sup>2</sup> total de la región y el número de km<sup>2</sup> del *cluster*. Por ejemplo, el atractivo 43,6 del *cluster* C se obtiene haciendo  $60 \cdot 1,82 / 2,50$ .

Clusters factibles formados por el algoritmo	Cantidad de superficie	Índice	Atractivo de superficie calibrado
A	8.000	2,50	60,0%
B	12.000	1,67	40,0%
C	11.000	1,82	43,6%
D	9.000	2,22	53,3%
E	10.000	2,00	48,0%
F	10.000	2,00	48,0%
G	12.000	1,67	40,0%
H	8.000	2,50	60,0%

Tabla 12. Cálculo del atractivo de cada *cluster* según la superficie.

#### ■ Accesibilidad

La Tabla 13 muestra los valores obtenidos para cada *cluster* según este criterio, calibrados y suavizados para obtener un factor de atractivo final igual a 57,9 en la UT A (que era el porcentaje calculado al obtener los

valores en la otra metodología). Para ello se calculan primero los atractivos de acceso de cada UT tomando como base el valor de 65,7 de la UT A. El resto de los valores para obtener el atractivo de acceso calibrado se calcula manteniendo las proporciones de acuerdo al índice de accesibilidad (índice que se calcula haciendo la división entre el número de colegios de fácil acceso y el número de colegios de difícil acceso del *cluster*). Por ejemplo, el atractivo 30,9 del *cluster* C se obtiene haciendo  $65,7 \times 10,11 / 21,50$ . Finalmente, para obtener los atractivos finales (ya suavizados) de cada *cluster*, recordemos que en este criterio el índice influye en un 50 % en el valor final, mientras que el otro 50 % corresponde al promedio que debiera tener cada *cluster* en este ítem. Como en esta metodología no se conoce a priori la composición total de la región, para obtener el promedio lo que se considera es el número de celdas que tiene el *cluster* y ese valor se lo divide por el total de celdas de la región.

Clusters factibles formados por el algoritmo	Cantidad de colegios de fácil acceso	Cantidad de colegios de difícil acceso	Índice de accesibilidad	Atractivo de acceso calibrado	Atractivo de acceso calibrado y suavizado
A	86	4	21,50	65,7%	57,9%
B	101	9	11,22	34,3%	42,1%
C	91	9	10,11	30,9%	40,4%
D	96	4	24,00	73,3%	61,7%
E	76	4	19,00	58,1%	54,0%
F	113	7	16,14	49,3%	49,7%
G	102	8	12,75	39,0%	44,5%
H	86	4	21,50	65,7%	57,9%

Tabla 13. Cálculo del atractivo de cada cluster según la accesibilidad.

En resumen, en esta metodología se calcula el atractivo de cada *cluster* sin conocer lo que ocurre en el resto de la región. De esta manera, los valores deben ser calibrados para obtener puntajes que mantengan la proporcionalidad entre los *clusters*.

Clusters factibles, formados por algoritmo	Atractivo de razones	Atractivo de colegios	Atractivo de superficie	Atractivo de accesibilidad
A	40,0%	55,0%	60,0%	57,9%
B	60,0%	45,0%	40,0%	42,1%
C	65,0%	49,5%	43,6%	40,4%
D	35,0%	49,5%	53,3%	61,7%
E	50,0%	61,9%	48,0%	54,0%
F	50,0%	41,3%	48,0%	49,7%
G	70,0%	45,0%	40,0%	44,5%
H	30,0%	55,0%	60,0%	57,9%

Razones	38,1%
Colegios	34,2%
Superficie	16,9%
Accesibilidad	10,8%

UT factibles, formadas por algoritmo	Atractivo de UT
A	50,4%
B	49,6%
C	53,4%
D	45,9%
E	54,2%
F	46,6%
G	53,6%
H	46,6%

Tabla 14. Cálculo del atractivo final de cada cluster.

Al igual que lo realizado para la heurística, para obtener el atractivo de un cluster en esta metodología se multiplica la matriz formada por los vectores de preferencia para cada cluster de cada criterio (8x4), por la matriz de pesos de criterios (4x1), obteniéndose la matriz con los atractivos para cada cluster,

lo que se muestra en la Tabla 14 para el ejemplo desarrollado.

### 4.3. Formulación del modelo

La distribución de celdas para la confección de *clusters* es un problema de un alto grado de complejidad, principalmente por la gran cantidad de combinaciones existentes entre las celdas que pueden formar los *clusters*. Estas posibles UT serán el *input* principal de nuestro modelo de programación entera. Como este tipo de modelos suelen ser de difícil resolución (recordemos que en términos de complejidad computacional la programación entera es un problema *NP-Hard*), es importante buscar alternativas para la función objetivo que no agreguen muchas variables al problema.

En un principio se intentó homologar la desviación estándar minimizada en la heurística, utilizando variables auxiliares y teniendo como objetivo la minimización de la suma de los valores absolutos de las diferencias entre puntajes de las unidades seleccionadas. Este objetivo obligaba a tener una gran cantidad de nuevas variables, que agrandarían fuertemente los tiempos de resolución del problema.

Por ello se prefirió la siguiente alternativa. Los *clusters* obtenidos a priori son usados como variables de decisión en el modelo de programación lineal entera. Además, cada *cluster* posee un valor, que se calcula tal cual fue explicado en la Sección 4.2. La función objetivo del modelo busca minimizar la diferencia entre el mayor y menor puntaje de una UT dentro de una región. Este objetivo constituye una aproximación a la no linealidad de la desviación estándar. El modelo de optimización es una herramienta que permite comparar la bondad de los resultados arrojados por la heurística, dado que ambas funciones objetivo (minimizar la desviación estándar y minimizar la brecha entre la "mejor" y la "peor" UT) tienen características similares. Además, el modelo también fue utilizado para generar buenas soluciones iniciales desde donde empezar a aplicar la heurística (ver Sección 5). La formulación de este problema se muestra a continuación.

- **Variables**

a = puntaje mínimo de una UT dentro de una región

b = puntaje máximo de una UT dentro de una región

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si el cluster } j \text{ es seleccionado como UT} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Parámetros**

$v_j$  = indica el puntaje del *cluster* j, obtenido con los cuatro criterios utilizados.

$\Omega_i$  = conjunto de *clusters* que contienen a la celda  $i$ .

$P$  = promedio de puntajes de las UT seleccionadas en una región.

■ **Función objetivo**

$$\text{mín}(b - a) \quad (1)$$

■ **Restricciones**

$$\sum_{j \in \Omega_j} y_j = 1 \quad \forall i \quad (2)$$

$$a \leq v_j * y_j + (1 - y_j) * P \leq b \quad \forall j \quad (3)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \quad (4)$$

$$a, b \geq 0 \quad (5)$$

La formulación tiene como fin (ecuación (1)) la obtención de UT relativamente homogéneas, minimizando la brecha entre el mayor ( $b$ ) y el menor ( $a$ ) puntaje en cada región. La ecuación (2) dice que de todos los *clusters* que contienen a una celda dada se debe elegir como UT a exactamente uno. Las inecuaciones de (3) establecen el rango en el cual los puntajes de las UT deben oscilar. El parámetro  $P$  corresponde al puntaje promedio de las UT que se seleccionarán. Dado que a priori no se conoce este promedio (pero se puede estimar), se utilizaron entre tres y cinco valores distintos de  $P$  para cada región, eligiéndose finalmente el que otorgaba una mejor función objetivo. La restricción (4) indica que  $y_j$  es una variable binaria, mientras que (5) indica que  $a$  y  $b$  deben ser números reales positivos.

Esta formulación del modelo fue programada en el software GAMS 22.1 y resuelta por CPLEX 10.0. El modelo fue ejecutado bajo el mismo hardware que la heurística y el algoritmo de enumeración de *clusters*.

---

## 5. Método de Programación Entera + Heurística

---

En la última metodología empleada, a la solución entregada por el modelo de programación entera que minimiza la brecha entre la "mejor" y la "peor" UT, se le aplicó la heurística, buscando disminuir la desviación estándar. La idea de esta nueva metodología tiene origen en el resultado de la heurística y el

modelo de programación entera para la Primera Región. El hecho de que el modelo dé una desviación estándar un poco menor, aún en un caso de pocas comunas, da la idea de que la solución inicial en la que está configurada la región es importante para un mejor resultado de la heurística.

La heurística y el modelo de programación entera son dos buenos complementos a la hora de obtener un resultado que satisfaga objetivos similares. Así, usando el modelo de programación entera para minimizar la diferencia entre el mayor y menor puntaje dentro de una región, es posible usar ese resultado como el paso 0 de la heurística. La solución entregada por el modelo de programación entera no debiera sufrir un gran cambio cuando se le aplica la heurística en las regiones donde es posible mejorar la desviación estándar, debido a que la solución inicial es óptima para minimizar la brecha entre la "mejor" y la "peor" UT, y a la relación directa entre ambos objetivos.

---

## 6. Resultados

---

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos con las metodologías antes descritas. Se evaluó para cada una de las regiones de Chile, excepto la XI, XII y Metropolitana, las mejores configuraciones obtenidas con los tres métodos. Mientras la XI y la XII no fueron analizadas por no tener las suficientes comunas para formar al menos dos UT, la Metropolitana se omitió porque dada la gran cantidad de comunas adjudicadas a empresas Pymes que presentaba, se pretendía mantenerla con la configuración utilizada hasta 2007. Además, en este estudio se analizaron las regiones instituidas en Chile hasta 2006, por lo que las actuales regiones de Los Ríos y de Los Lagos son estudiadas en forma conjunta, al igual que Arica-Parinacota y Tarapacá.

El estudio fue utilizado por JUNAEB con el objetivo de modificar su actual segregación de territorios para sus licitaciones, utilizando el 100 % de las alternativas postuladas en este trabajo. Se seleccionó para cada región la solución de menor desviación estándar obtenida por la heurística, que fue la primer metodología que se terminó.

En la licitación de 2007, cuyo contrato comenzó a ejecutarse a partir del mes de Marzo de 2008, ya se realizó la segregación territorial basada en el estudio para las regiones de Arica/Parinacota, Tarapacá, Antofagasta, del Maule, de Los Ríos, de Los Lagos y 1/3 de la Región Metropolitana. Con esto, se ha licitado un tercio de los servicios entregados por JUNAEB en todo el país. En las próximas licitaciones, las de 2008, para iniciarse en 2009 y la del año 2009, para iniciarse en 2010, se realizará la segregación territorial utilizando también el estudio aquí desarrollado.

En algunas regiones el cambio entre la distribución original de las comunas

y la entrega por cualquiera de los tres métodos resultó ser muy grande, debido a una sustancial heterogeneidad que presentaban las regiones antes de este trabajo, mientras que en otras el cambio fue pequeño, pues las UT ya eran bastante homogéneas. La nomenclatura usada es:

- **O = Configuración original.** Se calcula el valor de la desviación estándar
- **H = Configuración elaborada con la heurística.** Objetivo: "Minimizar la desviación estándar entre las UT de una región"
- **M = Configuración elaborada con modelo de programación entera.** Objetivo: "Minimizar la diferencia entre el mayor y el menor puntaje de las UT de una región"
- **M+H = Configuración elaborada con la heurística, tomando como solución inicial el resultado entregado por el modelo de programación entera.** Objetivo: "Minimizar la desviación estándar"

Los resultados para cada método, a priori, deberían ser los mismos o muy parecidos para las regiones con pocas comunas. Sin embargo para las regiones con muchas comunas pueden dar resultados variados debido a la alta cantidad de combinaciones que pueden darse, la cual aumenta exponencialmente.

En la Tabla 15 se presenta una comparación del valor de la desviación estándar (multiplicada por 1000) en el puntaje de las UT en las nuevas configuraciones obtenidas por cada uno de los métodos aquí desarrollados y en la configuración hasta 2007. El porcentaje de mejora se obtiene a través de la división entre el módulo de la diferencia de ambas desviaciones y la desviación más alta.

Región	Desviación estándar*1000				Variaciones desviación estándar					
	Original	Heuristica	Modelo	M+H	O v/s H	O v/s M	O v/s M+H	H v/s M	H v/s M+H	M v/s M+H
I	59,2606	3,3235	2,9002	2,9002	94,39%	95,11%	95,11%	12,74%	12,74%	0,00%
II	1,7656	1,7656	1,7656	1,7656	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
III	7,3759	3,0138	3,0138	3,0138	59,14%	59,14%	59,14%	0,00%	0,00%	0,00%
IV	59,3588	17,4444	8,7488	6,4244	70,61%	85,26%	89,18%	49,85%	63,17%	26,57%
V	14,6982	7,2983	4,2298	2,9939	50,35%	71,22%	79,63%	42,04%	58,98%	29,22%
VI	32,6641	4,9151	4,1361	4,1361	84,95%	87,34%	87,34%	15,85%	15,85%	0,00%
VII	40,5145	8,1358	5,3422	2,0553	79,92%	86,81%	94,93%	34,34%	74,74%	61,53%
VIII	24,3784	8,2864	7,8469	5,5500	66,01%	67,81%	77,23%	5,30%	33,02%	29,27%
IX	39,0247	8,1090	0,8062	0,8062	79,22%	97,93%	97,93%	90,06%	90,06%	0,00%
X	10,3572	8,6694	8,7741	8,6694	16,30%	15,28%	16,30%	1,19%	0,00%	1,19%

Tabla 15. Comparación de la desviación estándar multiplicada por 1000 entre los distintos métodos.

Para realizar las comparaciones se calcularon los atractivos de las UT en cada solución final, utilizando en todos los casos la primera de las metodologías (desarrollada en la Sección 3.1).

Comparando los resultados de la desviación estándar en cada caso puede observarse en general una notoria variación entre la distribución empleada por

JUNAEB hasta el año 2007 y los resultados de los tres métodos. Además, el modelo de programación entera a pesar de no buscar el objetivo de minimizar la desviación estándar, obtiene resultados un poco mejores que la heurística en ese sentido, exceptuando la X región, aunque en este caso se trata de un aumento de sólo un 1,19 %. Esto se debe a que en la mayoría de los casos existe una correlación entre ambos objetivos; es decir que si los resultados del modelo son los mejores minimizando la diferencia entre el mayor y el menor puntaje, también permiten disminuir la desviación estándar. De este modo es razonable pensar que la solución óptima del modelo de programación entera pueda ser usada como solución inicial de la heurística, cuando se busca minimizar la desviación estándar. Las mejores soluciones las entrega la metodología del modelo de programación entera + heurística, pues comienza con una solución inicial que es óptima para el objetivo de minimizar la diferencia, la cual es mejorada por la heurística en la búsqueda de minimizar la desviación estándar.

En la Tabla 16 se muestra la brecha entre los valores máximo y mínimo de cada UT en los resultados finales obtenidos en cada método y en la configuración inicial. El porcentaje de mejora se obtiene a través de la división entre el módulo de la diferencia de ambas brechas y la brecha más alta.

Para realizar las comparaciones se calcularon los atractivos de las UT en cada solución final, utilizando en todos los casos la segunda de las metodologías (desarrollada en la Sección 4.2).

El mejor resultado lo entrega obviamente el modelo de programación entera, dado que tiene como objetivo minimizar dicha diferencia (notar que el modelo alcanza el óptimo en todos los casos). La diferencia es mayor con los otros dos métodos en aquellas regiones con una gran cantidad de comunas y, por consiguiente, mayor cantidad de combinaciones para formar *clusters*. Además, es interesante notar que, a pesar de que la heurística y el modelo de programación entera + heurística tienen como objetivo minimizar la desviación estándar, el segundo siempre presenta mejores resultados que el primero, también para el caso de disminuir la brecha entre la mejor y la peor UT de cada región.

Región	Diferencias (máx - mín)				Variaciones entre métodos					
	Original	Heurística	M+H	Modelo	O v/s H	O v/s M+H	O v/s M	H v/s M+H	H v/s M	M+H v/s M
I	12,70	0,55	0,04	0,04	95,67%	99,69%	99,69%	92,73%	92,73%	0,00%
II	0,20	0,20	0,20	0,20	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
III	2,55	1,15	1,15	1,15	54,90%	54,90%	54,90%	0,00%	0,00%	0,00%
IV	46,49	4,63	2,36	1,58	90,04%	94,92%	96,60%	49,03%	65,87%	33,05%
V	12,62	2,84	1,53	1,27	77,50%	87,88%	89,94%	46,13%	55,28%	16,99%
VI	40,84	2,62	0,54	0,54	93,58%	98,68%	98,68%	79,39%	79,39%	0,00%
VII	63,48	2,45	1,73	0,17	96,14%	97,27%	99,73%	29,39%	93,06%	90,17%
VIII	72,86	4,86	2,93	2,49	93,33%	95,98%	96,58%	39,71%	48,77%	15,02%
IX	47,09	2,72	0,15	0,15	94,22%	99,68%	99,68%	94,49%	94,49%	0,00%
X	3,81	2,52	2,52	2,26	33,86%	33,86%	40,68%	0,00%	10,32%	10,32%

Tabla 16. Comparación de diferencias entre el mayor y menor puntaje de cada UT para cada metodología.



Es importante ver a través de estos resultados que con cualquier punto de vista analizado se obtienen valores más homogéneos en las UT de cada región. Esta situación muestra una cierta robustez de los métodos empleados en este trabajo.

Como se mencionó anteriormente, existía en el caso del modelo de programación entera una complicación adicional para calcular el puntaje de cada *cluster* puesto que el mismo se obtiene sin conocer la distribución del resto de la región (a diferencia de lo que ocurre con la heurística). Sin embargo, los buenos resultados obtenidos por el modelo en todas las regiones dan la idea de que la calibración de estos valores ha sido adecuada.

Lo que se mantiene inalterable en todas las metodologías es el número de UT óptimo, como se explicita en la Tabla 17. Era de esperar una muy baja variación en este valor, dado que una estimación del mismo es fácilmente obtenido al calcular el número promedio de raciones por unidad (a los efectos de este cálculo ayuda mucho conocer las cotas inferiores y superiores de raciones por UT). Notar que el número total de UT se redujo en 25, un 18% del total de 136.

Región	UT antes del estudio	UT después del estudio
I	2	2
II	2	2
III	2	2
IV	5	3
V	10	7
VI	9	5
VII	10	6
VIII	17	10
IX	9	7
X	11	8
<b>Total</b>	<b>77</b>	<b>52</b>

Tabla 17. Cantidad de UT antes y después del estudio.

Los tiempos de resolución variaron considerablemente de acuerdo a la metodología empleada. En la heurística los tiempos de corrida son de sólo unos milisegundos para las regiones con pocas comunas, mientras que para las regiones con más comunas los tiempos pueden aumentar hasta sólo un par de segundos. En este aspecto influye la configuración original que tenía JUNAEB, la cantidad de comunas y la distribución que presentan las comunas dentro de la región, pues no es lo mismo que las comunas con muchas raciones estén

aglutinadas a que se encuentren dispersas alrededor de toda la región.

El algoritmo de elaboración de *clusters* es también rápido. En la mayoría de las regiones la demora en la conformación de los *clusters* factibles no llegó al minuto. Sólo en las regiones VI, VII y VIII el tiempo llegó a los 20 minutos. Este tiempo depende de la cantidad de celdas, del número máximo de celdas que pueden pertenecer a un *cluster* y de la cantidad de adyacencias en la región.

Los tiempos del modelo de programación entera no superan la hora de corrida, excepto en la VIII Región, donde puede llegar hasta las 5 horas, debido a la cantidad de celdas y a la gran cantidad de combinaciones existentes. Las regiones I, II y III no superan los 60 segundos en su resolución. Los aspectos más importantes que influyen en los tiempos de resolución del modelo es la cantidad de *clusters* que satisfacen las condiciones del algoritmo y la distribución de las celdas atractivas.

Finalmente cuando el resultado del modelo es usado como solución inicial de la heurística, los tiempos no varían demasiado con respecto al segundo método, pues los tiempos de corrida de la heurística, como ya se ha dicho, son de unos pocos segundos.

---

## 7. Conclusiones

---

En la mayoría de las regiones la nueva distribución de las UT entre los distintos análisis es similar y puede decirse que la heurística es un método muy rápido para obtener resultados satisfactorios.

La menor desviación estándar se logra con el método modelo + heurística, pues se inicia con una solución óptima para uno de los objetivos que es variada para mejorar el otro objetivo. En contraparte, la menor diferencia entre el mayor y menor puntaje se logra con el modelo de programación entera, el cual entrega la solución óptima para el objetivo buscado en todos los casos.

La configuración utilizada hasta 2007 mostraba importantes problemas en la VI y VII Región dado que las comunas muy atractivas eran adjudicadas íntegramente a una UT. Esto ocasionaba que las firmas se interesaran mucho más por esas UT en desmedro del resto de la región. Las propuestas actuales dividen estas comunas y se las asigna en más de una UT, de tal forma de que haya varios territorios con una importante cantidad de raciones para una compañía que postula a la licitación.

Con la propuesta de configuración territorial realizada disminuye el riesgo de bancarota de alguna empresa que pertenece a este proceso, pues ya no existirán UT poco atractivas.

Según JUNAEB el objetivo principal del problema fue cumplido a cabal-

idad, pues la nueva segregación utilizada permitió mayor interés en la adjudicación de nuevas zonas para las empresas oferentes y, además, éstas han podido hacer más competitivas sus ofertas. Esto mismo permitirá a JUNAEB controlar de mejor manera la gestión y operación de los concesionarios dentro de una región.

Cabe destacar que la confección de una nueva configuración que cumple con los objetivos de JUNAEB y los requerimientos de las empresas fue posible gracias a la definición de los criterios principales que determinan el atractivo de una UT, a la cuantificación de los mismos y al uso de técnicas de programación matemática que en base a estos criterios permitieron conseguir configuraciones con atractivos homogéneos. Claramente, un enfoque manual como el empleado para hacer la configuración que regía hasta 2007 no hubiera permitido alcanzar este tipo de resultados.

Un tercio de la nueva configuración propuesta fue utilizada por JUNAEB, licitando durante 2007 las siguientes regiones distribuidas en UT por la heurística: Arica-Parinacota, Tarapacá, Antofagasta, del Maule, de Los Ríos, de Los Lagos y un tercio de la Región Metropolitana (región no analizada en el presente trabajo). Durante los próximos dos años se seguirá usando el resto del resultado entregado.

**Agradecimientos:** Al Instituto de Ciencias Milenio "Sistemas Complejos de Ingeniería" por el apoyo brindado para la concreción de este estudio. A las autoridades de JUNAEB, especialmente a Amalia Cornejo y Lizette Vega, por toda su colaboración. A Flavia Bonomo y Pablo Rey, por sus sugerencias que permitieron mejorar este trabajo. A Nicolás Maluenda y Ronald Poillot, por su ayuda en la implementación de la heurística de búsqueda local. El segundo autor está parcialmente financiado por el Fondecyt 1080286. El tercer autor está parcialmente financiado por el Fondecyt 1085188.

## Referencias

- [1] Caro F., Shirabe T., Guignard M. and Weintraub A., School redistricting: embedding GIS tools with Integer Programming, *Journal of the Operational Research Society* (2004) 55, 836-849.
- [2] Goycoolea M., Murray A., Barahona F., Epstein R. and Weintraub, A., Harvest Scheduling Subject to Maximum Area Restrictions: Exploring Exact Approaches, *Operations Research* (2005) 53(3), 490-500.
- [3] Goycoolea, M., Murray, A., Vielma, J. and Weintraub, A., Evaluating Approaches for Solving the Area Restriction Model in Harvest Scheduling, *European Journal of Operational Research* (2007), submitted.

- [4] Murray, A. and Weintraub, A., Scale and Unit Specification Influences in Harvest Scheduling with Maximum Area Restriction,. *Forest Science* (2002) 48(4), 779-789.
- [5] Saaty, T., *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw Hill (1980).
- [6] Taylor R., Vasu M. and Causby J., Integrated planning for school and community: the case of Johnston County, North Carolina, *Interfaces* (1999) 29 (1), 67-89.
- [7] Zamorano, G., *Métodos Cuantitativos para Configuración de Unidades Territoriales Aplicado a JUNAEB*. Tesis (Magíster en Gestión de Operaciones e Ingeniería Civil Industrial). Santiago, Chile. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, 2008. 150 pág.